Сибирский математический журнал
Июль—август, 2007. Том 48, № 4

УДК 517.95

ЗАДАЧИ НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА С ДВУМЯ СИНГУЛЯРНЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

М. С. Салахитдинов, А. К. Уринов

Аннотация: Найдены собственные значения и собственные функции двух нелокальных задач для уравнения смешанного типа с сингулярными коэффициентами при младших членах.

Ключевые слова: смешанный тип, сингулярный коэффициент, фундаментальное решение, задача Коши — Гурса, гипергеометрическая функция, оператор дробного порядка.

Пусть Ω — конечная односвязная область, ограниченная при $y > 0$ линией $\sigma_0 = \{(x,y) : x^2 + y^2 = 1, x > 0\}$ и отрезком $OA = \{(x,y) : x = 0, 0 < y < 1\}$, а при $y < 0$ — характеристиками OC: $x + y = 0$, BC: $x - y = 1$ уравнения

$$u_{xx} + \operatorname{sign} y u_{yy} + \frac{2\alpha}{x} u_x + \frac{2\beta}{|y|} u_y + \lambda u = 0, \tag{1}$$

где $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, а λ — числовой параметр, причем $0 < 2\alpha < 1$, $0 < 2\beta < 1$, $\alpha < \beta$.

Введем обозначения:

$$\Omega_1 = \Omega \cap (y < 0), \quad \Omega_2 = \Omega \cap (y > 0), \quad OB = \Omega \cap (y = 0);$$

$$A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}[g(x)] \equiv g(x) - \int_0^x g(t) \frac{t}{x} \frac{\partial}{\partial t} J_0[\sqrt{\lambda x(x-t)}]\, dt;$$

$$F_{0x} \begin{bmatrix} a, & b \\ c, & x^k \end{bmatrix} g(x) \equiv \frac{1}{\Gamma(c)} \int_0^x g(t)(x^k - t^k)^{c-1} F\left(a, b, c; \frac{x^k - t^k}{x^k}\right) k t^{k-1}\, dt,$$

здесь $a, b, c \in \mathbb{R}$, $k \in \mathbb{N}$; $\Gamma(z)$ — гамма-функция Эйлера, $J_m(z)$ — функция Бесселя первого рода порядка m, $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса.

Отметим, что $A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}$ и F_{0x} — операторы, введенные в [1] и [2] соответственно.

Нахождению собственных значений и собственных функций краевых задач для различных уравнений смешанного типа посвящено много исследований, среди которых следует отметить работы Е. И. Моисеева, С. М. Пономарева, Т. Ш. Кальменова и др. (см., например, [3–9]). В данной работе найдены собственные значения и соответствующие им собственные функции двух нелокальных задач для уравнения (1) в области Ω. Ранее аналогичные задачи для уравнения Лаврентьева — Бицадзе и для уравнения смешанного типа с одним сингулярным коэффициентом изучены в [10, 11].

Ниже под *регулярным в области* Ω_1 решением уравнения (1) понимается функция $u(x,y)$, обладающая свойствами

$$u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_1)\cap C^2(\Omega_1),\quad (-y)^{2\beta}u_y\in C(\Omega_1\cup OB),$$
$$u(x,0)\in C[0,1]\cap C^2(0,1),\quad \lim_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y\in C^2(0,1)$$

и удовлетворяющая уравнению (1) в области Ω_1, причем здесь $\lim\limits_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x\to 0$ и $x\to 1$.

Если $u(x,y)$ — регулярное в области Ω_1 решение уравнения (1), то оно представимо в виде [12]

$$u(x,y)=\gamma_1\int\limits_{-1}^{1}\tau(x-ty)(1-t^2)^{\beta-1}\left(1-\frac{y}{x}t\right)^{\alpha}Q_1(x,y,t)\,dt$$
$$-\gamma_2(-y)^{1-2\beta}\int\limits_{-1}^{1}\nu(x-ty)(1-t^2)^{-\beta}\left(1-\frac{y}{x}t\right)^{\alpha}Q_2(x,y,t)\,dt,\quad (2)$$

где $\gamma_1=\Gamma(\beta+1/2)/[\sqrt{\pi}\Gamma(\beta)]$, $\gamma_2=\Gamma(1/2-\beta)/[2\sqrt{\pi}\Gamma(1-\beta)]$; $Q_1=\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\beta;\sigma_1,\sigma_2)$, $Q_2=\Xi_2(\alpha,1-\alpha,1-\beta;\sigma_1,\sigma_2)$; $\sigma_1=y^2(t^2-1)/[4x(x-ty)]$, $\sigma_2=-\lambda y^2(t^2-1)/4$; $\Xi_2(a,b,c;x,y)$ — гипергеометрическая функция Гумберта [13].

Далее под *регулярным в области* Ω_2 решением уравнения (1) понимается функция $u(x,y)$, обладающая свойствами

$$u(x,y)\in C(\overline{\Omega}_2)\cap C^1(\Omega_2\cup\sigma_0)\cap C^2(\Omega_2),\quad y^{2\beta}u_y\in C(\Omega_2\cup OB)$$

и удовлетворяющая уравнению (1) в области Ω_2, а под *регулярным в области* Ω решением уравнения (1) подразумевается функция $u(x,y)$, которая является регулярным в областях Ω_1 и Ω_2 решением уравнения (1) и удовлетворяет условиям

$$u(x,-0)=u(x,+0),\ 0\le x\le 1;\quad \lim_{y\to -0}(-y)^{2\beta}u_y=\lim_{y\to +0}y^{2\beta}u_y,\ 0<x<1.$$

