Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 517.518.843

О ТОЧНОСТИ ОЦЕНОК ПРИБЛИЖЕНИЯ КЛАССОМ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕННОЙ ВТОРОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. В. Мироненко

Аннотация. Рассматривается вопрос равномерного приближения на отрезке непрерывных функций функциями с ограниченной второй производной. Приводится доказательство точности оценок величины наилучшего приближения функции через ее локальные приближения на равномерных и неравномерных трехточечных сетках.

Ключевые слова: равномерное приближение на отрезке, функции с ограниченной производной.

Пусть X — замкнутое подмножество отрезка $[a, b]$. Через CX обозначим пространство функций, заданных на множестве X, с нормой

$$\|f\|_{CX} = \max\{|f(x)| : x \in X\}.$$

В случае, когда множество X — весь отрезок $[a, b]$, получим пространство непрерывных функций $C[a, b]$, норму в котором будем обозначать через $\|\cdot\| = \|\cdot\|_{C[a,b]}$.

Определение. Пусть класс функций Q содержится в $C[a, b]$, а замкнутое множество X — в отрезке $[a, b]$. *Величиной наилучшего приближения* (ВНП) функции f функциями класса Q на множестве X будем называть величину

$$E(f; Q; X) = \inf_{g \in Q} \|f - g\|_{CX}.$$

В случае, когда X — отрезок $[a, b]$, для краткости будем писать так:

$$E(f; Q) = \inf_{g \in Q} \|f - g\|,$$

а в случае, когда X — конечное множество $\{x_1, x_2, \dots, x_k\}$, — так:

$$E(f; Q; x_1, x_2, \dots, x_k) = \inf_{g \in Q} \|f - g\|_{C\{x_1, x_2, \dots, x_k\}}.$$

Обозначим ВНП функции f функциями класса Q по всем k-точечным подмножествам отрезка $[a, b]$ через

$$E_k(f; Q) = \sup_{a \le x_1 < x_2 < \dots < x_k \le b} E(f; Q; x_1, x_2, \dots, x_k).$$

Рассмотрим также ВНП функции f функциями класса Q по всем равномерным k-точечным сеткам на отрезке $[a, b]$:

$$U_k(f; Q) = \sup_{x,h} E(f; Q; x, x + h, \dots, x + (k - 1)h),$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта № 05–01–01092) и Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (коды проектов НШ–1347.2003.1, НШ–5120.2006.1).

где числа x и h выбираются так, чтобы точки x и $x+(k-1)h$ лежали на отрезке $[a,b]$.

Через $AC^n[a,b]$ обозначим класс функций из $C[a,b]$, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка n. Через $\mathscr{D}^n$ обозначим следующий класс функций:

$$\mathscr{D}^n=\{g\in AC^{n-1}[a,b]:|g^{(n)}(x)|\le 1 \text{ всюду, где } g^{(n)} \text{ существует}\}.$$

В работе [1] доказана

Теорема 1. *Пусть* $f\in C[a,b]\setminus\mathscr{D}^2$. *Тогда*
(a) $\frac{1}{2}E(f,\mathscr{D}^2)<E_3(f,\mathscr{D}^2)\le E(f,\mathscr{D}^2)$;
(b) $\frac{1}{2}E_3(f,\mathscr{D}^2)<U_3(f,\mathscr{D}^2)\le E_3(f,\mathscr{D}^2)$.

В данной работе эта теорема уточняется следующим образом.

Теорема 2. *В обоих неравенствах теоремы* 1 *константа* $\frac{1}{2}$ *не может быть увеличена одновременно для всех функций* $f\in C[a,b]$.

Для доказательства теоремы 2 нам потребуются некоторые вспомогательные утверждения.

Определение. Пусть класс функций Q содержится в $C[a,b]$, а замкнутое множество X — в отрезке $[a,b]$. *Элементом наилучшего приближения* (ЭНП) функции f в классе функций Q на множестве X будем называть любую функцию g_* из этого класса, удовлетворяющую условию

$$\|f-g_*\|_{CX}=E(f;Q;X).$$

В случае, когда X — отрезок $[a,b]$, обозначим множество всех ЭНП для функции f в классе Q через $A(f;Q)=\{g\in Q:\|f-g\|=E(f;Q)\}$.

В случае, когда X — конечное множество $\{x_1,\dots,x_k\}$, обозначим множество всех ЭНП для функции f в классе Q через

$$A(f;Q;x_1,\dots,x_k)=\{g\in Q:\|f-g\|_{C\{x_1,\dots,x_k\}}=E(f;Q;x_1,\dots,x_k)\}.$$

Определение. Пусть функция f задана на наборе точек $x_1<x_2<\dots<x_k$. Будем говорить, что *функция f не лежит в классе функций Q на этом наборе точек*, если в Q нет функций, одновременно интерполирующих значения $f(x_1)$, $f(x_2)$, ..., $f(x_k)$. Это условие будет обозначаться следующим образом: $f\notin Q(x_1,x_2,\dots,x_k)$.

