Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2007. Том 48, № 5

УДК 517.5

ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ ЛЕБЕГА И ФОРМУЛА НЕВАИ ДЛЯ SINC–ПРИБЛИЖЕНИЙ НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

А. Ю. Трынин

Аннотация: Получены оценки сверху и снизу последовательности функций и констант Лебега операторов Э. Т. Уиттекера

$$L_n(f,x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi}f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big)$$

для непрерывных функций. Приводится аналог формулы Г. П. Неваи интерполяционных многочленов Лагранжа — Чебышева и Лагранжа — Лагерра для исследуемых операторов. Устанавливается ее «локальный» вариант.

Ключевые слова: приближение непрерывных функций, интерполяция Лагранжа, равномерная сходимость.

Впервые sinc-приближения появились в [1]. Позднее Борель [2] и Уиттекер [3] ввели понятие кардинальной функции и усеченной кардинальной функции, сужение на отрезок $[0,\pi]$ которых выглядит так:

$$\begin{aligned}L_n(f,x)&=\sum_{k=0}^{n}\frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k\sin nx}{nx-k\pi}f\left(\frac{k\pi}{n}\right)=\sum_{k=0}^{n}l_{k,n}(x)f(x_{k,n})\end{aligned}\tag{1}$$

(здесь функции $l_{k,n}$ доопределяются по непрерывности в точках $x_{k,n}=\frac{k\pi}{n}$, $k=\overline{0,n}$, $n\in\mathbb{N}$).

К настоящему времени достаточно фундаментально исследована проблема синк-аппроксимации аналитической на действительной оси функции, экспоненциально убывающей на бесконечности (см., например, [4, 5]). Наиболее полный обзор результатов, полученных в этом направлении, а также большое количество важных приложений синк-аппроксимаций можно найти в [6]. Кроме того, появился ряд исследований, восходящих к теореме Котельникова [7], в которых получены различные представления целых функций рядами по синкам с узлами интерполирования, удовлетворяющими некоторым условиям «равномерности распределения» (см., например, [8–13]). Начиная с известной работы Крамера [14] изучается также связь между «sampling» теоремами и интерполяцией

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 04–01–00060).

© 2007 Трынин А. Ю.

Лагранжа по узлам из спектра задачи Штурма — Лиувилля (см., например, [15]).

Доказать наличие аппроксимативной сходимости на оси для менее гладких функций удалось Бутцеру и Стенсу. Правда, для этого пришлось несколько модифицировать оператор (1). В [16] ими установлено, что для равномерно непрерывных, ограниченных на $\mathbb{R}$ функций f, принадлежащих классу Дини — Липшица и, кроме того, удовлетворяющих условию $f(x) = O(|x|^{-\delta})$ при $x \to \pm\infty$ для некоторого $\delta > 0$, равномерно на $\mathbb{R}$ для любых $m \in \mathbb{N}$ и $0 < a < 1$ справедливо равенство

$$\lim_{W\to\infty} \sum_{k=-\infty}^{\infty} f\left(\frac{k}{W}\right) \left[\frac{\sin \pi\left(\frac{a(Wx-k)}{m}\right)}{\pi \frac{a(Wx-k)}{m}}\right]^m \frac{\sin \pi(Wx-k)}{\pi(Wx-k)} = f(x).$$

Кроме того, для этих аппроксимаций ими получены теоремы типа Джексона при $W \to \infty$.

До настоящего времени, насколько мне известно, приближение такими операторами на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций [6, 17] сведением к случаю оси с помощью конформного отображения.

В данной работе получены оценки сверху и снизу последовательности норм операторов (1), действующих при каждом n из $C[0,\pi]$ в $C[0,\pi]$. В теории интерполирования такие нормы называют *константами Лебега* [18, 19]. Также проведено исследование поведения последовательности норм функционалов, ставящих каждой непрерывной на $[0,\pi]$ функции f значения в точке $x \in [0,\pi]$ операторов (1) ($n = 1, 2, 3, \dots$). Функциональные зависимости таких норм от переменной $x \in [0,\pi]$ носят название *функций Лебега* [18, 19].

Теорема 1. *Для всех $x \in [0,\pi]$ и $n = 1, 2, 3, 4, \dots$ оценки сверху функций Лебега процесса* (1) *имеют вид*

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi}\right| \le \frac{2}{\pi} |\sin(nx)|(2 + \ln(n+1)) + 1. \tag{2}$$

Последовательность констант Лебега сверху оценивается следующим образом:

$$L_n = \max_{x\in[0,\pi]} \sum_{k=0}^{n} \left|\frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi}\right| \le \frac{2}{\pi}(2 + \ln(n+1)) + 1. \tag{3}$$