Задача A_λ^0. *Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные регулярные в области Ω решения уравнения* (1), *удовлетворяющие условиям*

$$\alpha_0u(x,y)+\beta_0\frac{\partial u(x,y)}{\partial n}=0,\quad (x,y)\in\sigma_0,\quad (3)$$

$$u(0,y)=0,\quad 0\le y\le 1,\quad (4)$$

$$x^{1-\alpha-\beta}A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}\left\{x\frac{d}{dx^2}(x^2)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}F_{0x}\begin{bmatrix}\frac{1+\alpha-\beta}{2}, & \frac{\alpha-\beta}{2}\\ 1-\beta, & x^2\end{bmatrix}(x^2)^{\alpha+\beta-1}u(\theta_0)\right\}$$
$$+\gamma_0u(x,0)=0,\quad 0\le x\le 1,\quad (5)$$

где $\alpha_0,\beta_0,\gamma_0\in\mathbb{R}$, *причем* $\alpha_0^2+\beta_0^2\ne 0$, n — *внешняя нормаль к* σ_0, θ_0 — *точка пересечения характеристики OC с характеристикой, выходящей из точки* $(x,0)\in OB$, *т. е.* $\theta_0=\left(\frac{x}{2},-\frac{x}{2}\right)$.

Прежде чем перейти к исследованию задачи A_λ^0, рассмотрим задачу Коши — Гурса для уравнения (1) в области Ω_1 и некоторые свойства, которые следуют из представления решения этой задачи.

Задача Коши — Гурса. *Найти регулярное в области* Ω_1 *решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y=\nu(x),\ 0<x<1;\quad u(x,-x)=\varphi(2x),\ 0\le x\le 1/2,$$

где $\nu(x)$ *и* $\varphi(x)$ — *заданные функции, причем* $\nu(x)$ *принадлежит* $C^2(0,1)$ *и может иметь особенность порядка меньше* $1-2\beta$ *при* $x\to 0$ *и* $x\to 1$, $\varphi(x)\in C^1[0,1]\cap C^{(2,\delta)}(0,1)$, $\delta>0$.

Пользуясь результатами работ [12, 14], нетрудно убедиться, что решение этой задачи существует, единственно и представимо в виде

$$u(x,y)=\bar\chi 2^{2\beta-1}\int\limits_0^{x+y}\nu(t)\big(r_0^2\big)^{-\beta}(t/x)^{\alpha}\Xi_2(\alpha,1-\alpha,1-\beta;r_1,r_2)\,dt$$
$$+\int\limits_0^{x+y}\Phi_0(t)\overline{H}(x,y;t/2,-t/2)\,dt+\int\limits_{x+y}^{x-y}\Phi_0(t)R(x,y;t/2,-t/2)\,dt,\qquad(6)$$

Здесь $\Phi_0(t)=\varphi'(t)+(\alpha+\beta)t^{-1}\varphi(t)$, $\bar\chi=\Gamma(\beta)/[\Gamma(1-\beta)\Gamma(2\beta)]$; $r_0^2=(x-t)^2-y^2$, $r_1=-r_0^2/(4xt)$, $r_2=-\lambda r_0^2/4$; $\overline{H}(x,y;x_0,y_0)$ и $R(x,y;x_0,y_0)$ — функция Грина — Адамара и Римана уравнения (1) соответственно [12],

$$\overline{H}(x,y;x_0,y_0)=\bar\chi(x_0/x)^{\alpha}(-y_0)^{2\beta}\big(4/R_0^2\big)^{\beta}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(1-\beta)_n n!}\left(-\frac{\lambda R_0^2}{4}\right)^n H_2(\beta-n,\beta,\alpha,1-\alpha,2\beta;R_1,R_2),$$

$$R(x,y;x_0,y_0)=(x_0/x)^{\alpha}(y_0/y)^{\beta}$$
$$\times\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{(n!)^2}\left(-\frac{\lambda R_0^2}{4}\right)^n F_3(\beta,\alpha,1-\beta,1-\alpha,1+n;1/R_1,-R_2);$$

$$R_0^2=(x-x_0)^2-(y-y_0)^2,\quad R_1=4yy_0/R_0^2,\quad R_2=R_0^2/(4xx_0);$$

$$\Xi_2(a,b,c;x,y)=\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_m}{(c)_{m+k}m!k!}x^my^k,$$

$$H_2(a,b,c,d,e;x,y)=\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{(a)_{m-k}(b)_m(c)_k(d)_k}{(e)_m m!k!}x^my^k,$$

$$F_3(a,b,c,d,e;x,y)=\sum_{m,k=0}^{\infty}\frac{(a)_m(b)_k(c)_m(d)_k}{(e)_{m+k}m!k!}x^my^k,$$

$$(a)_m=a(a+1)(a+2)\dots(a+m-1)=\Gamma(a+m)/\Gamma(a).$$

Лемма 1. *Если* $u(x,y)$ — *регулярное в области* Ω_1 *решение уравнения* (1), *обладающее тем свойством, что* $u(x,-x)\in C^1[0,1/2]\cap C^{(2,\delta)}(0,1/2)$, $\delta>0$ *и* $u(x,0)=\tau(x)$, $\lim\limits_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y=\nu(x)$, *то имеет место равенство*

$$\tau(x)=\bar\chi 2^{\beta-\alpha}\Gamma(1-\beta)$$
$$\times x^{1-\alpha-\beta}A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}\left\{x\frac{d}{dx^2}(x^2)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}F_{0x}\begin{bmatrix}\frac{1+\alpha-\beta}{2}, & \frac{\alpha-\beta}{2}\\ 1-\beta, & x^2\end{bmatrix}(x^2)^{\alpha+\beta-1}u(\theta_0)\right\}$$
$$+\bar\chi 2^{2\beta-1}\int\limits_0^x\nu(t)(x-t)^{-2\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha}\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,1-\beta;-\frac{(x-t)^2}{4xt},-\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right)dt.\qquad(7)$$