Условия $f\notin\mathscr{D}^n(x_0,x_1,\dots,x_k)$ и $f\in\mathscr{D}^n(x_0,x_1,\dots,x_k)$ очевидно эквивалентны условиям $E(f;\mathscr{D}^n;x_1,x_1,\dots,x_k)>0$ и $E(f;\mathscr{D}^n;x_1,x_1,\dots,x_k)=0$ соответственно.

Далее через $f[x_0,\dots,x_n]$ будем обозначать разделённую разность порядка n от функции f, построенную по точкам $x_0,\dots,x_n$:

$$f[x_0,\dots,x_n]=\sum_{i=0}^{n}\frac{f(x_i)}{\prod\limits_{k=0;k\ne i}^{n}(x_i-x_k)}.$$

Известно (см., например, [2]), что

$$f[x_0,x_1,\dots,x_n]=\frac{f[x_1,x_2,\dots,x_n]-f[x_0,x_1,\dots,x_{n-1}]}{x_n-x_0}. \tag{1}$$

Приведем три леммы, доказанные в работе [1].

Лемма 1. *Пусть даны набор точек $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ и функция f, не принадлежащая классу $\mathscr{D}^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$. Пусть $\alpha = \operatorname{sign} f[x_0, \ldots, x_n]$. Тогда*

1) *множество $A(f; \mathscr{D}^n; x_0, \ldots, x_n)$ содержит ровно один элемент g_*;*
2) *на отрезке $[x_0, x_n]$ выполняется тождество $g_*^{(n)} \equiv \alpha$;*
3) *при $i \in \overline{0, n}$ выполняются равенства*

$$(f - g_*)(x_i) = \alpha(-1)^{n+i} E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \ldots, x_n).$$

Лемма 2. *Пусть на наборе точек $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$ задана произвольная функция f. Тогда множество $A(f; \mathscr{D}^n; x_0, \ldots, x_n)$ не пусто, и справедливы следующие утверждения:*

1) *если $|n! f[x_0, \ldots, x_n]| \le 1$, то $E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \ldots, x_n) = 0$;*
2) *если $|n! f[x_0, \ldots, x_n]| > 1$, то $E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \ldots, x_n) > 0$.*

Лемма 3. *Пусть на наборе точек $x_0 < \cdots < x_n$ задана функция f такая, что $|n! f[x_0, \ldots, x_n]| > 1$. Тогда*

$$E(f; \mathscr{D}^n; x_0, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=0}^{n} \left[\prod_{k=0; k \neq i}^{n} |x_i - x_k| \right]^{-1} \right)^{-1} \left(|f[x_0, \ldots, x_n]| - \frac{1}{n!} \right).$$

Если же точки x_i взяты с равномерным шагом h, то

$$E(f; \mathscr{D}^n; x, x+h, \ldots, x+nh) = \frac{h^n}{2^n} (|n! f[x, x+h, \ldots, x+nh]| - 1).$$

Обозначим через P^n класс полиномов степени не выше n.

Лемма 4. *Пусть дан набор точек $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, а также дана функция $f \notin \mathscr{D}^n(x_0, x_1, \ldots, x_n)$, причем $\operatorname{sign}(f[x_0, x_1, \ldots, x_n]) = \alpha$. Тогда для полинома $p = \frac{\alpha}{n!} x^n + \sum\limits_{i=0}^{n-1} a_i x^i$ имеет место равенство*

$$E(f; \mathscr{D}^n; x_0, x_1, \ldots, x_n) = E((f - p); P^{n-1}; x_0, x_1, \ldots, x_n).$$

Доказательство. Из леммы 1 вытекает, что

$$E(f; \mathscr{D}^n; x_0, x_1, \ldots, x_n) = \inf_{\{a_i\}_{i=0}^{n-1}} \|f - p\|, \quad \text{где } p = \frac{\alpha x^n}{n!} + \sum_{i=0}^{n-1} a_i x^i.$$

Отсюда легко следует утверждение леммы.

Отметим, что предыдущие леммы имеют много общего с понятием чебышёвской интерполяции, рассмотренном в монографии [3], но там изучалось приближение функциями класса P^n на $(n+2)$-точечных множествах, а в этих леммах говорится о приближении функциями класса $\mathscr{D}^n$ на $n+1$-точечных множествах.

Лемма 5. *Пусть даны три точки $a < b < c$ и функция $f \in C[a, c]$. Пусть на отрезке $[a, b]$ функция f равна нулю, а на $[b, c]$ совпадает со строго монотонно убывающей функцией вида $Ax^2 + Bx + C$, причем $A > 0$. Тогда для любых наборов точек x_1, x_2, x_3 таких, что $a \le x_1 < x_2 < x_3 \le c$, выполняется неравенство $f[x_1, x_2, x_3] \le A$.*

Доказательство. Обозначим $f_1 = f(x_1)$, $f_2 = f(x_2)$, $f_3 = f(x_3)$. Сначала рассмотрим наборы точек, целиком лежащие на отрезке $[b, c]$. По условиям теоремы для такого набора выполняется тождество $f[x_1, x_2, x_3] \equiv A$.

