Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2007. Том 48, № 6

УДК 517.53/.57

НЕОБХОДИМОЕ И ДОСТАТОЧНОЕ УСЛОВИЕ СУЩЕСТВОВАНИЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ ЛИНЕЙНОГО ФУНКЦИОНАЛА НАД H_1

В. Г. Рябых

Аннотация. Рассмотрена старая проблема: 1) нахождение необходимого и достаточного условия существования функций из единичной сферы пространства Харди (p=1), на которых достигается норма линейного функционала, 2) параметрическое описание множества этих функций, 3) условия единственности экстремальных функций. Доказано, что ответы на эти вопросы следуют из существования и единственности решения линейного однородного интегрального уравнения, у которого ядро явно выражается через функцию, определяющую аналитическое представление упомянутого выше линейного функционала. Его экстремальные функции могут быть получены из решений этого интегрального уравнения.

Ключевые слова: пространство Харди, экстремальная задача, экстремальная функция, exposed point.

Пусть ω — существенно ограниченная функция на $\mathbb{T} = \{t : |t| = 1\}$ и H_p — пространство Харди в единичном круге. Обозначим через l_ω линейный функционал над H_1, определяемый формулой (всюду в дальнейшем $t = e^{i\theta}$, $\zeta = e^{i\varphi}$)

$$l_\omega(X) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} X(t)\overline{\omega(t)}\,d\theta, \quad X \in H_1^0,\ \omega \in L_\infty,\ \overline{\omega} \notin H_\infty. \tag{1}$$

Здесь H_1^0 — множество функций из H_1, равных нулю в начале координат.

Назовем функцию $f \in H_1^0$ *экстремальной* для функционала l, если $l(f) = \|l\|$, $\|f\| = 1$. Будем считать $\chi \in H_\infty$ функцией наилучшего приближения для $\overline{\omega} \in L_\infty$, если $\operatorname{vrai\,max}|\overline{\omega}(\zeta) - \chi(\zeta)| = \inf\limits_{a\in H_\infty} \operatorname{vrai\,max}|\overline{\omega}(\zeta) - a(\zeta)| = \operatorname{dist}(\overline{\omega}, H_\infty)$. Известно, что экстремальная функция существует не у любого функционала над H_1, в то же время наилучшее приближение $\overline{\omega}$ реализуется всегда.

Нам понадобится теорема о двойственной связи двух различных экстремальных задач. Имея в виду дальнейшее применение этой теоремы, сформулируем ее, следуя [1, теорема 4.2] (там же, а также в [2] имеются сведения по истории вопроса).

Теорема А. *Пусть $\overline{\omega} \in L_\infty$, $\overline{\omega} \notin H_\infty$. Тогда*

1. *Имеет место равенство*

$$\sup_{\|x\|_{H_1^0}\le 1}\left|\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} x(t)\overline{\omega}(t)\,d\theta\right| = \inf_{a\in H_\infty} \operatorname{vrai\,max}|\overline{\omega}(\zeta) - a(\zeta)|. \tag{2}$$

2. *Существует* $\chi \in H_\infty$, *для которой* $\operatorname{vrai\,max} |\overline{\omega}(\zeta) - \chi(\zeta)| = \operatorname{dist}(\overline{\omega},\ H_\infty)$. *Если существует экстремальная функция* f, *то это наилучшее приближение* χ *единственно; почти всюду на* $\mathbb{T}$ *справедливо равенство* $|\overline{\omega}(\zeta) - \chi(\zeta)| = \operatorname{dist}(\overline{\omega}, H_\infty)$.

3. *Для того чтобы функция* f *была экстремальной в* (2), необходимо и достаточно выполнение почти всюду на $\mathbb{T}$ соотношения

$$\frac{|f(t)|}{f(t)} = \lambda(\overline{\omega}(t) - \chi(t)), \tag{3}$$

где $\lambda^{-1} = \inf\limits_{a \in H_\infty} \operatorname{vrai\,max} |\overline{\omega}(\zeta) - a(\zeta)| = \operatorname{vrai\,max} |\overline{\omega}(\zeta) - \chi(\zeta)| = \|l_\omega\|$.

Старая проблема состоит в том, чтобы найти 1) необходимое и достаточное условие существования экстремальной функции, 2) условие ее единственности, 3) описание множества экстремальных функций.

