Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2007. Том 48, № 3

УДК 512.542

ЛОКАЛЬНАЯ КОНЕЧНОСТЬ НЕКОТОРЫХ ГРУПП, ПОРОЖДЕННЫХ КЛАССОМ СОПРЯЖЕННЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ПОРЯДКА 3

А. А. Максименко, А. С. Мамонтов

Аннотация: Доказана локальная конечность групп, порожденных классом сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную $Z_3, A_4, A_5, SL_2(3)$ или $SL_2(5)$.

Ключевые слова: группа, локально конечная группа, класс сопряженности.

1. Введение

В работе доказывается следующий результат.

Теорема. *Пусть G — группа, порожденная классом сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4, A_5, $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. Тогда либо G изоморфна одной из групп $U_3(3)$, HJ, $G_2(4)$, $2.HJ$, $2.G_2(4)$, либо G — расширение локально конечной 2-группы при помощи группы порядка 3, либо G — расширение локально конечной 2-группы при помощи группы, изоморфной A_5. В частности, группа G локально конечна.*

Конечные группы с похожими свойствами изучались в [1, 2] и использовались, например, в [3] при исследовании квадратичных пар для простого числа 3. В [4] доказывается локальная конечность группы G, порожденной классом X сопряженных элементов порядка 3 таким, что любые два неперестановочных элемента из X порождают подгруппу, изоморфную знакопеременной группе степени 4 или 5.

В исследованиях используются вычисления с помощью алгоритма перечисления смежных классов программы GAP [5].

Отметим, что группа G, вообще говоря, не обязана быть конечной. Группа $G = \big(\prod\limits_{i\in I} U_i\big)A_5$, где I — произвольное множество индексов, $U_i \simeq U = 2^4$ — элементарная абелева подгруппа, на которой A_5 действует, как в W (см. лемму 2), удовлетворяет условиям теоремы.

Теорема может быть использована для исследования групп, действующих локально свободно на абелевой группе. Действие группы G на нетривиальной абелевой группе V с аддитивной записью операции называется *свободным*, если $vg \neq v$ для всех $g \in G$, $g \neq 1$, и всех $v \in V$, $v \neq 1$. Классификация конечных

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 05–01–00797), программы Университеты России (проект № УР.04.01.028) и программы Рособразования «Развитие научного потенциала высшей школы» (проект № 511).

групп, способных действовать свободно на нетривиальной абелевой группе, была получена Цассенхаузом [6] и основывалась на применении теории характеров конечных групп. В частности, классификация Цассенхауза показывает, что если конечная группа G порождена классом сопряженных элементов порядка p и действует свободно на нетривиальной абелевой группе, то либо G циклическая, либо $p = 5$ и G изоморфна $SL_2(5)$, либо $p = 3$ и G изоморфна $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. В [7] В. Д. Мазуров привел простое короткое доказательство теоремы Цассенхауза, не использующее теорию характеров.

Следствие. *Пусть группа G действует на абелевой группе V и порождена таким классом C сопряженных элементов порядка 3, что для любых $x, y \in C$ подгруппа $H = \langle x, y\rangle$ конечна и в V найдется такая H-инвариантная подгруппа, на которой H действует свободно. Тогда либо G изоморфна одной из групп $U_3(3), 2.HJ, 2.G_2(4)$, либо G — расширение 2-группы при помощи группы порядка 3, либо G — расширение 2-группы при помощи группы, изоморфной A_5. При этом группа G локально конечна.*

Заметим, что группа G, вообще говоря, не обязана быть конечной. Пусть G — бесконечная группа, порожденная таким классом C сопряженных элементов порядка 3, что любые два элемента x и y из C порождают подгруппу H, изоморфную $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. Подобную группу можно построить способом, указанным в предыдущем замечании. Построим для этой группы модуль V так, чтобы выполнялись условия следствия. Рассмотрим V_H — представление группы H над полем, характеристика которого не делит $|H|$, такое, что H действует свободно на V_H. Пусть V_H^G — G-модуль, индуцированный модулем V_H, и $V = \bigoplus\limits_H V_H^G$.

Доказательство теоремы в случае, когда любые два элемента порождают A_4 или $SL_2(3)$, получено первым автором. Другие возможности рассмотрены вторым автором.

2. Обозначения и предварительные результаты

Пусть H — подгруппа группы G, $x, y \in G$, X — подмножество G. Тогда $x^y = y^{-1}xy$, $\langle X\rangle$ — подгруппа, порожденная X, $Z(H)$ — центр H. Для простого числа p через $O_p(G)$ обозначим произведение всех нормальных p-подгрупп из G. Введем следующие соотношения:

$$x \sim y \Longleftrightarrow x^3 = y^3 = 1 \text{ и } xyx = yxy,$$

$$x \,\square\, y \Longleftrightarrow x^3 = y^3 = (xy)^5 = (x^y x)^2 = 1,$$

$$x \vartriangle y \Longleftrightarrow x^3 = y^3 = 1,\ xyxyx = yxyxy \text{ и } xy^{-1}xy^{-1}x = y^{-1}xy^{-1}xy^{-1}.$$

Будем говорить, что x — *D-элемент*, если x принадлежит классу D сопряженных элементов порядка 3, удовлетворяющему условиям теоремы.

Лемма 1.

1. (а) *Пусть x, y — элементы порядка 3, порождающие A_4. Тогда $(xy)^2 = 1$ или $(xy^{-1})^2 = 1$.*

(б) $A_4 \simeq \langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^2\rangle$.

2. (а) *Пусть x, y — элементы порядка 3, порождающие $SL_2(3)$. Тогда $x \sim y$ или $x \sim y^{-1}$.*

(б) $SL_2(3) \simeq \langle x, y \mid x \sim y\rangle$.

(в) $Z(\langle x, y \mid x \sim y\rangle) = \{1, (xy^{-1})^2\}$.

3. (а) *Пусть x, y — элементы порядка 3, порождающие A_5. Тогда $x \,\square\, y$.*

(б) $A_5 \simeq \langle x, y \mid x \,\square\, y\rangle$.

4. (а) *Пусть x, y — элементы порядка 3, порождающие $SL_2(5)$. Тогда $x \vartriangle y$.*

(б) $SL_2(5) \simeq \langle x, y \mid x \vartriangle y\rangle$.

(в) $Z(\langle x, y \mid x \,\square\, y\rangle) = \{1, (xy)^5\}$.

Доказательство. 1(а) Без потери общности можно считать, что $x = (1, 2, 3)$ и $y = (2, 3, 4)^{\pm 1}$, тогда соотношения проверяются непосредственными вычислениями.

1(б) Вычисления по алгоритму перечисления смежных классов [5] показывают, что порядок группы $\langle x, y \mid x^3 = y^3 = (xy)^2\rangle$ равен 12.

Остальные пункты леммы доказываются аналогично.

2(а) Можно считать, что $x = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

3(а) Можно считать, что $x = (1, 2, 3)$, $y = (3, 4, 5)$.

4(а) Можно считать, что $x = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

Центры соответствующих групп вычисляются непосредственно.

Лемма 2 (абстрактные порождения трех элементов). 1. $\langle a, b, c \mid a \sim b, a \sim c, b \sim c, a^{-1} \sim b^c, a^{-1} \sim c^b\rangle \simeq U(3, 3)$.

2. $\langle a, b, c \mid a \sim b, a \sim c, b \sim c, a \sim b^c, a \sim c^b\rangle \simeq P := \langle a\rangle O_2$, *при этом* $|O_2| = 2^8$, $Z(O_2)$ *— элементарная абелева группа порядка* 2^4*, порождаемая центральными инволюциями из* $SL_2(3)$*-подгрупп,* $P/Z(O_2)$ *— группа Фробениуса.*

3. $\langle a, b, c \mid a \,\square\, b, a \,\square\, c, (bc)^2 = 1, a \sim b^c\rangle \simeq W := A_5 O_2$, *при этом* $|W| = 2^5 \cdot 60$, $Z(W) = \{1, (abc)^5\}$.

4. $\langle a, b, c \mid a \,\square\, b, a \,\square\, c, (bc)^2 = 1, a \,\square\, b^c, a \,\square\, c^b\rangle \simeq W_1 := A_5 O_2$, *при этом* $|W_1| = 2^{10} \cdot 60$.