Покажем, что для других наборов $f[x_1, x_2, x_3] < A$. Если $x_2 \le b$, то $f_1 = f_2 = 0$ и выполняется неравенство $f[x_1, x_2, x_3] = \frac{f_3}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)} \le 0 < A$. Осталось рассмотреть наборы, в которых $x_1 < b < x_2$. Покажем, что на таких наборах $f[x_1, x_2, x_3] < f[b, x_2, x_3]$.

В самом деле, поскольку $f_1 = 0$, то

$$f[x_1, x_2, x_3] = \frac{1}{(x_3 - x_2)}\left[\frac{-f_2}{(x_2 - x_1)} + \frac{f_3}{(x_3 - x_1)}\right] = \frac{x_1(f_2 - f_3) + x_2 f_3 - x_3 f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}.$$

В силу монотонности $f_2 - f_3 > 0$, тогда $x_1(f_2 - f_3) \le b(f_2 - f_3)$, значит,

$$f[x_1, x_2, x_3] \le \frac{b(f_2 - f_3) + x_2 f_3 - x_3 f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)}.$$

Мы знаем, что

$$f[b, x_2, x_3] = \frac{b(f_2 - f_3) + x_2 f_3 - x_3 f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - b)(x_2 - b)} = A > 0,$$

откуда $b(f_2 - f_3) + f_3 x_2 - f_2 x_3 > 0$. Таким образом, имеем цепочку неравенств:

$$\begin{aligned} f[x_1, x_2, x_3] &\le \frac{b(f_2 - f_3) + x_2 f_3 - x_3 f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - x_1)(x_2 - x_1)} \\ &\le \frac{b(f_2 - f_3) + x_2 f_3 - x_3 f_2}{(x_3 - x_2)(x_3 - b)(x_2 - b)} = f[b, x_2, x_3] = A. \end{aligned}$$

Лемма доказана.

Определение. Произвольный набор точек $x_1 < x_2 < \dots < x_k$ из отрезка $[a, b]$ назовем *альтернансом* для функции $h \in C[a, b]$, если

$$h(x_i) = \alpha(-1)^{i+1}\|h\|_{C[a,b]},$$

где $\alpha = \operatorname{sign} h(x_1)$.

Далее нам понадобится характеризация ЭНП в классе $\mathscr{D}^n$. Она установлена в работе [4], мы приведем ее в более простой формулировке [4, теорема 3], справедливой только при $n = 2$.

Теорема 3. *Пусть $f \in C[a, b] \setminus \mathscr{D}^2$. Для того чтобы выполнялось включение $g_* \in A(f; \mathscr{D}^2)$, необходимо и достаточно, чтобы на отрезке $[a, b]$ нашлись альтернанс для функции $f - g_*$ из s точек $\{x_j\}_{j=1}^s$ ($s \ge 3$), а также точки $t_0 < t_1 < \dots < t_{s-2}$ такие, что*

(1) *справедливы включения $x_1 \in [t_0, t_1)$; $x_s \in (t_{s-3}, t_{s-2}]$;*

(2) *справедливы включения $x_i \in (t_{i-2}, t_{i-1})$ при $i \in \overline{2, s-1}$;*

(3) *при $i \in \overline{0, s-3}$ выполняются тождества*

$$g''_*|_{(t_i,\, t_{i+1})} \equiv (-1)^i \operatorname{sign}((f - g_*)(x_1)).$$

Из теоремы 3 следует, что на отрезке $[t_0, t_s]$ функция g_* является идеальным сплайном второй степени. Понятие сплайна можно найти, например, в [5].

Доказательство теоремы 2. При доказательстве этой теоремы будем опускать символ приближающего класса $\mathscr{D}^2$. Для этого введем следующие обозначения: $E(f) = E(f; \mathscr{D}^2)$, $E_3(f) = E_3(f; \mathscr{D}^2)$, $U_3(f) = U_3(f; \mathscr{D}^2)$.

Докажем точность константы $\frac{1}{2}$ в неравенстве (а) теоремы 1. Возьмем в качестве $[a,b]$ отрезок $[-1,1]$. Построим функцию g в виде сплайна второго порядка с единственным узлом в точке 0. Он полностью задается следующими условиями:

1) $g(-1)=g(0)=g(1)=0$,

2) $g^{(2)}|_{(-1,0)}\equiv -1$, $g^{(2)}|_{(0,1)}\equiv 1$.

Пусть число ε удовлетворяет неравенству $0<\varepsilon<\frac{1}{100}$, тогда $\varepsilon<\sqrt{\varepsilon}<\frac{1}{10}$. Определим непрерывную функцию h_ε:

$$h_\varepsilon(x)=\begin{cases}\frac{2\varepsilon}{1-2\sqrt{\varepsilon}}(x+1)-\varepsilon & \text{на } [-1,-2\sqrt{\varepsilon}),\\ \frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{4}x^2+\varepsilon x & \text{на } [-2\sqrt{\varepsilon},0),\\ -\frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{4}x^2+\varepsilon x & \text{на } [0,2\sqrt{\varepsilon}),\\ \frac{2\varepsilon}{1-2\sqrt{\varepsilon}}(x-1)+\varepsilon & \text{на } [2\sqrt{\varepsilon},1].\end{cases}$$

Определим функцию $f_\varepsilon=g+h_\varepsilon$. Согласно теореме 3 при любом рассматриваемом параметре ε функция g будет единственной в классе $A(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2)$ и выполнится тождество $E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2)\equiv\varepsilon$.