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — регулярное в области Ω_1 решение уравнения (1) и $\lim\limits_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y = \nu(x)$, $u(x,-x) = \varphi(2x) \in C^1[0,1/2] \cap C^{(2,\delta)}(0,1/2)$, $\delta > 0$. Тогда справедлива формула (6). Отсюда, пользуясь разложениями функций H_2 и Ξ_2 [12, 14]:

$$\Xi_2(a,b,c;x,y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{y^k}{(c)_k k!} F(a,b,c+k;x),$$

$$H_2(a,b,c,d,e;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m(b)_m}{(e)_m m!} x^m F(c,d,1-a-m;-y),$$

и введя обозначения $\Phi_1(t) = \frac{d}{dt}[t^{\alpha+\beta}\varphi(t)]$, при $y \to 0$ имеем

$$\begin{aligned}\tau(x) = \bar{\chi}2^{\beta-1}\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^{\alpha} \\ \times \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right) dt + \bar{\chi}2^{-\alpha}x^{-\alpha-\beta} \\ \times \int_0^x \Phi_1(t)(x-t)^{-\beta}t^{\beta}\Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; \frac{t-x}{2t}, \frac{\lambda}{4}(t-x)\right) dt. \quad (8)\end{aligned}$$

Обозначая через $\Phi_2(x)$ второй интеграл в правой части равенства (8) и принимая во внимание формулу [14]

$$\Xi_2(a,b,c;x,y) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(a)_m(b)_m}{(c)_m m!} x^m \overline{J}_{c+m-1}(2i\sqrt{y}),$$

где $\overline{J}_m(z) = \Gamma(m+1)(z/2)^{-m}J_m(z)$ — функция Бесселя — Клиффорда, имеем

$$\Phi_2(x) = \int_0^x \Phi_1(t) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(\alpha)_m(1-\alpha)_m}{(1-\beta)_m m!}\left(-\frac{1}{2}\right)^m t^{\beta-m}(x-t)^{m-\beta}\overline{J}_{m-\beta}[\sqrt{\lambda x(x-t)}]\, dt.$$

Отсюда, используя легко проверяемое тождество

$$(x-t)^{m-\beta}\overline{J}_{m-\beta}[\sqrt{\lambda x(x-t)}] = \frac{\partial}{\partial t}\int_x^t (s-t)^{m-\beta}J_0[\sqrt{\lambda x(x-s)}]\, ds,$$

после некоторых преобразований получим

$$\Phi_2(x) = xA_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}[x^{-1}\Phi_3(x)], \quad (9)$$

где

$$\Phi_3(x) = \int_0^x \Phi_1(t)t^{\beta}(x-t)^{-\beta}F\left(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; \frac{t-x}{2t}\right) dt.$$

Пользуясь известными свойствами гипергеометрической функции [13]:

$$F(a, 1-a, c; z) = (1-z)^{c-1}F\left(\frac{c-a}{2}, \frac{c+a-1}{2}, c; 4z(1-z)\right),$$

$$F(a,b,c;z) = (1-z)^{-b}F(c-a,b,c;z/(z-1)),$$

и равенством $\Phi_1(xz) = z^{\alpha+\beta-1}\frac{d}{dx}[x^{\alpha+\beta}\varphi(zx)]$, имеем

$$\Phi_3(x) = 2^{\beta}\Gamma(1-\beta)x^2\frac{d}{dx^2}(x^2)^{\frac{\beta-\alpha}{2}}F_{0x}\begin{bmatrix}\frac{1+\alpha-\beta}{2}, & \frac{\alpha-\beta}{2} \\ 1-\beta, & x^2\end{bmatrix}(x^2)^{\alpha+\beta-1}\varphi(x). \quad (10)$$

Принимая во внимание равенство $\varphi(x) = u(\theta_0)$ и подставляя (10) в (9), а (9) — в (8), получим равенство (7). Лемма 1 доказана.

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\int_0^x (x-t)^{-2\beta} t^{\beta-1} J_p(\sqrt{\lambda}t)\Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right) dt$$
$$= l_0 x^{-\beta} J_p(\sqrt{\lambda}x), \quad (11)$$

где $l_0 = 2^{2\beta-1}\Gamma(l_1)\Gamma(l_3-l_2)\Gamma(1-2\beta)/[\Gamma(1-l_2)\Gamma(1+l_1-l_3)]$, $2l_1 = \alpha+\beta+p$, $2l_2 = \alpha+\beta-p$, $2l_3 = 1+2\beta$, $p = \sqrt{(\alpha+\beta)^2+q^2}$, $\operatorname{Re} q^2 > 0$, *причем у корня берется та ветвь, которая соответствует арифметическому корню.*

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — регулярное в области Ω_1 решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x,-x) = 0$, а $\tau(x) = u(x,0)$, $\nu(x) = \lim\limits_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y$. Тогда согласно лемме 1 справедливо равенство

$$\tau(x) = \bar{\chi}2^{2\beta-1}\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}(t/x)^\alpha \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right) dt. \quad (12)$$

С другой стороны, разыскивая регулярное в области Ω_1 решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $u(x,-x) = 0$, в виде $u(x,y) = P(\rho)Q(\theta)$, где $\rho = \sqrt{x^2-y^2}$, $\theta = -y^2/\rho^2$, находим

$$u(x,y) = c_0\rho^{-\alpha-\beta}(-\theta)^{-l_1}J_p(\sqrt{\lambda}\rho)F(l_1, 1+l_1-l_3, 1+l_1-l_2, 1/\theta),$$

откуда следует, что

$$\begin{gathered}\tau(x) = \lim_{y\to 0} u(x,0) = l_4 x^{-\alpha-\beta} J_p(\sqrt{\lambda}x),\\ \nu(x) = \lim_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y = l_4(1-2\beta)k_0 x^{\beta-\alpha-1}J_p(\sqrt{\lambda}x).\end{gathered} \quad (13)$$

Здесь $c_0 \neq 0$ — произвольное число,

$$l_4 = c_0\Gamma(1+l_1-l_2)\Gamma(1-l_3)/[\Gamma(1-l_2)\Gamma(1+l_1-l_2)],$$

$$k_0 = \Gamma(l_3)\Gamma(1-l_2)\Gamma(1+l_1-l_3)/[\Gamma(l_1)\Gamma(l_3-l_2)\Gamma(2-l_3)].$$

Подставляя (13) в (12) и принимая во внимание единственность решения задачи Коши — Гурса, убеждаемся в справедливости равенства (11). Лемма 2 доказана.