5. $\langle a, b, c \mid a \,\square\, b, a \,\square\, c, b \sim c, a \sim b^c, a \sim c^b\rangle \simeq HJ$.

6. $\langle a, b, c \mid a \,\square\, b, a \sim c, b \sim c, a \,\square\, b^c, a \sim (c^b)^{-1}\rangle \simeq 2.W_1$. *Здесь* $(cb^{ab})^2$ *— центральная инволюция.*

7. $\langle a, b, c \mid a \,\square\, b, b \,\square\, c, a \sim c, b \,\square\, a^c, b \,\square\, c^a, c \,\square\, b^{ab^{-1}}, c \sim a^{ba}\rangle \simeq G_2(4)$.

Все эти группы порождаются классом сопряженных элементов порядка 3, удовлетворяющим условиям теоремы.

Доказательство. Алгоритм перечисления смежных классов [5] позволяет вычислить порядки групп из леммы, заданных при помощи определяющих соотношений. При этом в группах большого порядка удобно считать индекс по подгруппе $\langle a, b\rangle \simeq A_5$, а в последнем случае — по подгруппе $H = \langle a, c, a^{ba}\rangle \simeq W$.

Используя известное подстановочное представление для группы $U(3, 3)$ [8], можно найти в ней сопряженные элементы a, b и c порядка 3, удовлетворяющие соответствующим соотношениям и порождающие всю $U(3, 3)$. Таковыми будут, например,

$$a = (1, 18, 28)(2, 24, 14)(3, 22, 16)(4, 20, 26)(6, 7, 8)\\ (9, 21, 25)(10, 19, 13)(11, 17, 15)(12, 23, 27);$$

$$b = (1, 18, 28)(2, 24, 14)(3, 22, 16)(4, 20, 26)(6, 7, 8)\\ (9, 21, 25)(10, 19, 13)(11, 17, 15)(12, 23, 27);$$

$$c = (2,3,4)(5,28,18)(6,23,14)(7,22,15)(8,25,19)$$
$$(9,27,16)(10,24,17)(11,21,20)(12,26,13).$$

П. 1 доказан. То же самое можно проделать и с $HJ, G_2(4)$, а также с P, W и W_1 — соответствующие подстановочные представления можно получить из тех соображений, что W и W_1 являются централизаторами некоторых инволюций в группах HJ и $G_2(4)$ соответственно, а $P \leq W_1$.

В п. 4 обозначим $s := b^{ab}$. Тогда $c \sim s^{-1}$ и инволюция $i := (cs)^2$ из центра $\langle c, s\rangle$ лежит в центре всей группы $G = \langle a, b, c\rangle$ (эти утверждения можно проверить, например, добавлением соответствующих соотношений к определяющим соотношениям группы G). В фактор-группе $G/\langle i\rangle$ элементы a^b, s и c удовлетворяют соотношениям п. 2, а стало быть, порождают группу, изоморфную W_1.

Лемма 3. *Пусть $N = \langle a, b, c \mid a \square b, a \sim c, b \sim c, a \square b^c, a \square c^b\rangle$. Тогда N — расширение 2-группы O_2 порядка 2^7 посредством $U(4,2)$. В группе N и ее простом факторе, изоморфном $U(4,2)$, элементы $n = a^{(bc)^3}$ и $m = a^{(bc^2a)^3}$ не лежат в $\langle a\rangle$, но перестановочны с a.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. Оно получается с помощью алгоритма перечисления смежных классов и непосредственных вычислений в группе $U(4,2)$.

Отметим, что аналогичные леммы уже встречались в работе [2].

3. Подгруппы, порожденные тремя D-элементами

Пусть D — класс сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4, A_5 или $SL_2(3)$, $a, b, c \in D$ и $G = \langle a, b, c\rangle$. По лемме 1 для любых двух элементов x и y из D выполнено одно из трех соотношений: $x \sim y, x \sim y^{-1}$ или $x \square y$.

Лемма 4. *Если $\langle a, c\rangle \simeq A_4$, то G — группа, изоморфная группам из пп. 2, 4 леммы 2, либо их факторам.*

Доказательство. Для определенности считаем, что $(a^{-1}c)^2 = 1$. Пусть $x = b^c$, $y = c^b$. Обсудим различные возможности выбора b.

1. Пусть $a \sim b \sim c$. Группы $\langle a, x\rangle$ и $\langle a, y\rangle$ изоморфны Z_3, A_4, A_5 или $SL_2(3)$. Перебирая все варианты, получим, что единственный нетривиальный вариант возможен, когда $a \sim x$, $a \sim y$. В этом случае G — фактор группы P из леммы 2 порядка 384. В остальных случаях поступаем аналогичным образом.

2. Пусть $a \sim b \sim c^{-1}$. Если $x \square a \square y$, то $G \simeq W$.

3. Пусть $a \square b \sim c$. Если $a \sim x^{-1}$, $a \square y$, то $G \simeq W$. Если $a \square x$, $a \sim y^{-1}$, то $G \simeq W$.

4. Пусть $a \square b \square c$. Если $a \sim x$, $a \sim y$, то $G \simeq W$. Если $a \sim x^{-1}$, $a \sim y^{-1}$, то $G \simeq W$. Если $a \square x$, $a \sim y^{-1}$, то $G \simeq W_1$.

Остальные случаи сводятся к описанным.

Лемма 5. *Если $\langle a, c\rangle \simeq SL_2(3)$ и $\langle b, c\rangle \simeq SL_2(3)$, то G — группа, изоморфная группам из пп. 2, 6 леммы 2, либо их факторам, либо HJ, либо $U(3,3)$.*

Доказательство аналогично доказательству предыдущей леммы. Считаем для определенности, что $a \sim c \sim b$, $x = b^c$, $y = c^b$. Возможны три случая.

1. Пусть $a \sim b$. Если $a \sim x$, $a \sim y$, то $G \simeq P$, где P — группа из леммы 2. Если $a \sim x^{-1}$, $a \sim y^{-1}$, то $G \simeq U(3,3)$. Если $a \square x$, $a \square y$, то $G \simeq HJ$.

2. Пусть $a \sim b^{-1}$. Если $a \sim x^{-1}$, $a \sim y$, то $G \simeq U(3,3)$. Если $a \sim x$, $a \sim y^{-1}$, то $G \simeq U(3,3)$. Если $a \,\square\, x$, $a \,\square\, y$, то $G \simeq 2.W_1$.

3. Пусть $a \,\square\, b$. Если $a \sim x$, $a \,\square\, y$, то $G \simeq HJ$. Если $a \,\square\, x$, $a \sim y$, то $G \simeq HJ$. Если $a \sim x^{-1}$, $a \,\square\, y$, то $G \simeq 2.W_1$. Если $a \,\square\, x$, $a \sim y^{-1}$, то $G \simeq 2.W_1$. Если $a \,\square\, x$, $a \,\square\, y$, то $G = 1$ (здесь возникает случай, описанный в лемме 3).

Лемма 6. *Пусть $\langle a, b\rangle \simeq A_5$ и $\langle c, a, a^b\rangle / Z(\langle c, a, a^b\rangle)$ — группа Фробениуса. Тогда G изоморфна фактор-группе $2.W1$.*

Доказательство. Разберем ряд случаев.

1. Пусть $\langle a, c\rangle \simeq A_4$. Тогда выполнены условия леммы 4 и, учитывая, что $\langle a, b\rangle \simeq A_5$, получаем требуемое.

2. Пусть $\langle a, c\rangle \simeq A_5$. Тогда $\langle a, a^b\rangle \simeq A_4$. Рассмотрим $H = \langle c, a, a^b\rangle$. По лемме 4 H — фактор-группа W_1. В любой нетривиальной фактор-группе W_1 есть подгруппа, изоморфная A_5 [9, теорема 4.2.4]. В $K = H/Z(H)$ по той же теореме есть подгруппа A, изоморфная A_5.

По условию K — группа Фробениуса. Так как $K \leq W_1$, то $|K| = 2^s|A_5|$, где $s \geq 0$. Пользуясь утверждениями о строении групп Фробениуса из [10], получаем, что $A \simeq A_5$ — группа Фробениуса, что не так. Противоречие показывает, что данный случай невозможен.