Для доказательства точности константы $\frac{1}{2}$ в неравенстве (а) теоремы 1 достаточно показать, что

$$\frac{E_3(f_\varepsilon)}{E(f_\varepsilon)}=\frac{E_3(f_\varepsilon)}{\varepsilon}\to\frac{1}{2}\quad \text{при } \varepsilon\to 0. \tag{2}$$

Для дальнейшего доказательства нам понадобятся две вспомогательные функции: φ и $\overline{\varphi}$. Первая из них равна

$$\begin{aligned}\varphi(x)&=f_\varepsilon(x)-\left[-\frac{1}{2}x(x+1)\right]-\left[\frac{2\varepsilon}{1-2\sqrt{\varepsilon}}(x+1)-\varepsilon\right]\\ &=f_\varepsilon(x)+\frac{1}{2}x^2+\left(\frac{1}{2}-\frac{2\varepsilon}{1-2\sqrt{\varepsilon}}\right)x+\varepsilon-\frac{2\varepsilon}{1-2\sqrt{\varepsilon}}.\end{aligned}$$

Здесь внутри квадратных скобок записаны многочлены, задающие соответственно функции g и h_ε на отрезке $[-1,-2\sqrt{\varepsilon}]$.

В явном виде функция φ задается формулами (здесь $M=\varepsilon\frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{1-2\sqrt{\varepsilon}}$)

$$\varphi(x)=\begin{cases}0 & \text{при } x\in[-1,-2\sqrt{\varepsilon}),\\ \frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{4}x^2-M(x+1) & \text{при } x\in[-2\sqrt{\varepsilon},0),\\ \frac{3-2\sqrt{\varepsilon}}{4}x^2-M(x+1) & \text{при } x\in[0,2\sqrt{\varepsilon}),\\ x^2-2M & \text{при } x\in[2\sqrt{\varepsilon},1].\end{cases}$$

Вторую функцию определим следующим образом:

$$\overline{\varphi}(x)=-\varphi(-x). \tag{3}$$

Покажем, что на отрезке $[-2\sqrt{\varepsilon},1]$ функция φ строго выпукла. Для этого достаточно показать, что на этом отрезке функция φ' существует почти всюду и строго монотонно возрастает. Отдельно рассмотрим функцию φ' на трех участках этого отрезка:

(a) участок $[-2\sqrt{\varepsilon},0]$: $\varphi'(x)=\frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{2}x-M$;

(b) участок $[0,2\sqrt{\varepsilon}]$: $\varphi'(x)=\frac{3-2\sqrt{\varepsilon}}{2}x-M$;

(c) участок $[2\sqrt{\varepsilon}, 1]$: $\varphi'(x) = 2x$.

Видно, что на всех трех участках функция $\varphi'(x)$ строго монотонно возрастает. Осталось проверить, что функция φ' не убывает в двух точках склейки: $x = 0$ и $x = 2\sqrt{\varepsilon}$. В первой из них $\varphi'(0-0) = M = \varphi'(0+0)$. Во второй $\varphi'(2\sqrt{\varepsilon}-0) = (3-2\sqrt{\varepsilon})\sqrt{\varepsilon} - M < 4\sqrt{\varepsilon} = \varphi'(2\sqrt{\varepsilon}+0)$.

Мы показали, что функция φ строго выпукла на отрезке $[-2\sqrt{\varepsilon}, 1]$. Из равенства (3) следует, что функция $\overline{\varphi}$ строго выпукла вверх на отрезке $[-1, 2\sqrt{\varepsilon}]$.

Также нам понадобятся следующие соотношения:

$$\varphi[x_1, x_2, x_3] = f_\varepsilon[x_1, x_2, x_3] + \frac{1}{2}; \quad \overline{\varphi}[x_1, x_2, x_3] = f_\varepsilon[x_1, x_2, x_3] - \frac{1}{2}.$$

Теперь докажем справедливость утверждения (2). Функция f_ε нечетная, поэтому при определении величины $E_3(f_\varepsilon)$ можно ограничиться только наборами точек с условием $x_2 \le 0$:

$$E_3(f_\varepsilon) = \sup_{-1 \le x_1 < x_2 < x_3 \le 1} E(f_\varepsilon; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3) = \sup_{\substack{-1 \le x_1 < x_2 < x_3 \le 1, \\ x_2 \le 0}} E(f_\varepsilon; \mathscr{D}^2; x_1, x_2, x_3).$$

Покажем, что имеет место неравенство

$$f_\varepsilon[x_1, x_2, x_3] \le \frac{1}{2} \quad \text{при } x_2 \le 0\,. \tag{4}$$

Рассмотрим три возможных случая: $x_3 \le 0$, $0 < x_3 \le 2\sqrt{\varepsilon}$ и $x_3 > 2\sqrt{\varepsilon}$.

