Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 512.536

МОНОИДЫ И РАСПАД

В. А. Колмыков

Аннотация. Предложена одна формализация понятия критического числа распада. Описан класс моделей, для которых это число не превосходит 4 (т. е. всякий объект, составленный из четырех или более элементов, является разложимым).

Ключевые слова: полугруппа, моноид, дифференцирование, распад, кварк, углеводород.

Статья посвящается 70-летию
моего учителя Ю. И. Манина

Введение. Использование алгебраического языка при описании пространственно-геометрических и физических образов, возникающих в результате рассмотрения процессов распада, разложения, расчленения на составляющие элементы, является не только удобным, но и логически естественным. При осуществлении первоначальных шагов здесь наиболее подходящей представляется теория полугрупп, так как в ней алгебраические ограничения всегда налагаются очень экономно.

В настоящей статье мы вводим понятие модели разложения. Это моноид с отмеченным множеством (разложением над которым мы интересуемся). Затем мы рассматриваем дополнительный постулат (связанный с обобщенным дифференцированием) и доказываем, что во всякой модели разложения, удовлетворяющей этому постулату, всякий объект, составленный из четырех или более элементов, является разложимым.

1. Модели разложения. Пусть $(M,*)$ — коммутативный моноид и всякий его неединичный элемент необратим. Пусть, кроме того, задано некоторое непустое подмножество $E \subseteq M$. Если θ — единичный элемент в $(M,*)$, то положим $\widetilde{M} = M \setminus \{\theta\}$, $\widetilde{E} = E \setminus \{\theta\}$. Элемент $x \in \widetilde{E}$ называется *разложимым* (над $\widetilde{E}$), если его можно представить в виде $x = a * b$, где $a, b \in \widetilde{E}$. Тройку $\mathscr{M} = (M,*,E)$ назовем *моделью разложения.*

Через $\widetilde{M}^{*m}$ обозначим множество всех элементов вида $u_1 * \dots * u_m$, где $u_1, \dots, u_m \in \widetilde{M}$ (если $m = 1$, то запись $u_1 * \dots * u_m$ означает u_1).

Пусть $\mathscr{M} = (M,*,E)$ — некоторая модель разложения. Натуральное число n назовем *числом распада* для $\mathscr{M}$, если для любого $m \geq n$ всякий элемент множества $\widetilde{M}^{*m} \cap \widetilde{E}$ разложим. Например, если все элементы из E разложимы, то число 1 является числом распада.

Если для $\mathscr{M}$ существует хотя бы одно число распада, то среди таких чисел есть наименьшее. Это наименьшее число распада назовем *критическим числом распада для модели* $\mathscr{M}$ и обозначим через $k(\mathscr{M})$. Если для $\mathscr{M}$ нет ни одного числа распада, то $k(\mathscr{M})$ не определено.

2. Дополнительные аксиомы. Рассмотренные нами модели разложения слишком абстрактны. Интерес представляют модели разложения, удовлетворяющие дополнительным аксиомам (достаточно интуитивного понимания слова «аксиома»; говоря же точно, под «аксиомой» мы понимаем формулу на формализованном языке Цермело — Френкеля $\mathrm{L_1Set}$ теории множеств, см., например, [1, гл. 1]).

Пусть A — некоторая аксиома. *Критическим числом распада при аксиоме* A назовем натуральное число $k(A)$, для которого выполнены следующие два условия:

1) для любой модели разложения $\mathscr{M}$, удовлетворяющей аксиоме A, справедливо неравенство $k(\mathscr{M}) \leq k(A)$;

2) существует модель разложения $\mathscr{M}_0$, удовлетворяющая аксиоме A и такая, что $k(\mathscr{M}_0) = k(A)$.

Рассмотрим следующую аксиому, которую назовем *квазидифференциальным постулатом.*

Существуют отображения $F : M \to \mathbb{R}$ *и* $\Phi : \widetilde{M} \to \mathbb{R}$ *такие, что*

$$F^{-1}(0) = E, \tag{1}$$

$$\Phi^{-1}(0) \supseteq \widetilde{M} \setminus E, \tag{2}$$

$$\Phi(u * v) = \Phi(u)\Phi(v) \quad \forall u, v \in \widetilde{M}, \tag{3}$$

$$F(u * v) = F(u)\Phi(v) + \Phi(u)F(v) \quad \forall u, v \in \widetilde{M}. \tag{4}$$

3. Теорема. *Критическое число распада при квазидифференциальном постулате равно* 4.

Доказательство теоремы основано на следующих леммах.

Лемма 1. *Если* $(M, *, E)$ *— модель разложения, удовлетворяющая квазидифференциальному постулату, то* $\widetilde{E}$ *замкнуто относительно операции* $*$.