Пусть $0 \le \alpha < 1$, $C_1 > 0$, для числовых последовательностей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ и $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ выполнены соотношения

$$0 \le a_n < b_n \le \pi, \quad b_n - a_n \ge C_1 n^{-\alpha}, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Тогда найдутся константа $C_\alpha > 0$ и номер $n_0 \in N$, зависящие только от C_1 и α в (4), *такие, что для всех $n > n_0$ функции и константы Лебега процесса* (1) *на отрезках $[a_n, b_n]$, $n = 2, 3, 4, \dots$, удовлетворяют неравенствам*

$$L_n([a_n,b_n],x) = \sum_{k=l_n}^{m_n} \left|\frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi}\right| \ge C_\alpha |\sin nx| \ln n, \tag{5}$$

$$L_n([a_n,b_n]) = \max_{x\in[a_n,b_n]} \sum_{k=l_n}^{m_n} \left|\frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi}\right| \ge C_\alpha \ln n, \tag{6}$$

где номера l_n и m_n определяются из неравенств $x_{l_n-1} < a_n \le x_{l_n}$, $x_{m_n} \le b_n < x_{m_n+1}$.

Кроме того, получен аналог очень полезного, на мой взгляд, результата Г. П. Неваи [20, 21], установленного им при изучении классического Лагранжева интерполирования алгебраическими многочленами и тригонометрическими полиномами.

Теорема 2. *Если функция f непрерывна на отрезке $[0,\pi]$, то для всех $x \in [0,\pi]$ имеет место соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - L_n(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))l_{k,n}(x)\right) = 0, \tag{7}$$

где $l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx-k\pi}$. Сходимость в (7) поточечная на отрезке $[0,\pi]$ и равномерная внутри интервала $(0,\pi)$, т. е. равномерная на каждом компакте, содержащемся в этом интервале.

Пусть последовательности положительных чисел γ_n и ε_n удовлетворяют соотношениям

$$\gamma_n = o(1), \quad \lim_{n\to\infty}\frac{\gamma_n}{\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)} = \infty; \quad \varepsilon_n = \frac{1}{e\pi}\exp -\frac{\gamma_n}{\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)}. \tag{8}$$

Если непрерывную на отрезке $[0,\pi]$ функцию f доопределить таким образом, что $f(x) = 0$ при $x \notin [0,\pi]$, то для всех $x \in [0,\pi]$ имеет место формула

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(x) - L_n(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2}(f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n}))l_{k,n}(x)\right) = 0, \tag{9}$$

где номера k_1 и k_2 определяются с помощью неравенств

$$\frac{\pi(k_1-1)}{n} < x - \varepsilon_n \le \frac{\pi k_1}{n}, \quad \frac{\pi(k_2-1)}{n} \le x + \varepsilon_n < \frac{\pi k_2}{n}.$$

Если $k_2 < k_1$, то сумма в (9) отсутствует.

Прежде чем доказывать эти теоремы, приведем ряд утверждений, которыми будем пользоваться в рассуждениях.

Во-первых, нам понадобится теорема С. Б. Стечкина, которую без указания конкретных значений констант он опубликовал в [22] (теорема 7, или частный случай теоремы 3). Заметим, что предлагаемый в данной статье способ доказательства не зависит от их величины. Доказательство этого утверждения с числовыми оценками констант можно найти, например, в [19, книга 1, гл. III, § 3.4].

Теорема 3 (теорема Стечкина). *Пусть $f \in C_{2\pi}$. Тогда для любого натурального m существует тригонометрический полином T_m порядка не выше m такой, что справедливы неравенства*

$$\|f - T_m\|_{C_{2\pi}} \le 5\omega(f, 1/m), \tag{10}$$

$$\|T_m'\|_{C_{2\pi}} \le 7m\omega(f, 1/m), \tag{11}$$

где $\omega(f,\delta)$ — модуль непрерывности функции f.

Далее нам потребуется оценка погрешности аппроксимации функций, допускающих аналитическое продолжение с отрезка $[0,\pi]$ на круг $K_\varepsilon = \{z : |z - \pi/2| \le \pi/2 + \varepsilon\}$ для некоторого положительного ε, интерполяционным оператором по синкам (1), анонсированная в [23]. А именно, верна

Теорема 4. *Пусть $f \in A(K_\varepsilon)$ — аналитическая в круге $K_\varepsilon = \{z : |z-\pi/2| \le \pi/2+\varepsilon\}$ функция для некоторого положительного ε. Тогда найдутся такие абсолютная константа $C_0 > 0$ и натуральное n_ε, зависящее только от ε, что для всех $n \ge n_\varepsilon$ и $x \in [0,\pi]$*

$$|L_n(f,x) - f(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx-k\pi} f\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f(x)\right| \le \frac{C_0\|f\||\sin nx|}{n\left(\pi\left(\frac{n+1}{2n}\right) - \left|x-\frac{\pi}{2}\right|\right)}, \tag{12}$$

где $\|f\| = \max\limits_{x \in K_\varepsilon} |f(x)|$.