Замечание. Из (11) при $\alpha = 0$ следует известная формула 6.581(5) из [15, с. 712].

Теперь переходим к исследованию задачи A_λ^0.

Пусть $u(x,y)$ — решение задачи A_λ^0 и $\tau(x) = u(x,0)$, $\nu(x) = \lim\limits_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y$. Тогда согласно лемме 1 справедливо равенство (7). Принимая его во внимание, из (5) получим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на OB, принесенное из области Ω_1:

$$\gamma_3\tau(x) = \bar{\chi}2^{2\beta-1}\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}\left(\frac{t}{x}\right)^\alpha$$
$$\times\, \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right)dt, \quad (14)$$

где $\gamma_3 = 1 + \gamma_0 2^{\beta-\alpha}\Gamma(\beta)/\Gamma(2\beta)$.

Таким образом, задача A^0_λ эквивалентно сведена к следующей эллиптической задаче C^0_λ: *найти значения параметра* λ *и соответствующие им нетривиальные регулярные в области* Ω_2 *решения уравнения* (1), *удовлетворяющие условиям* (3), (4), (14).

Решение этой задачи ищем в виде $u(x,y) = P(r)Q(\varphi)$, где $r = \sqrt{x^2+y^2}$, $\varphi = \operatorname{arctg}\left(\frac{y}{x}\right)$, $0 \le r \le 1$, $0 \le \varphi \le \pi/2$. Тогда задача C^0_λ распадается на две:

$$r^2 P''(r) + (1+2\alpha+2\beta) r P'(r) + (\lambda r^2 - \mu^2) P(r) = 0, \quad 0 < r < 1, \tag{15}$$

$$|P(0)| < +\infty, \quad \alpha_0 P(r) + \beta_0 P'(r) = 0 \text{ при } r = 1; \tag{16}$$

и

$$Q''(\varphi) + (2\beta \operatorname{ctg}\varphi - 2\alpha \operatorname{tg}\varphi) Q'(\varphi) + \mu^2 Q(\varphi) = 0, \quad 0 < \varphi < \pi/2, \tag{17}$$

$$Q(\pi/2) = 0, \tag{18}$$

$$\gamma_3 P(x) Q(0) = \bar{\chi} 2^{2\beta-1} [Q'(\varphi)(\sin\varphi)^{2\beta}]|_{\varphi\to 0} \int\limits_0^x (x-t)^{-2\beta} (t/x)^\alpha P(t) t^{2\beta-1} \times \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right) dt, \tag{19}$$

где μ — константа разделения.

Выполнив замену $\psi = \sin^2\varphi$, приведем уравнение (17) к виду

$$\psi(1-\psi) Q''_{\psi\psi} + [1/2 + \beta - (1+\alpha+\beta)\psi] Q'_\psi + \frac{1}{4}\mu^2 Q = 0.$$

Пользуясь решениями этого гипергеометрического уравнения Гаусса [13], находим общее решение уравнения (17):

$$Q(\varphi) = c_1 F(a^0, b^0, c^0; \sin^2\varphi) + c_2 (\sin^2\varphi)^{1-c^0} F(a^0 - c^0 + 1, b^0 - c^0 + 1, 2 - c^0; \sin^2\varphi), \tag{20}$$

где c_1, c_2 — произвольные числа, $2a^0 = \alpha + \beta + w$, $2b^0 = \alpha + \beta - w$, $2c^0 = 1 + 2\beta$, $w = \sqrt{(a+\beta)^2 + \mu^2}$.

Отсюда следует, что

$$Q(0) = c_1, \quad \lim_{\varphi\to 0} Q'(\sin\varphi)^{2\beta} = (1-2\beta) c_2. \tag{21}$$

Ограниченным при $r = 0$ решением уравнения (15) является функция

$$P(r) = r^{-\alpha-\beta} J_w(\sqrt{\lambda} r), \quad \text{где } w = \sqrt{(\alpha+\beta)^2 + \mu^2},\ \operatorname{Re}\mu^2 > 0,\ \lambda \ne 0.$$

Подставляя это решение в (19) и пользуясь равенствами (11) и (21), находим

$$c_2 = c_1 \gamma_3 \Gamma(1-b^0)\Gamma(1+a^0-c^0)\Gamma(c^0)/[\Gamma(a^0)\Gamma(c^0-b^0)\Gamma(2-c^0)]. \tag{22}$$

Потребовав от функции (20) выполнения условия (18), с учетом (22) получим, что нетривиальные в $\overline{\Omega}_2$ решения задачи (17)–(19) существуют лишь при $\mu_n = \sqrt{w_n^2 - (\alpha+\beta)^2}$, где w_n — решения уравнения

$$\cos\left[\frac{\pi}{2}(\alpha - \beta + w)\right] + \gamma_3 \sin\left[\frac{\pi}{2}(\alpha + \beta + w)\right] = 0,$$

удовлетворяющее условию $w > \alpha+\beta$, т. е.

$$w_n = \begin{cases} -\alpha-\beta-\frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg}\zeta+2n & \text{при } \alpha+\beta+\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\zeta<1, \\ -\alpha-\beta-\frac{2}{\pi}\operatorname{arcctg}\zeta+2(n+1) & \text{при } \alpha+\beta+\frac{1}{\pi}\operatorname{arcctg}\zeta\geq 1, \end{cases} \tag{23}$$

здесь $\zeta = (\gamma_3+\sin\beta\pi)/\cos\beta\pi$, $n=1,2,\dots$.