Случай $x_3 \le 0$. В этом случае воспользуемся функцией φ. Доказываемое неравенство (4) эквивалентно неравенству $\varphi[x_1, x_2, x_3] \le 1$. Функция φ на отрезке $[-1, 0]$ удовлетворяет условиям леммы 5 при $A = \frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{4}$. Применив эту лемму, получаем, что для любых наборов точек x_1, x_2, x_3 из отрезка $[-1, 0]$ выполняется неравенство $\varphi[x_1, x_2, x_3] \le \frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{4} < 1$. Значит, в случае $x_3 \le 0$ неравенство (4) выполняется.

Случай $0 < x_3 \le 2\sqrt{\varepsilon}$. Воспользуемся функцией $\overline{\varphi}$. Для нее условие (4) равносильно неравенству $\overline{\varphi}[x_1, x_2, x_3] \le 0$.

Функция $\overline{\varphi}$ строго выпукла вверх на отрезке $[-1, 2\sqrt{\varepsilon}]$. Следовательно, на этом отрезке $\overline{\varphi}[x_1, x_2, x_3] \le 0$. Значит, при $x_3 \le 2\sqrt{\varepsilon}$ доказываемое неравенство (4) справедливо.

Случай $x_3 > 2\sqrt{\varepsilon}$. Поскольку $x_1 < x_2 \le 0$, точки x_1 и x_2 находятся на участке строгой выпуклости вверх функции $\overline{\varphi}$, отсюда $\overline{\varphi}[x_1, x_2] > \overline{\varphi}'(x_2+0)$.

В силу (1) для доказательства неравенства $\overline{\varphi}[x_1, x_2, x_3] \le 0$ достаточно проверить справедливость неравенства

$$\overline{\varphi}[x_2, x_3] \le \overline{\varphi}'(x_2+0) \tag{5}$$

для любых $x_2 \le 0$ и $x_3 > 2\sqrt{\varepsilon}$. Неравенство (5) фактически говорит о том, что хорда $[\varphi(x_2), \varphi(x_3)]$ проходит ниже, чем правая касательная в точке $\varphi(x_2)$.

Рассмотрим функцию $\Phi(t, x)$ — правую касательную к графику функции $\overline{\varphi}$ в точке t: $\Phi(t, x) = \overline{\varphi}(t) + \overline{\varphi}'(t+0)(x-t)$. Неравенство (5) эквивалентно неравенству

$$\overline{\varphi}(x_3) \le \Phi(x_2, x_3). \tag{6}$$

Докажем следующую цепочку неравенств, из которой и будет следовать неравенство (6): $\Phi(x_2, x_3) \ge \Phi(0, x_3) \ge \overline{\varphi}(x_3) = 0$. В силу неравенства $x_3 \le 1$ имеем

$$\Phi(0, x_3) = \overline{\varphi}(0) + \overline{\varphi}'(0)(x_3) = M - Mx_3 \ge 0.$$

Теперь покажем, что $\Phi(0,x_3) \le \Phi(x_2,x_3)$. Действительно,

$$\begin{aligned}\Phi(x_2,x_3)-\Phi(0,x_3) &= \overline{\varphi}(x_2)+(x_3-x_2)\overline{\varphi}'(x_2+0)-\overline{\varphi}(0)+(x_3-x_2)\overline{\varphi}'(0)\\ &= [\overline{\varphi}(x_2)+(-x_2)\overline{\varphi}'(x_2+0)-\overline{\varphi}(0)]+[x_3(\overline{\varphi}'(x_2+0)-\overline{\varphi}'(0))].\end{aligned}$$

Здесь содержимое первых квадратных скобок неотрицательно, так как $\overline{\varphi}(x_2)+(\cdot-x_2)\overline{\varphi}'(x_2+0)$ есть уравнение касательной, построенной в точке x_2. В силу строгой выпуклости вверх в точке 0 касательная пройдет выше, чем значение функции в этой точке $\overline{\varphi}(0)$. Содержимое вторых квадратных скобок также неотрицательно, поскольку функция $\overline{\varphi}'$ строго монотонно убывает на отрезке $[-1,0]$. Следовательно, $\Phi(0,x_3) \le \Phi(x_2,x_3)$, что и завершает доказательство справедливости неравенства (4).

По лемме 2 из неравенства $-\frac{1}{2} \le f_\varepsilon[x_1,x_2,x_3] \le \frac{1}{2}$ следует, что $E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x_1,x_2,x_3)=0$. Сопоставив это утверждение с (4), приходим к выводу, что для нахождения величины $E_3(f_\varepsilon)$ достаточно рассмотреть только те наборы точек, на которых $f_\varepsilon[x_1,x_2,x_3] < -\frac{1}{2}$ или, что то же самое,

$$\varphi[x_1,x_2,x_3] < 0. \tag{7}$$

Из условия (7) следует, что $\varphi[x_2,x_3] < \varphi[x_1,x_2] \le 0$. Поскольку $\varphi(x_2) \le 0$, то $\varphi(x_3) < 0$. Это значит, что можно ограничиться только наборами с условием $-2\sqrt{\varepsilon} < x_3 < 2\sqrt{\varepsilon}$. Таким образом,

$$E_3(f_\varepsilon) = \sup_{\substack{-1\le x_1<x_2<x_3\le 1,\\ x_2\le 0,\,-2\sqrt{\varepsilon}\le x_3,\\ \varphi[x_1,x_2,x_3]<0}} E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x_1,x_2,x_3).$$

Наборы точек x_1, x_2, x_3, удовлетворяющие условиям из последней формулы, далее будем называть *допустимыми*.