Доказательство. Обозначим $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k = 0,1,\dots,n$, $n \in \mathbb{N}$. При каждом натуральном n оценим уклонение значений оператора L_n от интерполируемой функции с помощью обобщения формулы Эрмита [24, гл. 1, § 1, п. 2]. В качестве контура интегрирования возьмем окружность Γ_n с центром в $\frac{\pi}{2}$ радиуса $\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}$. Эта окружность при каждом $n \in \mathbb{N}$ охватывает $n+1$ узлов $x_{k,n}$, $k = 0,1,\dots,n$, и

$$|L_n(f,x) - f(x)| \le \frac{\|f\|\,|\sin(nx)|}{2\pi} \int\limits_{\Gamma_n} \left|\frac{d\zeta}{(\zeta - x)\sin(n\zeta)}\right|. \tag{13}$$

Сделав замену $\zeta = \frac{\pi}{2} + \left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right)e^{i\phi}$, оценим интеграл в (13):

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\Gamma_n} \left|\frac{d\zeta}{(\zeta - x)\sin(n\zeta)}\right| \le \frac{n+1}{4n}$$
$$\times \int\limits_0^{2\pi} \frac{|e^{i\phi}|d\phi}{\left|\sin\frac{\pi n}{2}\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right) + \cos\frac{\pi n}{2}\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right)\right|\left|\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}\right)e^{i\phi} - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right|}. \tag{14}$$

Сначала получим оценку второго множителя знаменателя. Когда ϕ пробегает отрезок от 0 до 2π значение $\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}\right)e^{i\phi} - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ описывает окружность радиуса $\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}\right)$ с центром $\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$. Так как $x \in [0,\pi]$, то

$$\min_{\phi\in[0,2\pi]}\left|\left(\frac{\pi}{2}\frac{n+1}{n}\right)e^{i\phi} - \left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right| = \left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right) - \left|x-\frac{\pi}{2}\right|.$$

Следовательно, из (13) и (14) получаем оценку

$$|L_n(f,x) - f(x)| \le \frac{|\sin(nx)|(n+1)}{4n}\frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right) - \left|x-\frac{\pi}{2}\right|}$$
$$\times \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{\left|\sin\frac{\pi n}{2}\cos\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right) + \cos\frac{\pi n}{2}\sin\left(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi}\right)\right|}.$$

В зависимости от четности n оценка распадается на два случая. Обозначим

$$\chi_n(\phi) = \begin{cases} \frac{1}{|\cos(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi})|} & \text{при } n \text{ нечетных,} \\ \frac{1}{|\sin(\frac{\pi(n+1)}{2}e^{i\phi})|} & \text{при } n \text{ четных,} \end{cases}$$

тогда

$$|L_n(f,x) - f(x)| \le \frac{|\sin(nx)|(n+1)}{4n}\frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right) - \left|x-\frac{\pi}{2}\right|}\int\limits_0^{2\pi}\chi_n(\phi)\,d\phi. \tag{15}$$

Рассмотрим случай $n = 2m+1$, $m = 0, 1, 2, \dots$.

Пусть $A > 2$, обозначим $\delta_m = \frac{1}{4(m+1)} \ln \frac{A}{A-2}$. Выберем m_0 настолько большим, что $\delta_m \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ для любого натурального $m > m_0$. Тогда

$$\int\limits_0^{2\pi} \chi_{2m+1}(\phi)\, d\phi = \int\limits_0^{2\pi} \frac{d\phi}{|\cos(\pi(m+1)e^{i\phi})|}$$
$$\leq 4 \int\limits_0^{\delta_m} \frac{d\phi}{|\cos(\pi(m+1)\cos\phi)|} + 4 \int\limits_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{|\operatorname{sh}(\pi(m+1)\sin\phi)|}. \quad (16)$$

В силу первого замечательного предела найдется такое натуральное $m_1 \geq m_0$, что для всех $m \geq m_1$ справедливо неравенство

$$\delta_m = \frac{1}{4(m+1)} \ln \frac{A}{A-2} \leq \arcsin \frac{\sqrt{30m+5}}{3(m+1)},$$

а следовательно, и

$$|\cos(\pi(m+1)\cos\phi)| \geq \frac{1}{2} \quad (17)$$

будет выполняться для любых $m \geq m_1$ и $\phi \in [0, \delta_m]$.