Известны 1) условие существования экстремальной функции: $\overline{\omega} \in C + H_\infty$ [3], 2) для $\omega \in C$ условие единственности экстремальной функции f: $f^{-1} \in H_p$, $0 < p < \infty$ [3], 3) «неэффективное» (по оценке самого автора) описание (в предположении существования экстремальной функции) множества экстремальных функций в терминах некоторой внутренней функции и внешней функции, квадрат которой является экстремальной функцией [4].

В статье осуществляется сведение упомянутых выше нелинейных задач к соответствующим проблемам теории линейных однородных интегральных уравнений. Таким образом мы получим ответы на перечисленные выше вопросы, если они известны в теории интегральных уравнений. Раньше в статьях автора [5, 6] подобная редукция позволила полностью решить проблему, но только для функции $\omega \in H_\infty$ со свойствами:

$$\varliminf_{\rho \to 1} \operatorname*{vrai\,max}_{t \in \mathbb{T}} |\omega(t) - \omega(\rho t)| = 0, \quad \int\limits_0^{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \left| \overline{\omega(t)} \frac{\omega(t) - \omega(\zeta)}{t - \zeta} \right|^2 d\varphi d\theta < \infty.$$

В данной работе сняты все ограничения на ω, кроме перечисленных в (1).

Кратко изложим содержание статьи. В ее начале доказаны несколько подготовительных теорем (теоремы 1–3). Затем в теоремах 4 и 5 доказано, что экстремальную функцию можно представить в виде произведения решений, принадлежащих пространству H_2, линейного однородного интегрального уравнения, ядро которого явно выражено через ω. После этого выводится необходимое и достаточное условие существования экстремальной функции у данного функционала (теорема 6) и приводится параметризация множества экстремальных функций. В теореме 8 для l_ω с $\overline{\omega} \in VMO \cap L_\infty$ удается представить экстремальную функцию в виде произведения двух конечных линейных комбинаций некоторой фундаментальной системы функций. Теорема 7 решает вопрос о единственности экстремальной функции. Теорема 10 является частичным решением проблемы единственности наилучшего приближения элементов из L_∞ ограниченными аналитическими функциями [2, гл. IV, замечания].

Теорема 1. *Пусть* Φ ($\|\Phi\|_{H_2} = 1$) *и* $\Psi \in H_2$ — *решения системы уравнений:*

$$\overline{\Phi(t)} = \lambda t \Psi(t) \overline{\omega}(t) + t a_1(t), \quad \overline{\Psi(t)} = \lambda t \Phi(t) \overline{\omega}(t) + t a_2(t) \quad \text{для п. в. } t \text{ из } \mathbb{T} \tag{4}$$

(a_1 *и* a_2 — *некоторые функции из* H_2, *а* λ — *вещественное число*).

Тогда

I. *Если f — экстремальная функция, то ее можно представить в виде $f = \Phi\Psi$, где (Φ, Ψ) — решение системы* (4) *при $\lambda = 1/\|l\|$, причем $|\Phi(t)| = |\Psi(t)|$ для п. в. $t \in \mathbb{T}$.*

II. *Если (Φ, Ψ) — решение системы* (4) *при минимальном положительном λ, то $f = \Phi\Psi$ — экстремальная функция, причем $\lambda = 1/\|l\|$, а $|\Phi(t)| = |\Psi(t)|$ для п. в. $t \in \mathbb{T}$.*

Доказательство. Пусть f — экстремальная функция. Представим ее в виде $f = tF^2b$, где $F \in H_2$ — внешняя, а b — внутренняя функции. По теореме A

$$\frac{|f(t)|}{f(t)} = \frac{\overline{F(t)}}{tF(t)b(t)} = \frac{1}{\|l\|}(\overline{\omega}(t) - \chi(t)),$$

т. е. почти всюду на $\mathbb{T}$ имеем $(\lambda = 1/\|l\|)$

$$\overline{F(t)} = \lambda(tF(t)b(t)\overline{\omega}(t) - tF(t)b(t)\chi(t)), \quad \overline{F(t)b(t)} = \lambda(tF(t)\overline{\omega}(t) - tF(t)\chi(t)). \tag{5}$$

Полагая $\Phi = F$, $\Psi = Fb$, $-Fb\chi = a_1$, $-F\chi = a_2$, получим (4).