Следовательно, в силу (20), (22), (23) собственными функциями задачи (17)–(19) являются функции

$$Q_n(\varphi) = c_n\{F(a_n,b_n,c^0;\sin^2\varphi) \\ + \gamma_3 k_n(\sin\varphi)^{1-2\beta}F(1+a_n-c^0,1+b_n-c^0,2-c^0;\sin^2\varphi)\}, \quad n=1,2,\dots,$$

где $c_n\neq 0$ — произвольные числа, $2a_n=\alpha+\beta+w_n$, $2b_n=\alpha+\beta-w_n$,

$$k_n = \Gamma(1-b_n)\Gamma(1+a_n-c^0)\Gamma(c^0)/[\Gamma(a_n)\Gamma(c^0-b_n)\Gamma(2-c^0)].$$

Подставляя в решение уравнения (15) $w=w_n$ и реализуя второе из условий (16), имеем

$$[\alpha_0-(\alpha+\beta)\beta_0]J_{w_n}(\sqrt{\lambda})+\beta_0\sqrt{\lambda}J'_{w_n}(\sqrt{\lambda})=0, \quad n=1,2,\dots. \tag{24}$$

Если $\beta_0=0$, то уравнения (24) принимают вид $J_{w_n}(\sqrt{\lambda})=0$. В силу того, что $w_n>0$, эти уравнения имеют только действительные корни [16].

Если же $\beta_0\neq 0$ и выполнено условие $(\alpha_0/\beta_0)-\alpha-\beta+w_1\geq 0$, то для $n=2,3,\dots$ выполняются условия $(\alpha_0/\beta_0)-\alpha-\beta+w_n>0$. Тогда согласно общей теории бесселевых функций [16] уравнения (24) имеют только действительные корни.

Следовательно, если $\beta_0=0$ или $\beta_0\neq 0$, $(\alpha_0/\beta_0)-\alpha-\beta+w_1\geq 0$, то каждое из уравнений (24) имеет счетное число действительных корней. Обозначая через $\theta_m^{(w_k)}$ m-й корень уравнения (24) при $n=k$, получим собственные значения $\lambda_{n,m}=\left[\theta_m^{(w_n)}\right]^2$ $(n,m=1,2,\dots)$ задачи A_λ^0 (C_λ^0).

Соответствующие найденным собственным значениям собственные функции в области Ω_2 даются формулой

$$u_{n,m}(x,y) = c_{n,m}r^{-\alpha-\beta}J_{w_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}r)\{F(a_n,b_n,c^0;\sin^2\varphi) \\ + \gamma_3k_n(\sin\varphi)^{1-2\beta}F(1+a_n-c^0,1+b_n-c^0,2-c^0;\sin^2\varphi)\},$$

где $c_{n,m}\neq 0$ — произвольные числа, $n,m=1,2,\dots$.

Собственные функции задачи A_λ^0 в области Ω_1 определяются как решения уравнений

$$u_{xx}-u_{yy}+\frac{2\alpha}{x}u_x-\frac{2\beta}{y}u_y+\lambda_{n,m}u=0, \quad n,m=1,2,\dots,$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$u(x,0)=\tau_{n,m}(x)=c_{n,m}x^{-\alpha-\beta}J_{w_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}x),$$

$$\lim_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)=\nu_{n,m}(x)=c_{n,m}k_n(1-2\beta)x^{\beta-\alpha-1}J_{w_n}(\sqrt{\lambda_{n,m}}x),$$

и даются формулой (2).

Этим завершено исследование задачи A_λ^0.

Задача A^1_λ. *Найти значения параметра λ и соответствующие им нетривиальные регулярные в области Ω решения уравнения* (1), *удовлетворяющие условиям* (3), (4) *и*

$$x^{\beta-\alpha}A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}x\frac{d}{dx^2}(x^2)^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}}F_{0x}\begin{bmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}, & \frac{\alpha+\beta-1}{2}\\ \beta, & x^2\end{bmatrix}(x^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}}u(\theta_0) + \gamma_0\lim_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y(x,y)=0,\quad 0<x<1. \tag{25}$$

Прежде чем перейти к исследованию задачи A^1_λ, сначала рассмотрим задачу Дарбу для уравнения (1) в области Ω_1 и некоторые следствия, вытекающие из представления решения этой задачи.

Задача Дарбу. *Найти регулярное в области Ω_1 решение уравнения* (1), *удовлетворяющее условиям*

$$u(x,0)=\tau(x),\ 0\le x\le 1,\quad u(x,-x)=\varphi(2x),\ 0\le x\le 1/2,$$

где $\tau(x),\varphi(x)$ — заданные функции, причем $\tau(0)=\varphi(0)$, $\tau(x)\in C[0,1]\cap C^2(0,1)$, $\varphi(x)\in C^1[0,1]\cap C^{(2,\delta)}(0,1), \delta>0$.