Нетрудно проверить, что если $\phi \geq \delta_m = \frac{1}{4(m+1)} \ln \frac{A}{A-2}$, $A > 2$, то

$$\operatorname{sh}(\pi(m+1)\sin\phi) \geq \frac{e^{\pi(m+1)\sin\phi}}{A}.$$

Следовательно, для второго интеграла (16) имеем неравенство

$$\int\limits_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{sh(\pi(m+1)\sin\phi)} \leq A \int\limits_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\pi(m+1)\sin\phi)}\, d\phi$$
$$\leq A \int\limits_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}} e^{-(\pi(m+1)\frac{2}{\pi}\phi)}\, d\phi \leq \frac{\sqrt{A(A-2)}}{2(m+1)}.$$

Отсюда, а также из (15)–(17) для любого $x \in [0, \pi]$ и нечетного $n > n_0 = 2m_1 + 1$ имеем

$$|L_n(f,x) - f(x)|$$
$$\leq \frac{|\sin(nx)|(n+1)}{n} \frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|} \left(2 \operatorname{mes}[0, \delta_m] + \frac{\sqrt{A(A-2)}}{2(m+1)}\right)$$
$$= \frac{|\sin(nx)|}{n} \frac{\|f\|}{\left(\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2n}\right) - \left|x - \frac{\pi}{2}\right|} \left(\ln \frac{A}{A-2} + \sqrt{A(A-2)}\right). \quad (18)$$

Рассмотрим случай четного $n = 2m$, $m = 0, 1, 2, \dots$. Теперь оценка интеграла $\int\limits_0^{2\pi} \chi_{2m}(\phi) d\phi$ в (15) сводится к исследованию поведения интегралов

$$\int\limits_0^{\delta_m} \frac{d\phi}{\left|\sin\left(\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\cos\phi\right)\right|} \quad \text{и} \quad \int\limits_{\delta_m}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\phi}{\left|\operatorname{sh}\left(\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\sin\phi\right)\right|}.$$

Заметим, что при $\phi \geq \delta_m = \frac{1}{4(m+\frac{1}{2})} \ln \frac{A}{A-2}$, где $A > 2$, будет

$$\operatorname{sh}\left(\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\sin\phi\right) \geq \frac{e^{\pi(m+\frac{1}{2})\sin\phi}}{A}.$$

Выберем m_2 ($m_2 \geq m_1$) настолько большим, чтобы неравенство

$$\left|\sin\left(\pi\left(m+\frac{1}{2}\right)\cos\phi\right)\right| \geq \frac{1}{2}$$

выполнялось для любого $m > m_2$ при $\phi \in [0, \delta_m]$.

Рассуждая так же, как в случае нечетного n, для достаточно больших четных $n \geq 2m_2$ и произвольных $x \in [0, \pi]$ имеем оценку (18). Таким образом, справедливо неравенство (12), где C_0 можно определить из равенства

$$\min_{A>2}\left(\ln\frac{A}{A-2} + \sqrt{A(A-2)}\right) = C_0.$$

Теорема 4 доказана.

Замечание 1. В. П. Скляров проверил точность порядка приближения в теореме 4, оценив для нечетных n погрешность аппроксимации (12) снизу в точке $x = \frac{\pi}{2}$ функции $f \equiv 1$. Кроме того, для операторов (1) им организован интересный численный эксперимент, анонсированный в [25].

Докажем аналог одного результата Неваи [20, 21], полученного им при изучении классического лагранжева интерполирования многочленами.

Теорема 5. *Для всех $x \in [0, \pi]$ и $n \in \mathbb{N}$ имеет место неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)| \leq 4\left(1 + \frac{1}{\pi}\right), \tag{19}$$

где $l_{k,n}(x) = \frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi}$.

Доказательство. Возьмем произвольную точку $x \in [0, \pi]$. Если $x = x_{m,n} = \frac{m\pi}{n}$ для какого-либо $m = \overline{0, n}$, то после доопределения $l_{k,n}(x)$ в этих точках по непрерывности, очевидно, имеем $\sum\limits_{k=1}^{n} |l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)| \leq 2$. Поэтому считаем, что $x \neq x_{m,n}$ для любого $m = \overline{0, n}$. Обозначим через k_0 номер ближайшего к точке x нуля $x_{k_0,n} = \frac{k_0\pi}{n}$ функции $\sin(nx)$. Если таких нулей два, то номер любого из них, например левого,

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)| = \sum_{k=1}^{n}\left|\frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi} + \frac{(-1)^{k-1}\sin(nx)}{nx - (k-1)\pi}\right|$$
$$\leq |\sin(nx)| {\sum_{k=1}^{n}}' \left|\frac{1}{nx - k\pi} - \frac{1}{nx - (k-1)\pi}\right| + 4,$$

где штрих у суммы означает отсутствие слагаемых с номерами k_0 и $k_0 + 1$. Четыре слагаемых с этими номерами оцениваются с помощью неравенства

$$\left|\frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx - k\pi}\right| \leq 1.$$

Заметим, что знаки $\frac{1}{nx-k\pi}$ и $\frac{1}{nx-(k-1)\pi}$ положительны, если $1 \le k \le k_0 - 1$, и отрицательны, если $k_0 + 2 \le k \le n$. Поэтому цепочку неравенств можно продолжить следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)| \le \sum_{k=1}^{k_0-1} \left(\frac{1}{nx - k\pi} - \frac{1}{nx - (k-1)\pi} \right) + \sum_{k=k_0+2}^{n} \left(\frac{1}{nx - k\pi} - \frac{1}{nx - (k-1)\pi} \right) + 4.$$

Напомним, что при $k_0 = 0$ и $k_0 = 1$ в оценке сверху отсутствует первая сумма, а при $k_0 = n-1, n$ — вторая. Теперь, почленно складывая слагаемые обеих сумм, получаем

$$\sum_{k=1}^{n} |l_{k,n}(x) + l_{k-1,n}(x)| \le \frac{1}{nx - (k_0-1)\pi} - \frac{1}{nx} + \frac{1}{nx - n\pi} - \frac{1}{nx - (k_0+1)\pi} + 4.$$

В силу выбора номера k_0 получим (19). Теорема 5 доказана.