По лемме 4 для всех допустимых наборов справедливо соотношение

$$E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x_1,x_2,x_3) = E(\varphi;P^1;x_1,x_2,x_3).$$

В силу (7) величина $E(\varphi;P^1;x_1,x_2,x_3)$ может быть выписана следующим образом:

$$E(\varphi;P^1;x_1,x_2,x_3) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x_2)-\left(\varphi(x_1)+\frac{\varphi(x_3)-\varphi(x_1)}{x_3-x_1}(x_2-x_1)\right)\right]. \tag{8}$$

Рассмотрим два возможных случая расположения точки x_1: $x_1 \in [-2\sqrt{\varepsilon},0]$ и $x_1 \in [-1,-2\sqrt{\varepsilon}]$.

В первом случае все три точки набора лежат на отрезке $[-2\sqrt{\varepsilon},2\sqrt{\varepsilon}]$. Поскольку на этом отрезке функция φ строго выпукла, из неравенства (7) следует, что таких допустимых наборов не существует.

Во втором случае для любого допустимого набора верны следующие утверждения: $\varphi(x_1)=0$ и $\varphi(x_3)<0$. По формуле (8) получаем неравенство

$$\begin{aligned}E(\varphi;P^1;x_1,x_2,x_3) &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x_2)-\varphi(x_3)\frac{x_2-x_1}{x_3-x_1}\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x_2)-\varphi(x_3)\left(1-\frac{x_3-x_2}{x_3-x_1}\right)\right] \le \frac{1}{2}\left[\varphi(x_2)-\varphi(x_3)\left(1-\frac{x_3-x_2}{x_3-(-1)}\right)\right]\\ &= \frac{1}{2}\left[\varphi(x_2)-\varphi(x_3)\frac{x_2-(-1)}{x_3-(-1)}\right] = E(\varphi;P^1;-1,x_2,x_3).\end{aligned}$$

Таким образом, в первом случае допустимых наборов нет, а во втором случае достаточно рассматривать только наборы, в которых $x_1 = -1$. Получаем, что

$$E_3(f_\varepsilon) = \sup_{\substack{-1<x_2<x_3<2\sqrt{\varepsilon},\\ x_2\le 0,\,-2\sqrt{\varepsilon}\le x_3,\\ \varphi[-1,x_2,x_3]<0}} E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;-1,x_2,x_3) = \sup_{\substack{-1<x_2<x_3\le 2\sqrt{\varepsilon},\\ x_2\le 0,\,-2\sqrt{\varepsilon}\le x_3,\\ \varphi[-1,x_2,x_3]<0}} E(\varphi;P^1;-1,x_2,x_3).$$

Покажем, что для допустимых наборов имеет место неравенство

$$E(\varphi;P^1;-1,x_2,x_3) \le E(\varphi;P^1;-1,-2\sqrt{\varepsilon},x_3). \tag{9}$$

Для этого рассмотрим функцию

$$H_2(x) = E(\varphi;P_1;-1,x,x_3) = \frac{1}{2}\left[\varphi(x) - \varphi(x_3)\frac{x+1}{x_3+1}\right],$$

определенную на интервале $(-1,0]$. Неравенство (9) перепишется в виде $H_2(x) \le H_2(-2\sqrt{\varepsilon})$. Для его доказательства достаточно показать, что $H_2'(x) > 0$ при $x < -2\sqrt{\varepsilon}$ и $H_2'(x) < 0$ при $x > -2\sqrt{\varepsilon}$. Рассмотрим эти два случая отдельно. В первом случае $H_2'(x) = \frac{-\varphi(x_3)}{x_3+1} > 0$, так как $\varphi(x_3) < 0$.

Во втором случае получаем

$$H_2'(x) = \varphi'(x) - \frac{\varphi(x_3)}{x_3+1} = \frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{2}x - M - \frac{\varphi(x_3)}{x_3+1} < -M + \max_{x\in[-2\sqrt{\varepsilon},2\sqrt{\varepsilon}]}\frac{-\varphi(x)}{x+1}.$$

Рассмотрим функцию

$$\frac{-\varphi(x)}{x+1} = \begin{cases} -\frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{4(x+1)}x^2 + M & \text{на } [-2\sqrt{\varepsilon},0];\\ -\frac{3-2\sqrt{\varepsilon}}{4(x+1)}x^2 + M & \text{на } [0,2\sqrt{\varepsilon}].\end{cases}$$