3. Пусть $\langle a, c\rangle \simeq SL_2(3)$. Аналогично доказывается, что $\langle a^b, c\rangle \simeq SL_2(3)$. Если какой-нибудь $x \in \langle a, c\rangle \cap D$ порождает вместе с b не A_5, то, поменяв ролями x и c, окажемся в ситуации, описанной в леммах 4 и 5. Если $\langle b, x\rangle \simeq A_4$, то среди возможностей в лемме 4 выбираем те, где $\langle a, b\rangle \simeq A_5$, и получаем требуемое. Если $\langle b, x\rangle \simeq SL_2(3)$, то в случае 3 оказываемся в ситуации, описанной в лемме 5.

Таким образом, дальше можно считать, что $\langle x, b\rangle \simeq A_5$ для всех $x \in \langle a, c\rangle \cap D$. В этом случае инволюция t из центра $\langle a, c\rangle$ лежит в центре всей группы. Так как $\langle c, b^a\rangle \simeq \langle c, b^{a^{-1}}\rangle \simeq A_5$, то по лемме 4 группа $\langle a^b, c, b^a\rangle$ изоморфна W или W_1 и $\langle c, a^{b^{-1}}\rangle \simeq SL_2(3)$. Пусть для определенности $a \sim c$, тогда $a^b \sim c^{-1}$ (иначе по лемме 4 $\langle a, a^b, c\rangle$ изоморфно фактору W, что невозможно) и в группе $\langle a^b, c, b^a\rangle$ выполнено $a^b \sim (a^{-1})^{b^{-1}} \sim c$. По лемме 4 $\langle a, a^{b^{-1}}, c\rangle / Z(\langle a, a^{b^{-1}}, c\rangle)$ — группа Фробениуса. Поэтому инволюция t перестановочна с $a^{b^{-1}}$. По условию $\langle a, a^b, c\rangle / Z(\langle a, a^b, c\rangle)$ — группа Фробениуса, следовательно, t перестановочна с a^b. Так как $\langle a, a^b, a^{b^{-1}}\rangle = \langle a, b\rangle$, то t перестановочна с b.

Для $G/\langle t\rangle$ выполнены условия леммы 4, поэтому $G/\langle t\rangle \simeq W_1$. Тогда $G \simeq 2.W_1$.

Лемма 7. *Пусть $\langle a, c\rangle \simeq SL_2(3)$. Тогда G — группа из леммы 2.*

Доказательство. Для определенности будем считать, что $a \sim c$.

Если найдется $x \in D \cap \langle a, c\rangle$ такой, что $\langle x, b\rangle \neq A_5$, то, поменяв ролями x и c, окажемся в ситуации, описанной в леммах 4 и 5. Таким образом, можно считать, что для всех $x \in D \cap \langle a, c\rangle$ выполняется $\langle x, b\rangle \simeq A_5$. По лемме 6 можно полагать, что $\langle a, c, a^{ba}\rangle / Z(\langle a, c, a^{ba}\rangle)$ и $\langle a, c, a^{b^{-1}a^{-1}}\rangle / Z(\langle a, c, a^{b^{-1}a^{-1}}\rangle)$ не группы Фробениуса.

Разберем возможные варианты.

1. Пусть $a^{ba} \sim c^{-1}$. Так как $a \sim (a^{ba})^{-1} \sim c$, то по п. 1 доказательства леммы 4 получаем, что $\langle a, c, a^{ba}\rangle / Z(\langle a, c, a^{ba}\rangle)$ — группа Фробениуса. Мы же исключили такую возможность.

2. Пусть $a^{ba} \sim c$. По п. 2 доказательства леммы 4 $\langle a, a^{ba}, c\rangle \simeq W$. Поэтому $\langle c, b^{ab^{-1}}\rangle \simeq A_5$. Тогда по лемме 2 имеем $G \simeq G_2(4)$.

3. Пусть $a^{ba} \Box c$. По лемме 4 существуют следующие две возможности.

(а) Пусть $c \sim a^{ba^{-1}}$. Положим $b' = b^a$. Тогда $c \sim a^{b'a} = a^{ba^{-1}}$, $a \Box b'$, $G = \langle a, b', c\rangle$, $c \Box b'^{ab'^{-1}}$. Отсюда по лемме 2 получаем, что $G \simeq G_2(4)$.

(б) Пусть $c^a \sim (a^{ba^{-1}})^{-1}$. Тогда $c \sim a^b$. Берем $b' = b^{a^{-1}}$ и аналогично получаем, что $G \simeq G_2(4)$.

Лемма доказана.

Ниже будет доказано, что если $\langle a, b\rangle \simeq \langle a, c\rangle \simeq \langle b, c\rangle \simeq A_5$, то и этот случай сводится к лемме 7.

Таким образом, любые три элемента из D порождают одну из групп леммы 2 либо ее фактор. В дальнейшем в условиях, если не делается специальных оговорок, будем считать, что элементы порождают эти группы именно с теми соотношениями, что в лемме 2, т. е., к примеру, запись $\langle a, b, c\rangle = W$ в условии леммы означает также, что между элементами a, b, c выполняются соотношения $a \Box b$, $a \Box c$, $(bc^{-1})^2 = 1$, $a \sim b^c$.

Лемма 8. *Пусть G — группа, порожденная классом D сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4 или $SL_2(3)$. Если $U(3,3) \le G$, то $G = U(3,3)$.*

Доказательство. Добавим к трем порождающим группы $U(3,3)$ четвертый элемент из D. Ввиду леммы 1 он будет связан с каждым из 28 D-элементов группы $U(3,3)$ одним из двух соотношений. Поочередно добавляя соответствующие соотношения и подсчитывая индекс получившейся группы по $U(3,3)$ с помощью GAP [5], можно убедиться, что он всегда оказывается равным 1.

4. Свойства W-подгрупп

Далее мы считаем, что D — класс сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают Z_3, A_4, $SL_2(3)$, A_5. Рассматриваем $a, b, c, d \in D$ такие, что $\langle a, b, c\rangle = W$, $d \notin \langle a, b, c\rangle$. При этом d порождает вместе с a и b группу, изоморфную W, W_1, $2.W_1$, HJ либо $G_2(4)$ с соотношениями из леммы 2 (заменив в ней c на d). Ниже исследуется группа $G = \langle a, b, c, d\rangle$.

Обозначим $x_1 = a^c$, $x_2 = c^{aca}$, $x_3 = b^c$, $x_4 = c^{bc}$, $x_5 = a^{c^2bc}$, $x_6 = b^{ca}$, $x_7 = b^{ba^2c}$, $x_8 = a^{c^2aba}$, $x_9 = b^{ac^2}$, $x_{10} = b^{abc^2}$, $x_{11} = a^{b^2c}$, $x_{12} = a^{caba}$, $x_{13} = a^{bc}$, $x_{14} = c^a$, $x_{15} = c^{ac}$, $x_{16} = a^{ca}$, $x_{17} = c^{a^2}$, $x_{18} = c^{ab^2}$, $x_{19} = b^{a^2bc^2a}$, $x_{20} = a^{cabcb}$, $x_{21} = c^{ab}$, $x_{22} = a^{c^2b}$, $x_{23} = b^{ac}$, $x_{24} = c^{a^2b}$, $x_{25} = c^{ac^2}$, $x_{26} = b^{cab}$, $x_{27} = b^{caba}$, $x_{28} = b^{caba^2}$, $x_{29} = a^{bac}$, $x_{30} = a^{cab^2}$, $x_{31} = a^{c^2ab}$.

Заметим, что $\langle a, b, c\rangle \cap D = (\langle a, b\rangle \cap D) \cup \{x_1^{\pm 1}, \dots, x_{31}^{\pm 1}\}$.

Лемма 9. *Пусть $\langle a, b, d\rangle = W$. Тогда $d \sim c$ и G — группа из леммы 2.*

Доказательство. Группа $\langle d, b, c \mid (db)^2 = (bc)^2 = 1,\ d \Box c\rangle$ изоморфна 1 или A_5 в зависимости от того, какие соотношения выполнены между d и x_3. Рассматривая эти возможности в группе G, получим $G = 1$.