Доказательство теоремы 1. Возьмем произвольное $x \in [0, \pi]$. Пусть k_0 — номер ближайшего к x узла (если таких узлов два, то в качестве k_0 выбираем номер любого из них). Тогда

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{\sin(nx)}{nx - k\pi} \right| + \left| \frac{\sin(nx)}{nx - k_0\pi} \right| + \sum_{k=k_0+1}^{n} \left| \frac{\sin(nx)}{nx - k\pi} \right|.$$

Если $k_0 = 0$, то в сумме отсутствует первое слагаемое, если же $k_0 = n$, то нет третьего. Второе слагаемое оценивается с помощью неравенства $\left|\frac{\sin(nx)}{nx-k\pi}\right| \le 1$:

$$L_n(x) \le |\sin(nx)| \left(\sum_{k=0}^{k_0-1} \left| \frac{1}{nx - k\pi} \right| + \sum_{k=k_0+1}^{n} \left| \frac{1}{nx - k\pi} \right| \right) + 1$$
$$\le \frac{2}{\pi} |\sin(nx)| \left(2 + \int_{0.5}^{\frac{n+1}{2}} \frac{1}{t}\, dt \right) + 1 = \frac{2}{\pi} |\sin(nx)| (2 + \ln(n+1)) + 1.$$

Таким образом, неравенства (2) и (3) доказаны.

Перейдем к доказательству (5) и (6). Теперь точку x будем произвольным образом брать из отрезков $[a_n, b_n]$. Номер k_0 выбираем, как и прежде. Условия (4) гарантируют существование такого номера n_1, начиная с которого в отрезки $[a_n, b_n]$ будет попадать хотя бы один узел $x_{k,n} = \frac{k\pi}{n}$, $k = \overline{0, n}$, и

$$|x - x_{k_0 \pm 1}| \le \frac{3\pi}{2n}. \tag{20}$$

Оценим снизу функцию Лебега на отрезках $[a_n, b_n]$ процесса (1):

$$L_n([a_n, b_n], x) = |\sin nx| \sum_{k=l_n}^{m_n} \frac{1}{|nx - k\pi|}$$
$$\ge |\sin nx| \sum_{k=l_n}^{k_0-2} \frac{1}{|nx - k\pi|} + |\sin nx| \sum_{k=k_0+2}^{m_n} \frac{1}{|nx - k\pi|}. \tag{21}$$

Опустив неотрицательные слагаемые, мы только усилим неравенство. Поэтому при $x \le \frac{b_n+a_n}{2}$ в оценке будет участвовать только вторая сумма, а при $x > \frac{b_n+a_n}{2}$ — только первая. Рассуждения в обеих ситуациях будут совершенно аналогичные, поэтому ограничимся разбором случая $x \le \frac{b_n+a_n}{2}$. В силу (20) и (21)

$$L_n([a_n,b_n],x) \ge |\sin nx| \sum_{k=k_0+2}^{m_n} \frac{1}{|nx-k\pi|}$$
$$\ge \frac{1}{\pi}|\sin nx| \int_{\frac{3}{2}}^{[n\frac{b_n-a_n}{2}]} \frac{dt}{t} \ge \frac{1}{\pi}|\sin nx| \left(\ln \frac{2}{3}\left[n\frac{b_n-a_n}{2}\right]\right).$$

Теперь ввиду (4) найдем такое $n_0 > n_1$, начиная с которого для всех $x \in [a_n, b_n]$ будет выполняться неравенство (5):

$$L_n([a_n,b_n],x) \ge \frac{1}{\pi}|\sin nx| \ln\left(\frac{C_1 n^{1-\alpha}}{6}\right) \ge C_\alpha |\sin nx| \ln n.$$

Осталось заметить, что из (4) для достаточно больших n следует наличие хотя бы одного максимума функции $|\sin nx|$ в отрезке $[a_n, b_n]$. Значит, (6) верно, и теорема 1 доказана.