Пусть теперь (Φ, Ψ) — решение системы (4). Умножая первое из равенств (4) на Φ, второе — на Ψ, получим

$$\begin{gathered} |\Phi(t)|^2 = \lambda t\Phi(t)\Psi(t)\overline{\omega}(t) + t\Phi(t)a_1(t), \\ |\Psi(t)|^2 = \lambda t\Phi(t)\Psi(t)\overline{\omega}(t) + t\Psi(t)a_2(t) \quad \text{для п. в. } t \text{ из } \mathbb{T}. \end{gathered} \tag{6}$$

Вычитая второе равенство из первого, заключаем, что вещественная функция $|\Phi(t)|^2 - |\Psi(t)|^2$ п. в. на $\mathbb{T}$ совпадает с граничным значением функции из H_1^0 и потому равна нулю (так как равны нулю все ее коэффициенты Фурье). Следовательно, $|\Psi(t)| = |\Phi(t)|$ и $\|\Phi\Psi\|_{H_1} = \|\Psi\|_{H_2} = \|\Phi\|_{H_2} = 1$.

Заменяя в левой части первого из равенств (6) $|\Phi|$ на $|\Psi|$, получим $|\Phi\Psi| = \lambda t\Phi\Psi\overline{\omega} + d$ $(d \in H_1^0)$ п. в. на $\mathbb{T}$. Отсюда после интегрирования имеем

$$1 = \frac{\lambda}{2\pi}\int_0^{2\pi} t\Phi\Psi\overline{\omega}\, d\theta. \tag{7}$$

Заметим, что положительное λ не может быть меньше $1/\|l\|$, иначе наш функционал принимал бы на единичной сфере пространства H_1^0 значение, большее своей нормы. Таким образом, равенство (7) означает, что $t\Phi\Psi$ является экстремальной функцией. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если в* (1) $\omega \in VMO \cap L_\infty$, *то существует экстремальная функция.*

Доказательство. Пусть последовательность $\{f_n\}$ элементов пространства H_1^0 такова, что $l(f_n) \to \|l\|$, $\|f_n\| \le 1$. Из последовательности $\{f_n(z)\}$ можно выбрать подпоследовательность, равномерно сходящуюся в круге $|z| < 1$. Будем считать, что уже сама последовательность $\{f_n\}$ равномерно сходится внутри единичного круга к функции $f(z)$ $(f \in H_1^0, \|f\| \le 1)$.

Так как $\omega \in VMO$, существует последовательность $\{\omega_n\}$ непрерывных на $\mathbb{T}$ функций таких, что $\|\omega - \omega_n\|_{BMO} \to 0$ [2] (замечание после доказательства теоремы 5.2 из гл. VI). Обозначим

$$l_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} x\overline{\omega}_n\, d\theta, \quad x \in H_1^0,$$

$$|l(f_m)-l(f)|=|l(f_m-f)|\le|(l-l_n)f_m|+|(l_n-l)f|+\left|\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{T}}(f_m-f)\overline{\omega}_n\,d\theta\right|. \quad (8)$$

По теореме Феффермана [2, гл VI, теорема 4.4] для любого $\varepsilon>0$ найдется такое $n(\varepsilon)$, что при произвольном m выполняется

$$|(l-l_n)f_m|\le C\|\omega-\omega_n\|_{BMO}<C\varepsilon,\quad |(l_n-l)f|\le C\|\omega-\omega_n\|_{BMO}<C\varepsilon.$$

В силу леммы 4.1 из работы [1] граничные следы функций f_n слабо сходятся на $\mathbb{T}$ (как функционалы над $C(\mathbb{T})$) к f. Поэтому при достаточно большом m последнее слагаемое в (8) также меньше ε, откуда $l(f)=\lim\limits_{n\to\infty}l(f_n)=\|l\|$. Теорема доказана.

В дальнейшем нам понадобятся три следующих хорошо известных результата.

I. Пусть Φ^+ и Φ^- — угловые предельные значения интеграла $\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(t)}{t-z}\,dt$ при стремлении z к точке $\zeta\in\mathbb{T}$ соответственно изнутри или извне $\mathbb{T}$. Тогда

1. Из теоремы Рисса [7 гл. 9, п. 3] вытекает: если $\varphi\in L_p$, $1<p<\infty$, то $\|\Phi^\pm\|_{L_p}\le C\|\varphi\|_{L_p}$ и Φ^+,Φ^- являются угловыми граничными значениями функций соответственно из пространств H_p и $\overline{H}^0_p$.