Если $C \sim d^{-1}$, то $G = \langle a, b, c, d \mid a \Box c,\ (bc^{-1})^2 = 1,\ a \sim b^c,\ a \Box d,\ (bd^{-1})^2 = 1,\ a \sim b^d,\ c \sim d^{-1}\rangle \simeq N$ из леммы 3. Поэтому можно считать, что $d \sim c$. Разберем возможные соотношения между элементом d и D-элементами из $\langle a, b, c\rangle$.

Если $d \Box x_1$, $d \Box x_5$, то $G \simeq 2.W_1$.

Если $d \Box x_1$, $d \sim x_5$, то $G \simeq 1$.

Если $d \Box x_1$, $d \sim x_5{}^{-1}$, то $G \simeq G_2(4)$.

Если $\langle d, x_1\rangle \simeq SL_2(3)$, то $G \simeq HJ$.

Лемма 10. *Пусть $\langle a,b,d\rangle = W_1$. Тогда G — группа из леммы 2 либо $G \simeq W_2 = O_2A_5$ (либо G изоморфна фактору W_2), где $|O_2(W_2)| = 2^{17}$.*

Доказательство. Достаточно рассмотреть всевозможные соотношения между d и x_i, $i = 1,\dots,31$. Используя алгоритм перечисления смежных классов на GAP [5], считаем порядок группы F, порожденной элементами a,b,c,d, в которой выполнены соотношения из условий леммы (назовем их базовыми) и некоторые дополнительные соотношения (ясно, что G является гомоморфным образом группы F). В доказательстве приводятся лишь нетривиальные случаи, когда $F \neq 1$.

Если $c \,\square\, d$, $d \,\square\, x_1$, $d \,\square\, x_3$, то $F \simeq N$ из леммы 3. Тогда $G \simeq 1$.

Если $c \,\square\, d$, $d \,\square\, x_1$, $d \sim x_3$, $d \sim x_2$, $d \,\square\, x_7$, то $|F| = 23040$. В группе F элементы $x = a^d$ и b перестановочны, причем $x \notin \langle b\rangle$. Поэтому данный случай вырождается.

Если $c \,\square\, d$, $d \,\square\, x_1$, $d \sim x_3$, $d \sim x_2$, $d \sim x_7^{-1}$, то $G \simeq G_2(4)$.

Если $c \,\square\, d$, $d \sim x_1^{-1}$, $d \,\square\, x_3$, то $G \simeq G_2(4)$.

Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_7$, $d \,\square\, x_6$, $d \,\square\, x_{14}$, то $G \simeq G_2(4)$.

Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_7$, $d \,\square\, x_6$, $d \sim x_{14}$, $d \,\square\, x_2$, $d \,\square\, x_9$, то $|F : \langle a,b,c,a^d\rangle| = 5346$. Тогда $\langle a,b,c,a^d\rangle \simeq G_2(4)$. Пользуясь известным подстановочным представлением для $3.Suz$ [8] и применяя GAP [5], нетрудно найти подстановки, для которых выполняются нужные соотношения и которые порождают всю группу. Поэтому $F \simeq 3.Suz$. В группе F элементы $x = a^{(d^{-1}c^{-1}bc)^3}$ и a перестановочны, причем $x \notin \langle a\rangle$. Поэтому данный случай вырождается.

Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_7$, $d \,\square\, x_6$, $d \sim x_{14}$, $d \,\square\, x_2$, $d \sim x_9^{-1}$, то $F \simeq 3.Suz$ и данный случай вырождается.

Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_7$, $d \,\square\, x_6$, $d \sim x_{14}$, $d \sim x_2$, то $|F : \langle a,b,c,a^d\rangle| = 405405$. В группе F элементы $x = a^d$ и x_{10} перестановочны и случай вырождается.

Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_7$, $d \,\square\, x_6$, $d \sim x_{14}$, $d \sim x_2^{-1}$, $d \sim x_9$, то $G \simeq W_2$.

Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_7$, $d \sim x_6^{\pm 1}$, то $G \simeq G_2(4)$.

Если $c \sim d$, $d \sim x_7$, то $F \simeq N$ из леммы 3. Тогда $G \simeq 1$.

Если $c \sim d^{-1}$, $d \sim x_7$, $d \,\square\, x_1$, то $G \simeq G_2(4)$.

Если $c \sim d^{-1}$, $d \sim x_7$, $d \sim x_1^{-1}$, то $F \simeq N$ из леммы 3. Тогда $G \simeq 1$.

Лемма 11. *Пусть $b,d,f \in D$, причем $\langle b,d\rangle \simeq \langle d,f\rangle \simeq \langle b,f\rangle \simeq A_5$. Тогда b не может порождать группу, изоморфную A_5 со всеми D-элементами из $\langle d,f\rangle$.*

Доказательство. Предположим противное. Рассмотрим $a = d^{fd}$ и $c = (a^{-1})^{f^{-1}b^{-1}fbf^{-1}}$. Нетрудно понять, что элементы a,b,c,d удовлетворяют условиям леммы 10.

Рассмотрим группу $F = \langle b,d,f \mid b \,\square\, d,\ b \,\square\, f,\ d \,\square\, f,\ b \,\square\, a,\ b \,\square\, d^f,\ b \,\square\, d^{fdf},\ b \,\square\, f^d,\ b \,\square\, f^{df},\ b \,\square\, f^{dfd}\rangle$ и подгруппу $H = \langle a,b,c,d\rangle \leq F$. Используя алгоритм перечисления смежных классов [5], можно проверить, что $|F : H| = 1$.

Для завершения доказательства осталось рассмотреть группы, появляющиеся в лемме 10, и понять, что ситуация, описываемая в данной лемме, в тех группах не имеет места.

Лемма 11 полностью завершает описание групп, порожденных тремя D-элементами. Она будет использоваться дальше, когда мы будем иметь дело с группами HJ и $G_2(4)$.

Лемма 12 (о нарезании). 1. *Пусть $\langle a,b,d\rangle = W_1$ и $y_1 = a^{dabab}$, $y_2 = a^{da^{-1}bd^{-1}}$, $y_3 = a^{dabdab^{-1}}$. Тогда $\langle a,b,y_i\rangle \simeq W$, причем для $c = y_i$ выполнены соотношения из леммы 2, $\langle a,c,y_1\rangle \simeq \langle a,c,y_3\rangle \simeq W$.*

2. *Пусть* $\langle a,b,d\rangle = 2.W_1$ *и* $y_1 = a^{bdab}$, $y_2 = a^{badabd}$, $y_3 = a^{babd^{-1}ab}$. *Тогда* $\langle a,b,y_i\rangle \simeq W$, *причем для* $c = y_i$ *выполнены соотношения из леммы* 2, $\langle a,c,y_2\rangle \simeq \langle a,c,y_3\rangle \simeq W$, $\langle a,b,y_2,y_3\rangle \simeq 2.W_1$.

3. *Пусть* $\langle a,b,d\rangle = HJ$ *и* $y_1 = a^{dbadb}$, $y_2 = a^{babd^{-1}a}$, $y_3 = a^{dbadad}$, $y_4 = a^{badadab}$, $y_5 = a^{babdaba^{-1}}$. *Тогда* $\langle a,b,y_i\rangle \simeq W$, *причем для* $c = y_i$ *выполнены соотношения из леммы* 2.

4. *Пусть* $\langle a,b,d\rangle = G_2(4)$ *и* $y_1 = b^{d^{-1}}$, $y_2 = a^{babd}$, $y_3 = a^{dbabdbd}$, $y_4 = a^{bdabab^{-1}}$, $y_5 = a^{(dbdab)^2}$, $y_6 = a^{badabdbd}$, $y_7 = a^{b^{-1}da^{-1}b^{-1}a}$, $y_8 = a^{dababd^{-1}b}$, $y_9 = a^{daba^{-1}dbd}$, $y_{10} = a^{bdabdb^{-1}a^{-1}}$, $y_{11} = a^{bd^{-1}a^{-1}bdbd}$, $y_{12} = a^{dba^{-1}bd^{-1}ba}$, $y_{13} = a^{dbda^{-1}bda^{-1}}$, $y_{14} = a^{dbda^{-1}bdbd}$, $y_{15} = a^{bdb^{-1}dabadb}$. *Тогда* $\langle a,b,y_i\rangle \simeq W$, *причем для* $c = y_i$ *выполнены соотношения из леммы* 2.