Доказательство теоремы 2. Продолжим функцию f на отрезок $[-\pi,\pi]$ четным образом. Получим новую функцию $\tilde f \in C_{2\pi}$ с нормой $\|f\|_{C[0,\pi]} = \|\tilde f\|_{C_{2\pi}}$ и модулем непрерывности $\omega(\tilde f,\delta) = \omega(f,\delta)$. В силу теоремы 3 для любого натурального m существует тригонометрический полином по косинусам T_m порядка не выше m, удовлетворяющий соотношениям (10) и (11). С помощью теоремы 4 приблизим этот тригонометрический полином оператором (1):

$$|L_n(T_m,x) - T_m(x)| = \left|\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin(nx)}{nx-k\pi} T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right) - T_m(x)\right|$$
$$\le \frac{C_0\|T_m\||\sin nx|}{n\bigl(\pi\bigl(\frac{n+1}{2n}\bigr) - \bigl|x-\frac{\pi}{2}\bigr|\bigr)}.$$

Следовательно, в силу линейности оператора (1)

$$f(x) - L_n(f,x) - (L_n(T_m,x) - L_n(f,x)) = f(x) - T_m(x) + T_m(x) - L_n(T_m,x),$$

и при любом $x \in [0,\pi]$ по теореме 3 (см. (10)) имеем

$$|f(x) - L_n(f,x) - (L_n(T_m - f,x))| \le 5\omega\left(f,\frac{1}{m}\right) + \frac{C_0\|T_m\||\sin nx|}{n\bigl(\pi\bigl(\frac{n+1}{2n}\bigr) - \bigl|x-\frac{\pi}{2}\bigr|\bigr)}. \quad (22)$$

Согласно определению оператора (1)

$$L_n(T_m - f,x) = \sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(x)\left(T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right) - f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x)\left(T_m\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right) - f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)\right)$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} l_{k-1,n}(x)\bigg(T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\bigg)$$
$$=\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x)\bigg(f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\bigg)$$
$$-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x)\bigg(T_m\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)-T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right)\bigg)$$
$$+\frac{1}{2}(T_m(\pi)-f(\pi))l_{n,n}(x)+\frac{1}{2}(T_m(0)-f(0))l_{0,n}(x)$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(l_{k,n}(x)+l_{k-1,n}(x))\bigg(T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\bigg). \quad (23)$$

Оценим отдельно вторую сумму в полученном представлении с помощью формулы Лагранжа и теоремы 3 (см. (11)):

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x)\left(T_m\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)-T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right|$$
$$\le\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}|l_{k,n}(x)|\left|\left(T_m\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)-T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right|$$
$$\le\frac{7m\pi}{2n}\omega\left(f,\frac{1}{m}\right)\sum_{k=0}^{n-1}|l_{k,n}(x)|\le\frac{7m\pi}{2n}\omega\left(f,\frac{1}{m}\right)L_n(x).$$

Воспользуемся оценкой функции Лебега, полученной в теореме 1, а именно неравенством (2):

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x)\left(T_m\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)-T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right)\right)\right|$$
$$\le\frac{7\pi}{2n}m\omega\left(f,\frac{1}{m}\right)\left[\frac{2}{\pi}|\sin(nx)|(2+\ln(n+1))+1\right]. \quad (24)$$

Из теорем 3 и 5 следуют соотношения

$$\left|\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(l_{k,n}(x)+l_{k-1,n}(x))\bigg(T_m\left(\frac{k\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\bigg)\right|$$
$$\le\frac{1}{2}\|T_m-\tilde f\|_{C[-\pi,\pi]}\sum_{k=1}^{n}|l_{k,n}(x)+l_{k-1,n}(x)|\le 10\left(1+\frac{1}{\pi}\right)\omega\left(f,\frac{1}{m}\right), \quad (25)$$

$$|T_m(\pi)-f(\pi)||l_{n,n}(x)|+|T_m(0)-f(0)||l_{0,n}(x)|\le 10\omega\left(f,\frac{1}{m}\right), \quad x\in[0,\pi].$$

Таким образом, из (22)–(25) и неравенства треугольника для любого $x\in[0,\pi]$ имеем

$$\left|f(x)-L_n(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1} l_{k,n}(x)\bigg(f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\bigg)\right|$$
$$\le 30\omega\left(f,\frac{1}{m}\right)+\frac{C_0\|T_m\||\sin nx|}{n\big(\pi\big(\frac{n+1}{2n}\big)-\big|x-\frac{\pi}{2}\big|\big)}$$

$$+\frac{7\pi}{2n}m\omega\left(f,\frac{1}{m}\right)\left[\frac{2}{\pi}|\sin(nx)|(2+\ln(n+1))+1\right]. \quad (26)$$

Возьмем любой отрезок $[a,b]\subset(0,\pi)$. Выберем произвольное положительное ε. Найдем такое m, для которого $30\omega\big(f,\frac{1}{m}\big)\le\frac{\varepsilon}{2}$. Затем подберем n_0, начиная с которого для любого $x\in[a,b]$ будут выполняться неравенства

$$\frac{C_0\|T_m\||\sin nx|}{n\min(a,\pi-b)}+\frac{7\pi}{2n}m\omega\left(f,\frac{1}{m}\right)\left[\frac{2}{\pi}|\sin(nx)|(2+\ln(n+1))+1\right]\le\frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, для любого положительного ε и $x\in[a,b]$ в силу (26) можно найти такое n_0, что для всех $n>n_0$

$$|f(x)-L_n(f,x)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}l_{k,n}(x)\bigg(f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\bigg)|\le\varepsilon.$$