2. По теореме Привалова [8, гл. III, (2.3:1)] для п. в. $\zeta\in\mathbb{T}$ выполняется

$$\Phi^+(\zeta)-\Phi^-(\zeta)=\varphi(\zeta),\quad \Phi^+(\zeta)+\Phi^-(\zeta)=\frac{1}{\pi i}(v.p.)\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\varphi(t)}{t-\zeta}\,dt. \quad (9)$$

3. Из той же теоремы при $\varphi\in L_p$ $(1<p<\infty)$ следует, что

$$\Phi^+(\zeta)=\frac{1}{\pi i}(v.p.)\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\Phi^+(t)}{t-\zeta}\,dt \quad\text{и}\quad \Phi^-(\zeta)=-\frac{1}{\pi i}(v.p.)\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\Phi^-(t)}{t-\zeta}\,dt. \quad (10)$$

II [2, гл. VI, упр. 16]. Коммутатор (интегралы понимаются в смысле главного значения)

$$[B,H]g=\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{b(t)g(t)}{t-\zeta}\,dt-\frac{b(\zeta)}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{g(t)}{t-\zeta}\,dt$$

ограничен в L_2, и

$$C_1\|b\|_{BMO}\le\|[B,H]\|_{L_2}\le C_2\|b\|_{BMO}. \quad (11)$$

III [9, гл. VI, п. 4.2, (6.34)]. Если кривая Γ — граница некоторой конечной области — имеет непрерывную кривизну, $u\in L_p$, $v\in L_q$, $1<p<\infty$, $1/p+1/q=1$, то

$$\int\limits_{\Gamma}u(\zeta)\,d\zeta(v.p.)\int\limits_{\Gamma}\frac{v(t)}{t-\zeta}\,dt=\int\limits_{\Gamma}v(t)\,dt(v.p.)\int\limits_{\Gamma}\frac{u(\zeta)}{t-\zeta}\,d\zeta. \quad (12)$$

Теорема 3. *Обозначим*

$$T(y)(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}y(t)\overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(t)-\omega^+(\zeta)}{t-\zeta}\,dt \quad (13)$$

(интеграл понимается в смысле главного значения). Тогда оператор T

1°) *при $\omega \in L_\infty$ непрерывно отображает L_2 в H_2;*

2°) *является положительным оператором над пространством H_2;*

3°) *при $\omega \in VMO \bigcap L_\infty$ является компактным оператором из L_2 в H_2.*

Доказательство. 1° $\omega^+ \in BMO$, а потому, применяя оценку коммутатора, имеем

$$\|T(y)\|_{L_2} \le C_2 \|\omega^+\|_{BMO} \|y\overline{\omega}\|_{L_2} \le C_3 \|\omega\|_\infty \|y\|_{L_2}.$$

На основании (9) выводим

$$\begin{aligned}2T(y) &= ((y\overline{\omega}\omega^+)^+ + (y\overline{\omega}\omega^+)^-) - ((y\overline{\omega})^+\omega^+ + (y\overline{\omega})^-\omega^+)\\ &= 2(y\overline{\omega}\omega^+)^+ - y\overline{\omega}\omega^+ - (2(y\overline{\omega})^+\omega^+ - y\overline{\omega}\omega^+) = 2(y\overline{\omega}\omega^+)^+ - 2(y\overline{\omega})^+\omega^+;\end{aligned}$$

но уменьшаемое и вычитаемое находятся в H_1, а их разность — в L_2, следовательно, функция $T(y)$ принадлежит H_2.

2°. Сначала рассмотрим $y \in H_\infty$. В этом случае для скалярного произведения получаем

$$\begin{aligned}\langle T(y), y\rangle &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} T(y)\bar{y}\, d\varphi = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} T(y)\overline{\zeta y}\, d\zeta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \overline{\zeta y(\zeta)}\, d\zeta \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} y(t)\overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(t) - \omega^+(\zeta)}{t-\zeta}\, dt\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} y(t)\overline{\omega}(t)\, dt \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \overline{\zeta y(\zeta)}\frac{\omega^+(\zeta) - \omega^+(t)}{\zeta - t}\, d\zeta. \qquad (14)\end{aligned}$$

Перестановка порядка интегрирования сделана на основании (12).