Будем говорить, что группа $\langle a,b,d\rangle$ *нарезается на* W*-кусочки с помощью* y_i.

Элементы y_i из леммы 12 будут использованы в дальнейшем. Из контекста будет ясно, что именно стоит за каждым обозначением. Эти элементы удобно вводить ввиду леммы 9: есть определенность в том, как они связаны с элементом c ($c \sim y_i$), и, как видно из доказательства леммы 9, уточнение этих соотношений несет существенную информацию и позволяет сразу отбросить ряд неблагоприятных случаев.

Лемма 13. *Пусть* $\langle a,b,d\rangle = 2.W_1$. *Тогда* G *— конечная группа, являющаяся расширением* 2*-группы при помощи группы, изоморфной* A_5.

Доказательство аналогично доказательству леммы 10. Однако здесь используются дополнительные соображения, позволяющие сократить перебор. Группа F обозначает то же, что в лемме 10. Пусть $x = y_1$. Из доказательства леммы 9 видно, что существует всего несколько нетривиальных возможностей для группы $\langle a,b,c,x\rangle$. Разберем все такие возможности, добавляя некоторые соотношения между d и x_i, чтобы уточнить строение группы F. Смежные классы удобно перечислять по подгруппе $H = \langle a,b,c,x\rangle \leq F$, строение которой определяется по лемме 9. Ниже приводятся лишь нетривиальные случаи.

1. Пусть $x \sim c$, $x \,\square\, x_1$, $x \,\square\, x_5$. Тогда H изоморфна $2.W_1$ либо ее фактору. Если $c \,\square\, d$, $d \,\square\, x_3$, то $|F:H| = 315$. Тогда $F \simeq HJ$, но в HJ нет подгруппы, изоморфной $2.W1$. Если $c \,\square\, d$, $d \sim x_3^{-1}$, $d \sim x_1^{-1}$, то $|F:H| = 131040$. Тогда $F \simeq G_2(4)$, но в $G_2(4)$ нет подгруппы, изоморфной $2.W1$. Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_3$, $d \,\square\, x_1$, $d \sim x_2^{-1}$, то $|F:H| = 315$. Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_3$, $d \sim x_1^{-1}$, то $|F:H| = 3456$. В этом случае элементы d и $d^{(bx)^3}$ перестановочны, поэтому он вырождается. Если $c \sim d^{-1}$, то $|F:H| = 128$. Тогда G — расширение 2-группы при помощи группы, изоморфной A_5.

2. Пусть $x \sim c$, $x \,\square\, x_1$, $x \sim x_5^{-1}$. Тогда $H \simeq G_2(4)$. Если $c \,\square\, d$, $d \sim x_3^{-1}$, $d \sim x_5^{-1}$, то $|F:H| = 5346$. Тогда $F \simeq 3.Suz$. Как показано в лемме 10, этот случай вырождается. Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_3$, $d \,\square\, x_5$, $d \,\square\, x_1$, $d \,\square\, x_2$, $d \,\square\, x_4$, $d \sim x_6$, то $F \simeq 3.Suz$.

3. Пусть $x \sim c$, $x \sim x_1$. Тогда $H \simeq HJ$.

Если $c \,\square\, d$, $d \,\square\, x_3$, то $|F:H| = 416$. Тогда $F \simeq G_2(4)$, но в $G_2(4)$ нет подгруппы, изоморфной $2.W1$.

Если $c \,\square\, d$, $d \sim x_3^{-1}$, $d \,\square\, x_5$, $d \,\square\, x_1$, то $F \simeq G_2(4)$.

4. Пусть $x \sim c$, $x \sim x_1^{-1}$. Тогда $H \simeq HJ$.

Если $c \,\square\, d$, $d \sim x_3^{-1}$, $d \sim x_5^{-1}$, то $F \simeq G_2(4)$.

Если $c \sim d$, $d \,\square\, x_3$, $d \,\square\, x_1$, $d \,\square\, x_5$, $d \sim x_2$, то $F \simeq G_2(4)$.

Лемма 14. *Пусть* $\langle a,b,d\rangle = G_2(4)$. *Тогда* $G \simeq G_2(4)$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 10. Однако здесь используются дополнительные соображения, которые не только сокращают перебор, но и играют решающую роль в доказательстве. Группа F обозначает то же, что в лемме 10. По лемме 9 к базовым соотношениям из условий леммы можно добавить соотношения $c \sim y_i$, $i = 1,\dots,15$.

В группе $\langle a,b,c\rangle = W$ рассмотрим $x = x_6$. Отметим, что $\langle b,x\rangle \simeq A_5$ и $\langle b,x\rangle \cap D = \{b^{\pm1}, x^{\pm1}, x_{11}^{\pm1}, x_{14}^{\pm1}, x_{18}^{\pm1}, x_{19}^{\pm1}, x_{21}^{\pm1}, x_{26}^{\pm1}, (b^{ab})^{\pm1}, (b^a)^{\pm1}\}$.

В группе $\langle a,b,d\rangle = G_2(4)$ нетрудно проверить, что $\langle d,b^a\rangle \simeq \langle d,b^{ab}\rangle \simeq A_5$.

По лемме 11 найдется z из $\{x_6, x_{11}, x_{14}, x_{18}, x_{19}, x_{21}, x_{26}\}$ такой, что $\langle d,z\rangle \neq A_5$.

Учитывая последнее замечание, достаточно перебирать всевозможные соотношения между d и x_i, $i = 1,\dots,31$, добавлять их к базовому списку соотношений и каждый раз считать индекс $|F : \langle a,b,d\rangle|$, чтобы убедится, что он всегда оказывается равным 1. Полного перебора удастся избежать, если добавлять соотношения постепенно.

Лемма 15. *Пусть* $\langle a,b,d\rangle = HJ$. *Тогда* $G \simeq G_2(4)$ *или* $G \simeq HJ$.

Доказательство. К базовым соотношениям из условий леммы добавляем соотношения $c \sim y_i$, $i = 1,\dots,5$. Заметим, что элементы a, c, x_1, x_1, x_{14}, x_{15}, x_{16}, x_{17}, x_{20}, x_{25} и обратные к ним дают все D-элементы из группы $\langle a,c\rangle$. Далее доказательство аналогично доказательству леммы 14.

Лемма 16. *Пусть G — группа, порожденная классом сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4, A_5 или $SL_2(3)$. Если в группе G есть подгруппа, изоморфная HJ (или $G_2(4) > HJ$), то $G \simeq G_2(4)$ или $G \simeq HJ$.*

Доказательство леммы следует из лемм 12, 14 и 15.

Лемма 17. *Пусть* $\langle a,b,d\rangle = 2.W_1$ *и в группе G выполняются соотношения* $x \sim c$, $x \,\square\, x_1$, $x \,\square\, x_5$, $c \sim d^{-1}$, *где* $x = a^{bdab}$. *Тогда* $Z(\langle a,b,d\rangle) \subseteq Z(G)$.

Доказательство. Отметим, что $Z(\langle y_1,y_2,y_3\rangle) = Z(\langle a,b,d\rangle)$. В группе $\langle y_1,y_2,y_3\rangle$ выполнены следующие соотношения:

$$y_1 \sim y_2 \sim y_3, \quad y_1 \sim y_3, \quad y_2 \sim y_2^{y_3}, \quad y_1 \sim y_3^{y_2}. \tag{1}$$

Пусть $x_1 = (y_1 y_2^{-1})^2$, $x_2 = (y_3 y_2^{-1})^2$, $x_3 = (y_1 y_3^{-1})^2$, $x_4 = (y_1 x^{-1})^2$, где $x = y_3^{y_2}$. Тогда $\langle y_1,y_2,y_3\rangle \simeq P/\langle x_1x_2x_3\rangle$, где P — группа из леммы 2, и $Z(\langle y_1,y_2,y_3\rangle) = \langle x_1,x_2,x_4\rangle$.