Сходимость на концах отрезка в силу интерполяционных свойств оператора (1) легко проверяется непосредственно. Действительно, например, в нуле (7) имеет вид

$$\lim_{n\to\infty}\left(f(0)-L_n(f,0)-\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n-1}\bigg(f\bigg(\frac{(k+1)\pi}{n}\bigg)-f\bigg(\frac{k\pi}{n}\bigg)\bigg)l_{k,n}(0)\right)$$
$$=-\frac{1}{2}\lim_{n\to\infty}\left(f\left(\frac{\pi}{n}\right)-f(0)\right)=0.$$

Для доказательства (9) оценим сумму

$$\left|\sum_{k:|x_k-x|>\varepsilon_n}l_{k,n}(x)\bigg(f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\bigg)\right|$$
$$\le\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|\sum_{k:|x_k-x|>\varepsilon_n}\frac{1}{|nx-\pi k|}$$
$$\le\frac{1}{\pi}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|\left(\int\limits_0^{x-\frac{\varepsilon_n}{2}}\frac{dt}{x-t}+\int\limits_{x+\frac{\varepsilon_n}{2}}^{\pi}\frac{dt}{t-x}\right)$$
$$+\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx||l_{k_1-1,n}(x)|+\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|l_{k_2+1,n}(x)|.$$

При этом если $x\le\varepsilon_n$, то в оценке отсутствует первый интеграл, а при $x\ge\pi-\varepsilon_n$ второй интеграл заменяется нулем. Замечая, что $\max\limits_{x\in[0,\pi]}\ln|x(\pi-x)|=2\ln\frac{\pi}{2}$, в силу (8) получаем

$$\left|\sum_{k:|x_k-x|>\varepsilon_n}l_{k,n}(x)\bigg(f\left(\frac{(k+1)\pi}{n}\right)-f\left(\frac{k\pi}{n}\right)\bigg)\right|$$
$$\le 2\ln\frac{e\pi}{\varepsilon_n}\omega\left(f,\frac{\pi}{n}\right)|\sin nx|=2\gamma_n|\sin nx|\le2\gamma_n. \quad (27)$$

Осталось заметить, что неравенство (27) выполняется одновременно для всех $x\in[0,\pi]$. Теорема 2 доказана.

Замечание 2. Если гладкость функции f допускает выбор последовательности γ_n, удовлетворяющей требованиям (8) и такой, что $k_2\le k_1$, т. е. в отрезок

$[x-\varepsilon_n, x+\varepsilon_n]$ будет попадать не более одного узла $\frac{\pi k_1}{n}$, то это означает возможность равномерной внутри $(0,\pi)$ аппроксимации функции f операторами (1).

Действительно, в силу равномерной непрерывности функции f в этом случае имеем

$$\lim_{n\to\infty} |f(x) - L_n(f,x)| \le \lim_{n\to\infty} \Bigg| f(x) - L_n(f,x) - \frac{1}{2}\sum_{k=k_1}^{k_2} (f(x_{k+1,n}) - f(x_{k,n})) l_{k,n}(x) \Bigg| + \frac{1}{2}\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) = 0.$$

В частности, отсюда следуют аналог признака Дини — Липшица равномерной сходимости рядов Фурье [26, гл. IV, § 4], а также классического интерполяционного процесса Лагранжа — Чебышева [19, 27] и процесса Лагранжа — Штурма — Лиувилля в случае краевых условий третьего рода, из которых удалены условия первого рода [28] (см. также [29, следствие 2 к теореме 3′]) для аппроксимаций операторами (1).

Следствие (признак Дини — Липшица). *Если функция f принадлежит классу Дини — Липшица, т. е. выполняется соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \ln n = 0,$$

то значения операторов (1) *сходятся к f равномерно внутри* $(0,\pi)$ *и поточечно на всем* $[0,\pi]$.

Действительно, взяв $\gamma_n = \omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right) \ln \frac{2n}{\pi^2 e}$, воспользуемся замечанием 2.