Доказательство. Пусть $u, v \in \widetilde{E}$. Тогда из (1) и (4) следует, что $F(u*v) = 0$. Кроме того, $u * v \neq \theta$. Поэтому $u * v \in \widetilde{E}$. $\square$

Лемма 2. *Пусть* $(M, *, E)$ *— модель разложения, удовлетворяющая квазидифференциальному постулату. Если* $u_1, \ldots, u_n \in \widetilde{M}$ (где $n \geq 2$), *то*

$$F(u_1 * \cdots * u_n) = \sum_i F(u_i) \prod_{j \neq i} \Phi(u_j).$$

Доказательство. Утверждение легко доказать индукцией по n, используя (3) и (4). Следует лишь отметить, что $u_1 * \cdots * u_k \neq \theta$ для любого k. $\square$

Если $I = \{i_1, \ldots, i_s\}$, то запись $*_{i \in I} u_i$ означает $u_{i_1} * \cdots * u_{i_s}$. Если $I = \{i_1\}$ — одноэлементное множество, то удобно положить $*_{i \in I} u_i = u_{i_1}$.

Пусть $n \in \mathbb{N}$ и $\mathscr{U} = \{u_i\}_{i=1}^n$ — конечная последовательность элементов из $\widetilde{M}$. Непустое подмножество $I \subseteq \{1, \ldots, n\}$ назовем *комплектующим* (из $\mathscr{U}$), если $*_{i \in I} u_i \in \widetilde{E}$. Последовательность $\mathscr{U}$ назовем *нормальной*, если существует $r(\mathscr{U}) \in \{1, \ldots, n\}$ такое, что $u_i \in \widetilde{M} \setminus E$ тогда и только тогда, когда $i \leq r(\mathscr{U})$.

Лемма 3. *Пусть $(M, *, E)$ — модель разложения, удовлетворяющая квазидифференциальному постулату, и последовательность $\mathscr{U} = \{u_i\}_{i=1}^n$ нормальная. Справедливы следующие утверждения.*

1. *Если $r(\mathscr{U}) = 1$ и множество $\{1, \dots, n\}$ комплектующее, то существует $i \in \{2, \dots, n\}$ такое, что множество $\{1, i\}$ комплектующее.*

2. *Если $r(\mathscr{U}) \geq 2$, то множество $\{1, \dots, n\}$ комплектующее.*

Доказательство. 1. Так как $u_1 \in \widetilde{M} \setminus E$ и $\{1, \dots, n\}$ комплектующее, то $n \geq 2$. Кроме того, $\Phi(u_1) = 0$. Из этого и леммы 2 следует, что $0 = F(u_1 * \dots * u_n) = F(u_1)\Phi(u_2)\dots\Phi(u_n)$. Значит, $\Phi(u_i) = 0$ для некоторого $i \in \{2, \dots, n\}$. Отсюда $F(u_1 * u_i) = F(u_1)\Phi(u_i) + \Phi(u_1)F(u_i) = 0$. Так как $u_1 * u_i \neq \theta$, то $u_1 * u_i \in \widetilde{E}$.

2. Положим $u = u_1 * \dots * u_{r(\mathscr{U})}$. Используя лемму 2, получаем, что $F(u) = 0$. Так как $u \neq \theta$, то $u \in \widetilde{E}$. Если $r(\mathscr{U}) = n$, то утверждение доказано. Если $r(\mathscr{U}) < n$, то по лемме 1 имеем $u_1 * \dots * u_n = u * (u_{r(\mathscr{U})+1} * \dots * u_n) \in \widetilde{E}$. $\square$

Лемма 4. *Если $\mathscr{M}$ — модель разложения, удовлетворяющая квазидифференциальному постулату, то $k(\mathscr{M}) \leq 4$.*

Доказательство. Пусть $m \geq 4$ и $\mathscr{U} = \{u_i\}_{i=1}^m$ — последовательность элементов из $\widetilde{M}$ такая, что $u_1 * \dots * u_m \in \widetilde{E}$. Докажем, что элемент $u = u_1 * \dots * u_m$ разложимый.

Если $u_i \in \widetilde{E}$ для любого i, то u разложимый. Пусть $u_i \in \widetilde{M} \setminus E$ для некоторого i. Без ограничения общности можно считать, что последовательность $\mathscr{U}$ нормальная. Положим $r = r(\mathscr{U})$. Для доказательства разложимости элемента u достаточно доказать, что множество $\{1, \dots, m\}$ можно разбить на два комплектующих подмножества.

Пусть $r = 1$. Воспользуемся п. 1 леммы 3. Тогда множество $\{1, i\}$ комплектующее. Его дополнение комплектующее (по лемме 1).

Пусть $2 \leq r \leq 3$. Из п. 2 леммы 3 следует, что множество $\{1, \dots, r\}$ комплектующее. Его дополнение комплектующее (по лемме 1).

Пусть $r \geq 4$. Из п. 2 леммы 3 следует, что множество $\{1, 2\}$ и его дополнение являются комплектующими. $\square$

Пусть, как обычно, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Тройка $(\mathbb{N}_0, +, \mathbb{N}_0 \setminus \{1\})$ является моделью разложения. Обозначим ее через $\mathscr{N}_0$.