Рассмотрим $z_1 = y_1$, $z_2 = y_2$, $z_3 = y_3$, $z_4 = y_1^{y_3}$, $z_5 = y_3^{y_1}$, $z_6 = y_1^{y_2}$, $z_7 = y_2^{y_1}$, $z_8 = y_3^{y_2}$, $z_9 = y_2^{y_3}$, $z_{10} = y_1^{y_3y_2}$, $z_{11} = y_1^{y_2y_3}$, $z_{12} = y_3^{y_1y_2}$, $z_{13} = y_1^{y_3y_2y_1}$, $z_{14} = y_1^{y_3y_2y_3}$, $z_{15} = y_1^{y_3y_2^2}$, $z_{16} = y_1^{y_2y_3y_1}$.

Отметим, что $D \cap \langle y_1,y_2,y_3\rangle = \{z_1,\dots,z_{16}\}$.

Пользуясь алгоритмом перечисления смежных классов, можно убедиться, что в группе G выполнены соотношения $c \sim z_i$, $i = 1,\dots,16$ (если к соотношениям, определяющим группу G, добавлять соотношения, которые в группе не выполняются, то это приводит к вырождению группы, с другой стороны, в силу условий и леммы 1 либо $c \sim z_i$, либо $c \sim z_i^{-1}$, либо $c \,\square\, z_i$).

Пусть теперь $L = \langle c,y_1,y_2,y_3\rangle$ — группа, в которой выполнены соотношения (1) и соотношения $x_1x_2x_3 = 1$ и $c \sim z_i$, $i = 1,\dots,16$. Тогда L — конечная группа порядка 49152, являющаяся расширением 2-группы при помощи группы порядка 3. С помощью GAP [5] для группы L удается найти подстановочное представление и проверить, что c перестановочно с x_1, x_2 и x_4. Стало быть, c перестановочно со всеми элементами из центра группы $\langle a, b, d\rangle$.

Лемма доказана.

5. Частные случаи теоремы

Далее считаем, что G — группа, порожденная классом D сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4, A_5 или $SL_2(3)$, $\langle a, b\rangle \simeq A_5$, где $a, b \in D$, в G нет подгрупп, изоморфных HJ (или $G_2(4) > HJ$).

Лемма 18. *Для любого $c \in D$ выполнено $Z(\langle a, b, c\rangle) \subseteq Z(G)$.*

Доказательство. Пусть $z \in Z(\langle a, b, c\rangle)$ и $d \in D\backslash\langle a, b, c\rangle$. В силу леммы 2 группы $\langle a, b, c\rangle$ и $\langle a, b, d\rangle$ изоморфны группе $2.W_1$ (либо ее фактору). Согласно лемме 12 нарезаем $\langle a, b, d\rangle$ на W-кусочки с помощью y_i, $i = 1, 2, 3$. Из доказательства леммы 13 видно, что элементы a, b, c, y_i удовлетворяют условиям леммы 15 для $i = 1, 2, 3$. Поэтому z перестановочен с y_i. Так как $\langle a, b, y_1, y_2, y_3\rangle = \langle a, b, d\rangle$, то z перестановочен с d.

Рассмотрим $H = \langle Z(\langle a, b, c\rangle) \mid c \in D\rangle$. По лемме 18 H содержится в центре группы G и, как видно из доказательств соответствующих лемм, является элементарной абелевой 2-группой. Далее будем рассматривать $\overline{G} = G/H$. Тогда любые три D-элемента порождают группу $\overline{2.W_1}$ порядка 15360, являющуюся расширением 2-группы при помощи A_5, либо ее гомоморфный образ.

Лемма 19. *Пусть c, d — D-элементы из $\overline{G}$. Тогда d нормализует $O_2(\langle a, b, c\rangle)$. Кроме того, $[O_2(\langle a, b, c\rangle), O_2(\langle a, b, d\rangle)] = 1$ и $\langle O_2(\langle a, b, c\rangle), O_2(\langle a, b, d\rangle)\rangle = O_2(\langle a, b, c, d\rangle)$ — элементарная абелева 2-группа.*

Доказательство. Пусть сначала $\langle a, b, d\rangle \simeq \overline{2.W_1}$ и $\langle a, b, c\rangle \simeq \overline{W}$. Для группы $\langle a, b, c, d\rangle$ имеется подстановочное представление на 40 элементах (которое можно извлечь из доказательства леммы 13, где использовался алгоритм перечисления смежных классов):

$$a = (1, 9, 13)(2, 12, 14)(3, 10, 15)(4, 11, 16)(25, 33, 30)(26, 34, 29)(27, 35, 32)(28, 36, 31),$$

$$b = (5, 17, 12)(6, 18, 9)(7, 19, 11)(8, 20, 10)(21, 30, 38)(22, 32, 40)(23, 31, 39)(24, 29, 37),$$

$$c = (5, 17, 15)(6, 18, 16)(7, 19, 13)(8, 20, 14)(21, 28, 38)(22, 26, 40)(23, 25, 39)(24, 27, 37),$$

$$d := (9, 21, 14)(10, 22, 16)(11, 23, 15)(12, 24, 13)(17, 25, 29)(18, 26, 30)(19, 27, 31)(20, 28, 32).$$

То, что d нормализует $O_2(\langle a, b, c\rangle)$, проверяется непосредственно: $O_2(\langle a, b, c\rangle) = \langle (yx^{-1})^2 \mid x \sim y,\ x, y \in D \cap \langle a, b, c\rangle\rangle$; $[O_2(\langle a, b, y_i\rangle), O_2(\langle a, b, y_j\rangle)] = 1$ для $i, j \in \{1, 2, 3\}$;

$$\langle O_2(\langle a, b, y_1\rangle), O_2(\langle a, b, y_2\rangle), O_2(\langle a, b, y_3\rangle)\rangle = O_2(\langle a, b, d\rangle)$$

— элементарная абелева 2-группа.

Таким образом, в этом случае заключение леммы верно.

По лемме 12 нарезаем $\langle a,b,c\rangle$ на $\overline{W}$-кусочки с помощью y_i, $i=1,2,3$, а $\langle a,b,d\rangle$ — с помощью y_i', $i=1,2,3$. По доказанному заключение леммы справедливо, если в качестве c и d брать элементы из множества $\{y_i, y_i' \mid i=1,2,3\}$.

Элементы y_j' нормализуют $O_2(\langle a,b,y_i\rangle)$ для всех $i,j\in\{1,2,3\}$. Так как $O_2(\langle a,b,c\rangle)=\langle O_2(\langle a,b,y_i\rangle)\mid i=1,2,3\rangle$, то y_j' нормализуют $O_2(\langle a,b,c\rangle)$. Кроме того, $d\in\langle a,b,y_1',y_2',y_3'\rangle$, стало быть, d нормализует $O_2(\langle a,b,c\rangle)$.

Лемма 20. *Пусть* $\langle a,b,d\rangle=\overline{2.W_1}$. *Тогда* $b^{ab}d\in O_2(\langle a,b,d\rangle)$.

Доказательство получается из рассмотрения подстановочного представления для группы $\overline{2.W_1}$.

Лемма 21. *Пусть G — группа, порожденная классом D сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4, A_5 или $SL_2(3)$. Предположим, что найдутся два элемента $a,b\in D$, которые порождают группу, изоморфную A_5. Тогда либо G изоморфна HJ или $G_2(4)$, либо G — расширение локально конечной 2-группы при помощи группы, изоморфной A_5. При этом группа G локально конечна.*

Доказательство. По лемме 16 можно считать, что в G нет подгрупп, изоморфных HJ (или $G_2(4)>HJ$).

Пусть, как и ранее, $H=\langle Z(\langle a,b,c\rangle)\mid c\in D\rangle$, а $\varphi: G\longrightarrow \overline{G}=G/H$ — канонический гомоморфизм. По лемме 19 $\overline{N}=\langle O_2(\langle a,b,c\rangle)\mid c\in\overline{D}\rangle\trianglelefteq\overline{G}$. Обозначим через N прообраз $\overline{N}$ в G. Тогда $N{=}O_2(G)$ — нормальная подгруппа периода 4.