Замечание 3. Из соотношений (8) и (9) следует справедливость принципа локализации для непрерывных функций процесса (1), т. е. аппроксимативные свойства операторов (1) в точке x зависят от значений функции f лишь в окрестности x. Величина этой окрестности определяется гладкостью функции f. Например, взяв $\gamma_n = \sqrt{\omega\left(f, \frac{\pi}{n}\right)}$, определить возможность аппроксимации функции f с помощью (9) можно по значениям f в узлах из ε_n-окрестности, где $\varepsilon_n = \frac{1}{e\pi} \exp -\frac{1}{\sqrt{\omega(f, \frac{\pi}{n})}}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Plana G.* Sur une nouvelle expression analytique des nombers Bernoulliens // Acad. Torino. 1820. V. 25. P. 403–418.
2. *Borel E.* Sur l'interpolation // C. R. Acad. Sci. Paris. 1897. V. 124. P. 673–676.
3. *Whittaker E. T.* On the functions which are represented by expansion of the interpolation theory // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. 1915. V. 35. P. 181–194.
4. *Stenger F.* Approximations, via the Whittaker cardinal function // J. Approx. Theory. 1976. V. 17, N 3. P. 222–240.
5. *Жук А. С., Жук В. В.* Некоторые ортогональности в теории приближения // Зап. науч. семинаров ПОМИ. 2004. Т. 314. С. 83–123.
6. *Stenger F.* Numerical methods based on sinc and analytic functions. New York: Springer-Verl., 1993.
7. *Kotel'nikov V. A.* On the carrying capacity of the 'Ether' and wire in telecommunications: Material for the First all-union conference on questions of communication. M.: Izd. Red. Upr. Svyazi RKKA, 1933.
8. *Voss J. J.* A sampling theorem with nonuniform complex nodes // J. Approx. Theory. 1997. V. 90, N 2. P. 235–254.

9. *Butzer P. L., Hinsen G.* Reconstruction of bounded signals from pseudo-periodic, irregularly spaced samples // Signal Process. 1989. V. 17, N 1. P. 1–17.

10. *Higgins J. R.* Sampling theorems and contour integral method // Appl. Anal. 1991. V. 41, N 1–4. P. 155–169.

11. *Hinsen G.* Irregular sampling of bandlimited L^p-functions // J. Approx. Theory. 1993. V. 72. P. 346–364.

12. *Seip K.* An irregular sampling theorem for functions bandlimited in a generalized sense // SIAM J. Appl. Math. 1987. V. 47, N 5. P. 1112–1116.

13. *Young R. M.* An introduction to nonharmonic Fourier series. New York: Acad. Press, 1980.

14. *Kramer H. P.* A generalized sampling theorem // J. Math. Phys. 1959. V. 38. P. 68–72.

15. *Zayed A. I., Hinsen G., Butzer P. L.* On Lagrange interpolation and Kramer-type sampling theorems associated with Sturm–Liouville problems // SIAM J. Appl. Math. 1990. V. 50, N 3. P. 893–909.

16. *Butzer P. L., Stens R. L.* A modification of the Whittaker–Kotelnikov–Shannon sampling series // Aequationes Math. 1985. V. 28, N 3. P. 305–311.

17. *Stenger F.* An analytic function which is an approximate characteristic function // SIAM J. Numer. Anal. 1975. V. 12. P. 239–254.

18. *Marcinkiewicz J.* Quelques remarques sur l'interpolation // Acta Litterarum as Scient. Szeged. 1936. V. 8. P. 127–130.

19. *Привалов А. А.* Теория интерполирования функций. Саратов: Изд-во Саратовск. ун-та, 1990. Кн. 1, 2.

20. *Неваи Г. П.* Замечания об интерполировании // Acta Math. Acad. Scientiarum Hungar. Tomus. 1974. V. 25, N 1–2. P. 123–144.

21. *Неваи Г. П.* О сходимости лагранжева интерполирования по узлам Лагерра // Publ. Math. Debrecen. 1973. V. 20. P. 235–239.

22. *Стечкин С. Б.* О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Серия мат. 1951. Т. 15, № 3. С. 219–242.

23. *Трынин А. Ю.* Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа — Штурма — Лиувилля: Тез. докл. 10-й Саратовской зимней школы, 27 янв.– 2 февр. 2000 г. Саратов, 2000. С. 140.

24. *Смирнов В. И., Лебедев Н. А.* Конструктивная теория функций комплексного переменного. М.: Наука, 1964.

25. *Скляров В. П.* О наилучшей равномерной sinc-аппроксимации на конечном отрезке: Современные проблемы теории функций и их приложения: Тез. докл. 13-й Саратовской зимней школы, 27 янв.– 3 февр. 2006 г. Саратов, 2006. С. 161.

26. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматгиз, 1961.

27. *Бернштейн С. Н.* Несколько замечаний об интерполировании: Собр. соч. В 4-х т. М.: Изд-во АН СССР, 1952. Т. 1. С. 253–263.

28. *Натансон Г. И.* Об одном интерполяционном процессе // Учен. зап. Ленингр. пед. ин-та. 1958. Т. 166. С. 213–219.

29. *Трынин А. Ю.* О равномерной сходимости интерполяционных процессов Лагранжа — Штурма — Лиувилля. Саратовский ун-т, 1991. 32 с. Деп. в ВИНИТИ 26.04.91, № 1763-В91.

Статья поступила 30 января 2006 г.

Трынин Александр Юрьевич
Саратовский гос. университет, механико-математический факультет,
кафедра математической физики и вычислительной математики,
ул. Астраханская, 83, Саратов 410026
tayu@rambler.ru