Лемма 5. *Модель разложения $\mathscr{N}_0$ удовлетворяет квазидифференциальному постулату.*

Доказательство. Единичным элементом является число 0. Поэтому $\widetilde{M} = \mathbb{N}$. Положим $F(n) = \delta_{1,n}$ (здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера), $\Phi(n) = \delta_{1,n+1}$. Справедливость соотношений (1) и (2) очевидна. Далее, если $n, m \in \mathbb{N}$, то $\Phi(n+m) = \delta_{1,n+m+1} = 0 = \delta_{1,n+1}\delta_{1,m+1} = \Phi(n)\Phi(m)$ и $F(n+m) = \delta_{1,n+m} = 0 = \delta_{1,n}\delta_{1,m+1} + \delta_{1,n+1}\delta_{1,m} = F(n)\Phi(m) + \Phi(n)F(m)$. $\square$

Лемма 6. *Справедливо равенство $k(\mathscr{N}_0) = 4$.*

Доказательство. Из лемм 4 и 5 следует, что $k(\mathscr{N}_0) \leq 4$. Докажем, что $k(\mathscr{N}_0) \geq 4$. Предположим, что $k(\mathscr{N}_0) \leq 3$. Возьмем $u_1 = u_2 = u_3 = 1 \in \widetilde{M}$. Тогда $u_1 + u_2 + u_3 = 3 \in \widetilde{E}$. Значит, элемент 3 разложимый. Отсюда $3 = n + m$, где $n, m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$; противоречие. $\square$

Леммы 4–6 доказывают теорему.

4. Замечания 1. Утверждение доказанной теоремы внешне похоже на ситуацию с тремя кварками, однако пока неясно, соответствует ли предложенный постулат физическим реалиям. В качестве открытой проблемы сформулируем следующую задачу: *указать более слабый постулат, при котором критическое число распада равно* 4. Возможно, какие-то кварковые модели будут удовлетворять более слабым постулатам.

2. Приведем содержательный пример из квантовой физики и теории графов. При расчетах энергии π-электронов углеводородных молекул задача о спектре оператора Гамильтона сводится (см., например, [2, гл. 12]) к определению спектра матрицы смежности графа, который строится следующим образом. Его вершины — это атомы углерода, две различные вершины соединены ребром, если в молекуле имеется связь между соответствующими атомами. Наличие нуля в спектре матрицы смежности двудольного графа (т. е. графа, в котором все циклы имеют четную длину) интерпретируется как химическая неустойчивость молекулы (см. [3, § 8.1, п. 1°]). Поэтому граф называется *неустойчивым*, если в спектре его матрицы смежности есть нуль.

Корневым графом называется граф, в котором отмечена одна вершина (называемая *корнем*). Через $\dot{\mathscr{B}}$ обозначим множество всех конечных двудольных корневых графов с вершинами из некоторого множества $\mathscr{V}$, а через $\dot{\mathscr{B}}_0$ — множество всех неустойчивых графов из $\dot{\mathscr{B}}$. На множестве $\dot{\mathscr{B}}$ определена операция (обозначаемая через $\circ$) склейки двух графов посредством отождествления их корней.

Модель разложения $(\dot{\mathscr{B}}, \circ, \dot{\mathscr{B}}_0)$ удовлетворяет квазидифференциальному постулату. Достаточно положить $F(G) = P_G(0)$, где $P_G(\lambda)$ — характеристический многочлен матрицы смежности графа G; $\Phi(G) = P_{\widehat{G}}(0)$, где $\widehat{G}$ — граф, получающийся из G удалением корня. Тогда условия (1) и (3) очевидны, (2) вытекает из леммы 1 работы [4], условие (4) следует из формулы $P_{G\circ H}(\lambda) = P_G(\lambda)P_{\widehat{H}}(\lambda) + P_{\widehat{G}}(\lambda)P_H(\lambda) - \lambda P_{\widehat{G}}(\lambda)P_{\widehat{H}}(\lambda)$ (см., например, [3, § 6.1]).

То, что критическое число распада в этой модели (по доказанной выше теореме) не превосходит 4, в какой-то мере объясняет результат [5] о строении неустойчивых деревьев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Manin Yu. I.* A course in mathematical logic. New York: Springer-Verl., 1977.
2. *Фудзинага С.* Метод молекулярных орбиталей. М.: Мир, 1983.
3. *Цветкович Д., Дуб М., Захс Х.* Спектры графов. Теория и применение. Киев: Наук. Думка, 1984.
4. *Колмыков В. А.* К исследованию устойчивости периодических углеводородных молекул // Сиб. журн. индустриальной математики. 2006. Т. 9, № 1. С. 85–88.
5. *Колмыков В. А.* Об устойчивых и неустойчивых деревьях // Дискретная математика. 2005. Т. 17, № 2. С. 150–152.

Статья поступила 25 мая 2006 г.

Колмыков Владислав Алексеевич
Воронежский гос. университет, НИИ математики при ВГУ,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
kolmykov@math.vsu.ru