Функция Римана — Адамара для этой задачи построена М. Б. Капилевичем [12]. Пользуясь этой функцией, аналогично [12, 14, 17] нетрудно убедиться в том, что решение задачи Дарбу существует, единственно и представимо в виде

$$u(x,y)=\chi_1(-y)^{1-2\beta}\int_0^{x+y}\tau(t)\left(r_0^2\right)^{\beta-1}(t/x)^\alpha\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\beta;r_1,r_2)\,dt + \int_0^{x+y}\Phi_0(t)H(x,y;t/2,-t/2)dt+\int_{x+y}^{x-y}\Phi_0(t)R(x,y;t/2,-t/2)\,dt, \tag{26}$$

где $\chi_1=(1-2\beta)\chi 2^{1-2\beta}$, $\chi=\Gamma(1-\beta)/[\Gamma(\beta)\Gamma(2-2\beta)]$,

$$H(x,y;x_0,y_0)=\chi(x_0/x)^\alpha R_1^{1-2\beta}(2/R_0)^{2\beta} \times\sum_{n=0}^\infty\frac{1}{(\beta)_n n!}\left(-\frac{\lambda R_0^2}{4}\right)^n H_2(1-\beta-n,1-\beta,\alpha,1-\alpha,2-2\beta;R_{1,}R_2),$$

$r_0,r_1,r_2,R_0,R_1,R_2,\Phi_{0,}(t),R(x,y;x_0,y_0)$ те же функции, что и в задаче Коши — Гурса.

Лемма 3. *Если $u(x,y)$ — регулярное в области Ω_1 решение уравнения* (1), *обладающее тем свойством, что $u(x,-x)\in C^1[0,1/2]\cap C^{(2,\delta)}(0,1/2)$, $\delta>0$ и $u(x,0)=\tau(x)$, $\lim\limits_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y=\nu(x)$, то имеет место равенство*

$$\nu(x)=\chi_1x^{-\alpha}\left\{\frac{d}{dx}\int_0^x\frac{\tau(t)t^\alpha}{(x-t)^{1-2\beta}}\,dt+(2\beta-1)\int_0^x\tau(t)t^\alpha(x-t)^{2\beta-2} \times\left[\Xi_2\left(\alpha,1-\alpha,\beta;-\frac{(x-t)^2}{4xt},-\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right)-1\right]dt\right\} - \Gamma(\beta)2^{1-\alpha-\beta}\chi_1x^{\beta-\alpha}A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}x\frac{d}{dx^2}(x^2)^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}}F_{0x}\begin{bmatrix}\frac{\alpha+\beta}{2}, & \frac{\alpha+\beta-1}{2}\\ \beta, & x^2\end{bmatrix}(x^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}}u(\theta_0). \tag{27}$$

Доказательство. Пусть $u(x,y)$ — регулярное в области Ω_1 решение уравнения (1) и $u(x,0)=\tau(t)$, $u(x,-x)=\varphi(2x)\in C^1[0,1/2]\cap C^{(2,\delta)}(0,1/2)$, $\delta>0$. Тогда справедливо равенство (26). Рассмотрим функцию

$$\begin{aligned} u_\varepsilon(x,y) &= \chi_1(-y)^{1-2\beta}\int\limits_0^{x+y-\varepsilon}\tau(t)(r_0^2)^{\beta-1}(t/x)^\alpha\,dt \\ &+\chi_1(-y)^{1-2\beta}\int\limits_0^{x+y-\varepsilon}\tau(t)(r_0^2)^{\beta-1}(t/x)^\alpha[\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\beta;r_1,r_2)-1]\,dt \\ &+\int\limits_0^{x+y-\varepsilon}\Phi_0(t)H(x,y;t/2,-t/2)\,dt+\int\limits_{x+y+\varepsilon}^{x-y}\Phi_0(t)R(x,y;t/2,-t/2)\,dt, \end{aligned}\tag{28}$$

где $\varepsilon>0$ — достаточно малое число.

Очевидно, что $\lim\limits_{\varepsilon\to0}u_\varepsilon(x,y)=u(x,y)$.

Непосредственным вычислением из (28) находим

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial y} &= \chi_1(-y)^{1-2\beta}\tau(x+y-\varepsilon)[\varepsilon(\varepsilon-2y)]^{\beta-1}[(x+y-\varepsilon)/x]^\alpha \\ &+\chi_1(-y)^{-2\beta}\int\limits_0^{x+y-\varepsilon}\tau(t)\left(r_0^2\right)^{\beta-2}(t/x)^\alpha\left[(2\beta-1)r_0^2+2(\beta-1)y^2\right]dt \\ &+\chi_1(-y)^{1-2\beta}\tau(x+y-\varepsilon)[\varepsilon(\varepsilon-2y)]^{\beta-1}[(x+y-\varepsilon)/x]^\alpha \\ &\times\left\{\Xi_2\left[\alpha,1-\alpha,\beta;\frac{\varepsilon(2y-\varepsilon)}{4x(x+y-\varepsilon)},\frac{\lambda}{4}\varepsilon(2y-\varepsilon)\right]-1\right\} \\ &-\chi_1(1-2\beta)(-y)^{-2\beta}\int\limits_0^{x+y-\varepsilon}\tau(t)\left(r_0^2\right)^{\beta-1}(t/x)^\alpha[\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\beta;r_1,r_2)-1]\,dt \\ &+2\chi_1(-y)^{2-2\beta}\int\limits_0^{x+y-\varepsilon}\tau(t)\left(r_0^2\right)^{\beta-2}(t/x)^\alpha \\ &\times\left\{(\beta-1)[\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\beta;r_1;r_2)-1]+r_0^2\frac{\partial}{\partial r_0^2}\Xi_2(\alpha,1-\alpha,\beta;r_1;r_2)\right\}dt \\ &-\Phi_0(x-y)R\left(x,y;\frac{x-y}{2},-\frac{x-y}{2}\right) \\ &+[\Phi_0(x+y-\varepsilon)-\Phi_0(x+y+\varepsilon)]H\left(x,y;\frac{x+y-\varepsilon}{2},-\frac{x+y-\varepsilon}{2}\right) \\ &+\Phi_0(x+y+\varepsilon)\left[H\left(x,y;\frac{x+y-\varepsilon}{2},-\frac{x+y-\varepsilon}{2}\right)-R\left(x,y;\frac{x+y+\varepsilon}{2},-\frac{x+y+\varepsilon}{2}\right)\right] \\ &+\int\limits_0^{x+y-\varepsilon}\Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial y}H(x,y;t/2,-t/2)dt+\int\limits_{x+y+\varepsilon}^{x-y}\Phi_0(t)\frac{\partial}{\partial y}R(x,y;t/2,-t/2)\,dt. \end{aligned}$$