По лемме 20 для всех $x\in\overline{G}$ выполняется $x\in\langle a,b\rangle \bmod \overline{N}$. Поэтому $\overline{G}$ — расширение элементарной абелевой 2-группы $\overline{N}$ при помощи группы, изоморфной A_5.

По теореме о гомоморфизмах [9, теорема 4.2.3] $\overline{G}/\overline{N}\simeq G/N\simeq A_5$, и первая часть леммы доказана.

По теореме Шмидта [9, теорема 23.1.1] для доказательства локальной конечности группы G достаточно доказать локальную конечность N.

Так как H и $N/H=\overline{N}$ абелевы, то N нильпотентна ступени 2. Поэтому локальная конечность группы N следует из того факта, что периодическая конечно-порожденная нильпотентная группа конечна.

Лемма 22. *Пусть G — группа, порожденная классом D сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4 или $SL_2(3)$. Тогда либо G изоморфна $U(3,3)$, либо G — расширение 2-группы при помощи группы порядка 3. При этом группа G локально конечна.*

Доказательство. По лемме 8 можно считать, что в G нет подгрупп, изоморфных $U(3,3)$. Тогда любые три D-элемента a,b и c порождают группу, изоморфную P из леммы 2. При этом $(a^{-1}b)^2\in Z(\langle a,b,c\rangle)$. Тогда $K=\langle (a^{-1}b)^2 \mid a,b\in G, a\sim b\rangle$ содержится в центре G. Рассмотрим $\overline{G}=G/K$. В $\overline{G}$ любые две D-группы порождают группу, изоморфную A_4.

Если c — произвольный D-элемент из $\overline{G}$, не лежащий в $\langle a,b\rangle$, то $\langle a,b,c\rangle$ — группа порядка 48 и $a^{-1}y$, $a^{-1}c$, $b^{-1}c$, $a^{-1}b^{-1}ac$ — инволюции, порождающие элементарную абелеву 2-группу порядка 16 и индекса 3 в $\langle a,b,c\rangle$, при этом $O_2(\langle a,b\rangle)\lhd\langle a,b,c\rangle$. Тогда $O_2(\langle a,b\rangle)\lhd\overline{G}$ и $\overline{N}=\langle O_2(\langle a,b\rangle)\mid a,b\in G, x\sim y\rangle\lhd\overline{G}$.

Так как $[O_2(\langle a,b\rangle),O_2(\langle c,d\rangle)]=1$ (проверяется перестановочность порождающих элементов), то $\overline{N}$ — элементарная абелева 2-группа. Покажем, что индекс $\overline{N}$ в $\overline{G}$ равен 3. Пусть $x\overline{N}$, где $x\in\overline{G}$ — некоторый смежный класс $\overline{G}$ по $\overline{N}$. Тогда $x=x_1^{\varepsilon_1}\cdot\ldots\cdot x_n^{\varepsilon_n}$ для некоторых D-элементов $x_i\in\overline{G}$ и $\varepsilon_i=\pm1$. Возможны случаи

а) $x\overline{N}=\ldots x_{n-1}x_n\overline{N}=\ldots x_{n-1}^{-1}\bigl(x_{n-1}^{-1}x_n\bigr)\overline{N}=\ldots x_{n-1}^{-1}\overline{N}$,

б) $x\overline{N}=\ldots x_{n-1}x_n^{-1}\overline{N}=\ldots x_{n-3}^{\varepsilon_{n-3}}x_{n-2}^{\varepsilon_{n-2}}\overline{N}$,

в) $x\overline{N}=\ldots x_{n-1}^{-1}x_n\overline{N}=\ldots x_{n-3}^{\varepsilon_{n-3}}x_{n-2}^{\varepsilon_{n-2}}\overline{N}$,

г) $x\overline{N}=\ldots x_{n-1}^{-1}x_n^{-1}\overline{N}=\ldots x_{n-1}\bigl(x_{n-1}x_n^{-1}\bigr)\overline{N}=\ldots x_{n-1}\overline{N}$.

Применив индукцию по n, получим, что $x\overline{N}=a\overline{N}$, где a — это либо единица, либо элемент порядка 3 (D-элемент или обратный к нему). Следовательно, если $\bar{x}\overline{N}$ и $\bar{y}\overline{N}$ — два различных смежных класса, то можно считать, что $\bar{x}$ и $\bar{y}$ — элементы порядка 3. Тогда либо $\bar{x}\sim\bar{y}$ и, следовательно, $\bar{x}^{-1}\bar{y}$ — инволюция из $\overline{N}$ и $\bar{x}\overline{N}=\bar{y}\overline{N}$, что противоречит выбору смежных классов; либо $\bar{x}\sim\bar{y}^{-1}$ и $\bar{x}\overline{N}=\bar{y}^{-1}\overline{N}$. Таким образом, имеется всего три различных смежных класса: $\overline{N}$, $a\overline{N}$, $a^{-1}\overline{N}$, где a — некоторый D-элемент. Итак, $|\overline{G}:\overline{N}|=3$.

Продолжить доказательство можно так же, как в лемме 19.

6. Лемма об $SL_2(5)$-подгруппах

Лемма 23. *Пусть G — группа, порожденная тремя элементами a,b,c из класса D сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4, A_5, $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$. Если $\langle a,b\rangle\simeq SL_2(5)$, то $Z(\langle a,b\rangle)\subseteq Z(G)$ и в $G/Z(\langle a,b\rangle)$ любые два D-элемента порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4, A_5 или $SL_2(3)$.*

Доказательство. По лемме 1 для любых двух D-элементов x и y выполнено одно из трех соотношений: $x\sim y$, $x\sim y^{-1}$ или $x\vartriangle y$.

Пусть $x_1=a^b$, $x_2=b^a$, $x_3=a^{ba}$, $x_4=a^{ba^2}$, $x_5=a^{b^2a}$, $x_6=a^{b^2a^2}$, $x_7=a^{bab}$, $x_8=a^{b^2}$.

Разберем ряд возможных случаев соотношений между элементами. В каждом из этих случаев, пользуясь алгоритмом перечисления смежных классов [5], будем считать порядок группы F, порожденной элементами a,b и c с соотношением $a\vartriangle b$, к которому добавлены соответствующие соотношения. Ясно, что группа G является гомоморфным образом F.

1. Пусть $a\vartriangle c$, $(bc)^2=1$. Пусть $x=b^c$. Если $a\sim x$ или $a\sim x^{-1}$, то $G\simeq W$. Поэтому можно считать, что $a\vartriangle x$.

Если $c\sim x_1$ или $c\sim x_1^{-1}$, то $F=1$. Поэтому можно считать, что $c\vartriangle x_1$. Если $c\vartriangle x_2$ или $c\sim x_2^{-1}$, или $c\sim x_2$, $c\vartriangle x_3$, или $c\sim x_2$, $c\sim x_3^{-1}$, то $|F:\langle a,b\rangle|=1$. Если $c\sim x_2$, $c\sim x_3$, то $|F|=122880$. В этом случае непосредственно проверяется, что $Z(\langle a,b\rangle)=Z(\langle a,c\rangle)=Z(\langle a,x\rangle)\subseteq Z(\langle a,b,c\rangle)$.

2. Пусть $a\sim c\sim b$. Пусть $x=b^c,y=c^b$. Разберем всевозможные связи a с x и y.

(а) Пусть $a\vartriangle x,a\vartriangle y$. В группе $2.U(4,2)$, используя известное подстановочное представление, можно найти сопряженные элементы a,b,c (в виде подстановок), для которых выполняются все перечисленные соотношения. В такой группе элементы $n_1=a^{(b^2c)^2}$ и $n_2=a^{b^2acab^2}$ перестановочны с a. Если к списку соотношений добавить $a=n_1$ или $a=n_1^{-1}$, то $|F:\langle a,b\rangle|=1$. Следовательно, этот случай вырожден.

(b) Пусть $a \vartriangle x$, $a \sim y$. Тогда $|F| = 1209600$ и $G \simeq 2.HJ$. В группе $2.HJ$, используя известное подстановочное представление [8], можно найти сопряженные элементы a, b, c (в виде подстановок), для которых выполняются все перечисленные соотношения. Тогда нетрудно проверить, что $Z(\langle a, b\rangle) = Z(\langle a, x\rangle) \subseteq Z(\langle a, b, c\rangle)$.