Видно, что ее максимум достигается в точке $x_0 = 0$ и он равен M, откуда следует требуемое в этом случае неравенство $H_2'(x) < 0$. Значит, неравенство (9) имеет место, и мы можем ограничиться только рассмотрением наборов точек вида $(-1,-2\sqrt{\varepsilon},x_3)$, т. е.

$$E_3(f_\varepsilon) = \sup_{-2\sqrt{\varepsilon}<x_3<2\sqrt{\varepsilon}} E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;-1,-2\sqrt{\varepsilon},x_3) = \sup_{-2\sqrt{\varepsilon}<x_3<2\sqrt{\varepsilon}} E(\varphi;P^1;-1,-2\sqrt{\varepsilon},x_3).$$

Рассмотрим функцию

$$H_3(x) = E(\varphi;P^1;-1,-2\sqrt{\varepsilon},x) = \frac{1}{2}\left[-\varphi(x)\frac{1-2\sqrt{\varepsilon}}{x+1}\right]$$

и найдем ее максимум на интервале $(-2\sqrt{\varepsilon},2\sqrt{\varepsilon})$. Для этого выпишем ее производную:

$$H_3'(x) = \frac{1}{2}\,\frac{-\varphi(x)+\varphi'(x)(x+1)}{(x+1)^2}.$$

Условие $H_3'(x) = 0$ эквивалентно уравнению $-\varphi(x)+\varphi'(x)(x+1) = 0$. Найдем его корни отдельно на промежутках $(-2\sqrt{\varepsilon},0]$ и $[0,2\sqrt{\varepsilon}]$. На первом из них имеем $\frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{4}x^2 + \frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{2}x = 0$ с единственным решением $x = 0$. На втором промежутке получаем $\frac{3-2\sqrt{\varepsilon}}{4}x^2+\frac{1+2\sqrt{\varepsilon}}{2}x=0$ также с единственным решением $x=0$. Это значит, что максимум функции $H_3(x)$ достигается в точке $x=0$.

Таким образом, мы показали, что

$$E_3(f_\varepsilon)=E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;-1,-2\sqrt{\varepsilon},0)=E(\varphi;P^1;-1,-2\sqrt{\varepsilon},0).$$

Воспользуемся равенством (8):

$$E(\varphi;P^1;-1,-2\sqrt{\varepsilon},0)=-\frac{1}{2}\varphi(0)(1-2\sqrt{\varepsilon})=-\frac{1}{2}M(1-2\sqrt{\varepsilon})=\frac{1}{2}[\varepsilon+2\varepsilon\sqrt{\varepsilon}].$$

Видно, что утверждение (2) справедливо. Это завершает доказательство точности константы $\frac{1}{2}$ из неравенства (a) теоремы 1.

Теперь докажем точность неравенства (b) теоремы 1. Возьмем в качестве $[a,b]$ отрезок $[-3,3]$. Пусть число ε лежит в интервале $\left(0,\frac{1}{10}\right)$. Кусочно линейную функцию h_ε определим следующим образом:

$$h_\varepsilon(x)=\begin{cases}-\varepsilon x-2\varepsilon & \text{на } [-3,-1),\\ \varepsilon x & \text{на } [-1,0),\\ -\varepsilon x & \text{на } [0,-1),\\ \varepsilon x-2\varepsilon & \text{на } [1,3].\end{cases}$$

Рассмотрим функцию $g(x)=\frac{x^2}{2}$. Положим $f_\varepsilon=g+h_\varepsilon$. По теореме 3 имеем $A(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2)=\{g\}$, а также равенство $E(f_\varepsilon)=\|f_\varepsilon-g\|=\|h_\varepsilon\|=\varepsilon$. По теореме 1 получаем $E_3(f_\varepsilon)\le E(f_\varepsilon)=\varepsilon$. С другой стороны, $E_3(f_\varepsilon)\ge E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;-3,1,3)=\varepsilon$, т. е. $E_3(f_\varepsilon)=\varepsilon$.

Для доказательства точности константы $\frac{1}{2}$ из неравенства (b) теоремы 1 достаточно показать, что

$$U_3(f_\varepsilon)=\frac{1}{2}\,E_3(f_\varepsilon)=\frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Рассмотрим все возможные тройки точек вида $x-t<x<x+t$, лежащие на отрезке $[-3,3]$. Разобьем их на три класса:

1) $h_\varepsilon[x-t,x,x+t]<-1$,
2) $h_\varepsilon[x-t,x,x+t]\in[-1,0]$,
3) $h_\varepsilon[x-t,x,x+t]>0$.

В каждом из этих классов вычислим или оценим сверху максимум величины $E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x-t,x,x+t)$, тем самым вычислим величину $U_3(f_\varepsilon)$.