Умножая обе части последнего равенства на $(-y)^{2\beta}$ и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$, $y \to 0$, имеем

$$\nu(x) = \chi_1 x^{-\alpha}\Biggl\{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{\tau(t)t^\alpha}{(x-t)^{1-2\beta}}\,dt$$

$$+ (2\beta-1)\int\limits_0^x \tau(t)t^\alpha (x-t)^{2\beta-2}\left[\Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, \beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right) - 1\right] dt\Biggr\}$$

$$- \chi_1 2^{-\alpha} x^{\beta-\alpha-1}\int\limits_0^x \Phi_0(t)t^{\alpha+1}(x-t)^{\beta-1}\Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, \beta; \frac{t-x}{2t}, \frac{\lambda}{4}x(t-x)\right) dt. \quad (29)$$

Методом, примененным при преобразовании выражения $\Phi_2(x)$, можно доказать, что последний интеграл в (29) равен

$$2^{1-\beta}\Gamma(\beta) x A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}} x \frac{d}{dx^2}(x^2)^{\frac{1-\alpha-\beta}{2}} F_{0x}\begin{bmatrix} \frac{\alpha+\beta}{2}, & \frac{\alpha+\beta-1}{2} \\ \beta, & x^2 \end{bmatrix} (x^2)^{\frac{2\alpha-1}{2}} u(\theta_0),$$

откуда следует утверждение леммы 3.

Лемма 4. *Если $\tau(0) = 0, \tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, то интегральное уравнение*

$$\int\limits_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}(t/x)^\alpha \Xi_2\left(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\right) dt$$

$$= [2^{1-2\beta}\Gamma(2\beta)\Gamma(1-\beta)/\Gamma(\beta)]\tau(x) \quad (30)$$

имеет единственное решение $\nu(x) \in C^2(0,1)$, которое дается формулой

$$\nu(x) = (1-2\beta)\chi 2^{1-2\beta} x^{-\alpha}\Biggl\{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{\tau(t)t^\alpha}{(x-t)^{1-2\beta}}\,dt$$

$$+ (2\beta-1)\int\limits_0^x \tau(t)t^\alpha (x-t)^{2\beta-2}\left[\Xi_2(\alpha, 1-\alpha, \beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2) - 1\right] dt\Biggr\}, \quad (31)$$

и, обратно, если $\nu(x) \in C^2(0,1)$ (причем $\nu(x)$ может иметь особенность порядка меньше $1-2\beta$ при $x \to 0, x \to 1$), то интегродифференциальное уравнение (31) имеет единственное решение $\tau(x) \in C[0,1] \cap C^2(0,1)$, которое удовлетворяет условию $\tau(0) = 0$ и дается формулой (30).

Утверждения этой леммы следуют из лемм 1 и 3 при $u(x,-x) = 0$ в силу единственности решения задач Коши — Гурса и Дарбу.

Теперь переходим к исследованию задачи A_λ^1. Пусть $u(x,y)$ — решение задачи A_λ^1 и $u(x,0) = \tau(x)$, $\lim\limits_{y\to 0}(-y)^{2\beta}u_y = \nu(x)$. Тогда, пользуясь равенством (27) и условием (25), находим функциональное соотношение между $\tau(x)$ и $\nu(x)$ на OB, принесенное из области Ω_1:

$$\gamma_4\nu(x) = (1-2\beta)\chi 2^{1-2\beta} x^{-\alpha}\Biggl\{\frac{d}{dx}\int\limits_0^x \frac{\tau(t)t^\alpha}{(x-t)^{1-2\beta}}\,dt$$

$$+ (2\beta-1)\int\limits_0^x \tau(t)t^\alpha (x-t)^{2\beta-2}\left[\Xi_2(\alpha, 1-\alpha, \beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2) - 1\right] dt\Biggr\},$$

где $\gamma_4 = 1 - \gamma_0 2^{2-a-3\beta}\Gamma(1-\beta)/\Gamma(2-2\beta)$. Отсюда согласно лемме 4 имеем

$$\tau(x) = \gamma_4\bar{\chi}2^{2\beta-1}\int_0^x \nu(t)(x-t)^{-2\beta}(t/x)^{\alpha}$$
$$\times\, \Xi_2\Big(\alpha, 1-\alpha, 1-\beta; -\frac{(x-t)^2}{4xt}, -\frac{\lambda}{4}(x-t)^2\Big)\,dt. \quad (32)$$

Таким образом, задача A_λ^1 эквивалентно сведена к следующей эллиптической задаче C_λ^1: *найти значения параметра* λ *и соответствующие им нетривиальные регулярные в области* Ω_2 *решения уравнения* (1), *удовлетворяющие условиям* (3), (4) *и* (32).