(c) Пусть $a \vartriangle x$, $a \sim y^{-1}$. Тогда $|F : \langle a, b, a^{bcab}\rangle| = 128$. Для того чтобы понять устройство группы G, необходимо дополнительно уточнить, что порождают a и $z = a^{b^{-1}c}$.

Если $a \vartriangle z$ или $a \sim z$, то $|F : \langle a, b\rangle| = 1$.

Если $a \sim z^{-1}$, то $|F : \langle a, b, a^{bcab}\rangle| = 64$ и $|F| = 245760$. Перечисляя смежные классы по подгруппе $\langle a, c\rangle$, можно получить точное подстановочное представление и проверить, что $Z(\langle a, b\rangle) = Z(\langle a, x\rangle) \subseteq Z(\langle a, b, c\rangle)$.

(d) Пусть $a \sim x$, $a \vartriangle y$. Тогда $G \simeq 2.HJ$, как в случае (b).

(e) Пусть $a \sim x^{-1}$, $a \vartriangle y$. Тогда $|F : \langle a, b, a^{bcab}\rangle| = 128$ и этот случай аналогичен (c).

Остальные случаи вырожденны.

3. Пусть $a \sim c, b \vartriangle c$.

Если найдется $x \in \langle a, c\rangle \cap D$ такой, что $x \sim b$ или $x \sim b^{-1}$, то, поменяв x и c ролями, окажемся в случае, описанном выше. Поэтому можно считать, что $b \vartriangle x$ для всех $x \in \langle a, c\rangle \cap D$.

Так как $\{a, x_1, x_3, x_4\} \subseteq \langle a, x_1\rangle \cap D$, $\{a, x_5, x_6, x_8\} \subseteq \langle a, x_8\rangle \cap D$ и $\langle a, x_1\rangle \simeq \langle a, x_8\rangle \simeq SL_2(3)$, то согласно 2(a) c должен порождать $SL_2(3)$ с одним элементом из $\{x_1, x_3, x_4\}$ и с одним элементом из $\{x_5, x_6, x_8\}$. Разберем возможные случаи.

(a) Пусть $c \sim x_1$. Если $x \sim x_8$, то $|F : \langle c, b, b^a\rangle| = 4095$ и $G \simeq 2.G_2(4)$. В этой группе заключение леммы проверяется непосредственно. Если $c \sim x \in \left\{x_5^{\pm 1}, x_6^{\pm 1}, x_8^{-1}\right\}$, то $|F : \langle a, c, x_1\rangle| = 1$ и группа $\langle a, c, x_1\rangle$ удовлетворяет условиям уже разобранного случая.

(b) Пусть $c \sim x_1^{-1}$. Если $c \sim x \in \{x_5, x_6, x_8\}$, то $|F : \langle a, c, x_1\rangle| = 1$ и группа $\langle a, c, x_1\rangle$ удовлетворяет условиям уже разобранного случая. Если $c \sim x_5^{-1}$, то $|F : \langle a, b, b^a\rangle| = 128$. Данный случай аналогичен случаю 2(c). Для того чтобы понять устройство группы G, необходимо дополнительно уточнить, что порождают c и x_4. Если $c \sim x_4^{-1}$, то $|F| = 245760$ и получается группа G, как в случае 2(c), для которой заключение леммы проверяется так же, как и раньше. В остальных двух случаях $|F : \langle a, c, x_1\rangle| = 1$ и группа $\langle a, c, x_1\rangle$ удовлетворяет условиям уже разобранного случая.

Пусть $c \sim x_6^{-1}$. Данный случай аналогичен предыдущему. Достаточно уточнить, что порождают c и x_3. Пусть $c \sim x_8^{-1}$. Данный случай аналогичен предыдущему. Достаточно уточнить, что порождают c и x_3, а также c и x_4.

Если c порождает $SL_2(3)$ с $x_3 = a^{ba}$, то c заменяем на c^a. Если c порождает $SL_2(3)$ с $x_4 = a^{ba^2}$, то c заменяем на $c^{a^{-1}}$. Таким образом, оставшиеся случаи сводятся к разобранным.

Лемма доказана.

7. Доказательство теоремы

Пусть D — класс сопряженных элементов порядка 3, любые два из которых порождают подгруппу, изоморфную Z_3, A_4, A_5, $SL_2(3)$ или $SL_2(5)$, и $G = \langle D\rangle$. Покажем, что справедливо заключение теоремы.

Если в D не найдется двух элементов, порождающих $SL_2(5)$, то заключение теоремы следует из лемм 21 и 22. Пусть теперь $a, b \in D$ такие, что $\langle a, b\rangle \simeq$

$SL_2(5)$.

Пусть $Z := \langle (xy)^5 \mid x, y \in D, \langle x, y\rangle \simeq SL_2(5)\rangle$. По лемме 1 и лемме 23 $Z \subseteq Z(G)$.

Группа $\overline{G} = G/Z$ удовлетворяет условиям леммы 21. Пусть $\overline{G}$ — это группа HJ или $G_2(4)$. Мультипликатор Шура групп HJ и $G_2(4)$ равен 2 [11]. Поэтому $G \simeq 2.G_2(4)$ или $G \simeq 2.HJ$. Таким образом, далее можно считать, что $\overline{G}$ — расширение 2-группы при помощи группы, изоморфной A_5.

Обратимся к доказательству леммы 21. Пусть $\varphi : G \longrightarrow \overline{G}$ — канонический гомоморфизм. Как доказывалось в лемме 21, $\overline{H} = \langle Z(\langle a, b, c\rangle) \mid c \in \overline{D}\rangle \subseteq Z(\overline{G})$. Пусть $\overline{\varphi} : \overline{G} \longrightarrow \overline{\overline{G}} = \overline{G}/\overline{H}$ — канонический гомоморфизм. В лемме 21 доказывалось также, что $\overline{\overline{N}} = \langle O_2(\langle a, b, c\rangle) \mid c \in \overline{\overline{D}}\rangle \trianglelefteq \overline{\overline{G}}$. Обозначим через $\overline{N}$ — прообраз $\overline{\overline{N}}$ в $\overline{G}$, а через N — прообраз $\overline{N}$ в G. Нетрудно проверить, что N — периодическая 2-группа периода 8. Тогда $1 \trianglelefteq Z \trianglelefteq H \trianglelefteq N$, где H — прообраз $\overline{H}$ в G — центральный ряд, доказывающий нильпотентность группы N.

Закончить доказательство теоремы теперь можно, как в лемме 21.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Aschbacher M., Hall M.* Groups generated by a class of elements of order 3 // J. Algebra. 1973. V. 24, N 3. P. 591–612.
2. *Stellmacher B.* Einfache Gruppen, die von einer Konjugiertenklasse von Elementen der Ordnung drei erzeugt werden // J. Algebra. 1974. V. 30, N 1–3. P. 320–354.
3. *Ho C.* On the quadratic pairs // J. Algebra. 1976. V. 43, N 1. P. 338–358.
4. *Мазуров В. Д.* Характеризация знакопеременных групп // Алгебра и логика. 2005. Т. 44, № 1. С. 54–69.
5. *Schönert M. et al.* Groups, algorithms and programming // Lehrstuhl D für Mathematik, RWTH. Aachen, 1994. (http://www.gap-system.org/).
6. *Zassenhaus H.* Kennzeichnung endlicher linearen Gruppen als Permutationsgruppen // Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg. 1936. V. 11. P. 17–40.
7. *Mazurov V.* A new proof of Zassenhaus theorem on finite groups of fixed-point-free automorphisms // J. Algebra. 2003. V. 263, N 1. P. 1–7.
8. *Wilson R. et al.* Atlas of finite group representations. http://web.mat.bham.ac.uk/atlas/v2.0/.
9. *Каргаполов М. И., Мерзляков Ю. И.* Основы теории групп. М.: Наука, 1982.
10. *Бусаркин В. М., Горчаков Ю. М.* Конечные расщепляемые группы. М.: Наука, 1968.
11. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1995.

Статья поступила 14 июля 2005 г.

Максименко Александр Алексеевич, Мамонтов Андрей Сергеевич
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
amaximenko@ngs.ru, andreysmamontov@yahoo.com