Случай 1. $h_\varepsilon[x-t,x,x+t]<-1$. Заметим, что всегда $-\varepsilon\le h_\varepsilon[x,x+t]\le\varepsilon$. Тогда из простого неравенства

$$-1>h_\varepsilon[x-t,x,x+t]=\frac{h_\varepsilon[x,x+t]-h_\varepsilon[x-t,x]}{2t}\ge\frac{-2\varepsilon}{2t}$$

следует, что $t<\varepsilon$. Воспользуемся леммой 3:

$$\begin{aligned}E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x-t,x,x+t)&=(t/2)^2(|2f_\varepsilon[x-t,x,x+t]|-1)\\&\le\frac{t^2}{4}\left(2\left|-\frac{\varepsilon}{t}+\frac{1}{2}\right|-1\right)\le\frac{t^2}{4}\frac{2\varepsilon}{t}\le\frac{\varepsilon^2}{2}<\frac{\varepsilon}{4}.\end{aligned}$$

В этом случае $E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x-t,x,x+t)<\varepsilon/4$.

Случай 2. $h_\varepsilon[x-t,x,x+t]\in[-1,0]$. Поскольку $g[x-t,x,x+t]=\frac{1}{2}$, в этом случае $f_\varepsilon[x-t,x,x+t]\in[-\frac{1}{2},\frac{1}{2}]$, что по лемме 2 дает $E\big(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x-t,x,x+t\big)=0$.

Случай 3. $h_\varepsilon[x-t,x,x+t]>0$. В этом случае по лемме 4 получаем

$$E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x-t,x,x+t)=E(h_\varepsilon;P_1;x-t,x,x+t).$$

Рассмотрим функцию

$$H_4(t)=E(h_\varepsilon;P_1;x-t,x,x+t)=\frac{1}{4}\left|h_\varepsilon(x-t)+h_\varepsilon(x+t)-2h_\varepsilon(x)\right|$$
$$=|t^2h_\varepsilon[x-t,x,x+t]|. \quad (11)$$

В нашем случае выражение под модулем всегда положительно, поэтому производная $H_4'(t)$ равна $\frac{1}{4}(h_\varepsilon'(x+t)-h_\varepsilon'(x-t))$. Кроме того, поскольку $h_\varepsilon[x-t,x,x+t]>0$, невозможно выполнение условия $-1\le x-t<x+t\le 1$. Более того, если не выполнилось условие $-1\le x-t<x+t\le 1$, то при любом числе $\delta>0$ не выполнится и условие $-1\le (x-t)-\delta<(x+t)+\delta\le 1$. Значит, $H_4'(t)\ge 0$, при $0<t_1<t_2$ имеет место неравенство $H_4(t_1)\le H_4(t_2)$, и увеличение t не выводит за пределы случая 3. Отсюда следует, что в случае 3 можно ограничиться рассмотрением только наборов точек с максимальным t, т. е. наборов вида $(-3,x,x+(x+3))$ при $x\le 0$,

$$\sup_{x,\,t}E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x-t,x,x+t)=\sup_{x\le 0}E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;-3,x,x+(x+3)).$$

Поскольку функция $h_\varepsilon(x)$ кусочно линейная, то и функция

$$d(x)=E(h_\varepsilon;P_1;-3,x,x+(x+3))=(1/4)[\varepsilon+h_\varepsilon(x+(x+3))-2h_\varepsilon(x)]$$

будет кусочно линейной. Точки излома функции $d(x)$ совпадают с объединением точек излома функций $h(x)$ и $h(x+(x+3))$. Поэтому достаточно знать значения функции $d(x)$ только на следующем множестве точек: $\{-3,\,-2,\,-1.5,\,-1,\,0\}$. Подсчитаем их по формуле (11): $d(-3)=0$ $d(-2)=0$, $d(-1.5)=\frac{\varepsilon}{2}$, $d(-1)=\frac{\varepsilon}{2}$, $d(0)=\frac{\varepsilon}{2}$. Имеем $\sup\limits_{x\in[-3,0]}d(x)=\frac{\varepsilon}{2}$. Таким образом, в случае 3 получаем $\sup E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x-t,x,x+t)=\varepsilon/2$. Случай 3 полностью разобран.

Сводя выводы по всем трем случаям воедино, видим, что $U_3(f_\varepsilon)=\sup\limits_{x,\,t}E(f_\varepsilon;\mathscr{D}^2;x-t,x,x+t)=\varepsilon/2$.

Равенство (10) доказано, что и завершает доказательство теоремы 2.

Автор благодарит В. И. Бердышева за постановку задачи и С. Н. Васильева за помощь в работе над статьей.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Мироненко А. В.* Оценка величины наилучшего приближения классом функций с ограниченной второй производной // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 4. С. 842–858.
2. *Шевчук И. А.* Приближение многочленами и следы непрерывных функций на отрезке. Киев: Наук. думка, 1992.
3. *Ремез Е. Я.* Основы численных методов чебышёвского приближения. Киев: Наук. думка, 1969.
4. *Мироненко А. В.* Равномерное приближение классом функций с ограниченной производной // Мат. заметки. 2003. Т. 74, № 5. С. 696–712.
5. *Корнейчук Н. П.* Точные константы в теории приближения. М.: Наука, 1987.

Статья поступила 6 апреля 2006 г., окончательный вариант — 16 июня 2006 г.

Мироненко Александр Васильевич
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. Софьи Ковалевской, 16, Екатеринбург 620219
a_mironenko@mail.ru