Эта задача исследуется аналогично задаче C_λ^0. Проведя те же рассуждения, что и в решении задачи C_λ^1, можно убедиться в том, что собственные значения $\bar{\lambda}_{n,m}$ $(n, m = 1, 2, \dots)$ задачи A_λ^1 (C_λ^1) определяются как корни уравнений

$$[\alpha_0 - (\alpha+\beta)\beta_0]J_{\overline{w}_n}(\sqrt{\lambda}) + \beta_0\sqrt{\lambda}\cdot J'_{\overline{w}_n}(\sqrt{\lambda}) = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где

$$\overline{w}_n = \begin{cases} -\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\bar{\zeta} + \beta - \alpha + 2(n-1), & \text{если } \operatorname{arctg}\bar{\zeta} < -\alpha\pi, \\ -\frac{2}{\pi}\operatorname{arctg}\bar{\zeta} + \beta - \alpha + 2n, & \text{если } \operatorname{arctg}\bar{\zeta} \geq -\alpha\pi, \end{cases}$$
$$\bar{\zeta} = (\gamma_4 + \sin\beta\pi)/\cos\beta\pi,$$

а соответствующие собственные функции в области Ω_2 даются формулами

$$\bar{u}_{n,m}(x,y) = \bar{c}_{n,m}r^{-\alpha-\beta}J_{\overline{w}_n}(\sqrt{\bar{\lambda}_{n,m}}r)\{\gamma_4 F(\bar{a}_n, \bar{b}_n, c^0; \sin^2\varphi)$$
$$+ \bar{k}_n(\sin\varphi)^{1-2\beta}F(1+\bar{a}_n-c^0, 1+\bar{b}_n-c^0, 2-c^0; \sin^2\varphi)\},$$

где $\bar{c}_{n,m} \neq 0$ — произвольные числа,

$$2\bar{a}_n = \alpha+\beta+\overline{w}_n, \quad 2\bar{b}_n = \alpha+\beta-\overline{w}_n, \quad 2c^0 = 1+2\beta,$$
$$\bar{k}_n = \Gamma(1-\bar{b}_n)\Gamma(1+\bar{a}_n-c^0)\Gamma(c^0)/[\Gamma(\bar{a}_n)\Gamma(c^0-\bar{b}_n)\Gamma(2-c^0)], \quad n, m = 1, 2, \dots.$$

Собственные функции задачи A_λ^1 в области Ω_1 определяются с помощью функций $\bar{u}_{n,m}$, как в задаче A_λ^0.

Заметим, что в силу обратимости операторов $A_{0x}^{1,\sqrt{\lambda}}$ и F_{0x} из задач A_λ^0 и A_λ^1 при $\beta_0 = \gamma_0 = 0$ следует однородная задача Трикоми для уравнения (1) в области Ω. В этом случае w_n и $\overline{w}_n$ упрощаются и $w_n = \overline{w}_n = 2n - \alpha - 1/2$, $n = 1, 2, \dots$.

В заключение отметим, что однозначная разрешимость двух нелокальных задач типа A_λ^0 и A_λ^1 для уравнения (1) (в видоизмененной форме) в области гиперболичности исследована в [18].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Салахитдинов М. С., Уринов А. К.* Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа с негладкими линиями вырождения // Докл. АН СССР. 1982. Т. 262, № 3. С. 539–541.
2. *Салахитдинов М. С., Хасанов А.* Задача Трикоми для уравнения смешанного типа с негладкой линией вырождения // Дифференц. уравнения. 1983. Т. 19, № 1. С. 110–119.
3. *Моисеев Е. И.* Решение задачи Трикоми в специальных областях // Дифференц. уравнения. 1990. Т. 26, № 1. С. 93–103.

4. *Моисеев Е. И.* О некоторых краевых задачах для уравнений смешанного типа // Дифференц. уравнения. 1992. Т. 28, № 1. С. 110–121.
5. *Пономарев С. М.* Спектральная теория основной краевой задачи для уравнения смешанного типа Лаврентьева — Бицадзе. Дис . . . . д-ра физ.-мат. наук. М., 1981.
6. *Кальменов Т. Ш.* О спектре задачи Трикоми для уравнения Лаврентьева — Бицадзе // Дифференц. уравнения. 1977. Т. 13, № 8. С. 1718–1725.
7. *Керимкулов С. Е.* Об одной задаче на собственные значения для уравнения смешанного типа // Изв. АН КазССР. Сер. физ.-мат. 1986. № 5. С. 20–23.
8. *Сабитов К. Б., Хасанова С. Л.* Решение задачи Трикоми — Неймана для уравнения Лаврентьева — Бицадзе методом спектрального анализа // Изв. КБНЦ РАН. 2002. № 1. С. 84–93.
9. *Сабитов К. Б., Ильясов Р. Р.* Спектральные задачи для оператора смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Тр. междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». 2004. Т. 1. С. 266–269.
10. *Уринов А. К., Тожибоев И.* О некоторых задачах на собственные значения для уравнения смешанного типа // Тр. междунар. науч. конф. «Дифференциальные уравнения с частными производными и родственные проблемы анализа и информатики». 2004. Т. 1. С. 285–286.
11. *Уринов А. К.* Задачи на собственные значения для уравнения смешанного типа с сингулярным коэффициентом // Узбекский мат. журн. 2005. № 1. С. 70–78.
12. *Капилевич М. Б.* Об одном классе гипергеометрических функций Горна // Дифференц. уравнения. 1968. Т. 4, № 8. С. 1466–1483.
13. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции. М.: Наука, 1965. Т. 1.
14. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск: Наука и техника, 1987.
15. *Градштейн И. С., Рыжик И. М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. М.: Физматгиз, 1962.
16. *Кузнецов Д. С.* Специальные функции. М.: Высш. шк., 1965.
17. *Гордеев А. М.* Некоторые краевые задачи для обобщенного уравнения Эйлера — Пуассона — Дарбу // Волжский мат. сб. 1968. Вып. 6. С. 56–61.
18. *Салахитдинов М. С., Исломов Б.* О некоторых краевых задачах со смещением для уравнения $-(-y)^m u_{xx} + x^n u_{yy} - \lambda^2 x^n (-y)^m u = 0$ // Неклассические уравнения математической физики и задачи теории ветвления. Ташкент: Фан, 1988. С. 24–34.

Статья поступила 8 июня 2006 г.

Салахитдинов Махмуд Салахитдинович, *Уринов Ахмаджон Кушакович*
Институт математики АН РУз,
ул. Ф. Ходжаева, 29, Ташкент 700125, Узбекистан
`mathinst@uzsci.net`, `urinovak@mail.ru`