Имеем

$$I(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \overline{\zeta y}\frac{\omega^+(\zeta) - \omega^+(t)}{\zeta - t}\, d\zeta = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\zeta y(\zeta)}\omega^+(\zeta)}{\zeta - t}\, d\zeta + \overline{ty}\omega^+(t)\right).$$

Полагая $\overline{\zeta y}\omega^+ = \eta^+ - \bar{\zeta}\eta^- (\eta^+, \overline{\eta^-} \in H_p, 0 < p < \infty)$, с помощью (9) и (10) выводим $I(t) = \frac{1}{2}(\eta^+ + \bar{\zeta}\eta^- + \eta^+ - \bar{\zeta}\eta^-) = \eta^+$. Следовательно,

$$\langle T(y), y\rangle = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} y(t)\overline{\omega(t)}\eta^+\, dt,$$

но $y\overline{\omega} = y(\overline{\omega^+} - \overline{\omega^-}) = -\overline{\eta^-} + \overline{\zeta\eta^+} - y\overline{\omega^-}$. Обозначая сумму первого и последнего слагаемых через $\phi \in H_p$, $0 < p < \infty$, имеем ($\phi\eta^+ \in H_1$)

$$\begin{aligned}\langle T(y), y\rangle &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} y\overline{\omega}\eta^+\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} (\phi + \overline{\zeta\eta^+})\eta^+\, d\zeta\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{T}} \phi\eta^+\, d\zeta + \frac{1}{2\pi}\int_{\mathbb{T}} |\eta^+|^2\, d\varphi = \|\eta^+\|_2^2 \ge 0.\end{aligned}$$

Таким образом, рассматриваемый оператор, будучи положительным на множестве, плотном в H_2, положителен.

3°. Пусть функция $\omega(\rho\zeta) = P_\rho * \omega(t)$, $0 \le \rho < 1$, является преобразованием Пуассона. Тогда проектор Рисса от этой функции совпадает с $\omega^+(\rho\zeta)$. Далее, оператор

$$T_\rho(y) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} y(t)\overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(\rho t) - \omega^+(\rho\zeta)}{t-\zeta}\,dt$$

компактен при $0 < \rho < 1$, так как

$$\left|\overline{\omega(t)}\frac{\omega^+(\rho t) - \omega^+(\rho\zeta)}{t-\zeta}\right| \le C(\rho) < \infty.$$

Используя (11), оценим норму оператора $T - T_\rho$ ($\zeta = e^{i\varphi}$):

$$\|T - T_\rho\| = \frac{\sup\limits_{y\in L_2}\|(T-T_\rho)(y)\|_{L_2}}{\|y\|_{L_2}}$$

$$= \frac{1}{\|y\|}\sup_{y\in L_2}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} y(t)\overline{\omega}(t)\frac{(\omega^+(t)-\omega^+(\rho t)) - (\omega^+(\zeta) - \omega^+(\rho\zeta))}{t-\zeta}\,dt\right|^2\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{\|y\|}\left(\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} d\varphi\left|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} y(t)\overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(t)-\omega^+(\rho t)}{t-\zeta}\,dt\right.\right.$$

$$\left.\left. - (\omega^+(\zeta) - \omega^+(\rho\zeta))\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{y(t)\overline{\omega}(t)}{t-\zeta}\,dt\right|^2\right)^{1/2}$$

$$\le \frac{1}{\|y\|}\|[\omega^+(t) - \omega^+(\rho t), H](y\overline{\omega})\|_{L_2}$$

$$\le C\|\omega^+(t) - \omega^+(\rho t)\|_{BMO} \le C_1\|\omega(t) - \omega(\rho t)\|_{BMO}.$$

Но $\omega \in VMO$, поэтому на основании теоремы 5.1 из [2, гл. VI] можем утверждать, что $\|\omega(t)-\omega(\rho t)\|_{BMO} \to 0$ при $\rho \to 1$, а это означает, что $\lim\limits_{\rho\to 1}\|T-T_\rho\|=0$. Теперь из теоремы о компактности предела последовательности компактных операторов [10, теорема VI.12] следует утверждение 3°.

Теорема 4. *Если у функционала* (1) *существует экстремальная функция, то* Φ *и* Ψ *из теоремы* 1 *являются решениями интегрального уравнения*

$$Y(\zeta) = \frac{\lambda^2}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(t)-\omega^+(\zeta)}{t-\zeta}Y(t)\,dt, \tag{15}$$

в котором $\lambda = 1/\|l\|$, $\omega(t) = \omega^+(t) - \omega^-(t)$, *а интеграл понимается в смысле главного значения.*

Доказательство. Пусть $f(\zeta)$ — экстремальная функция. Тогда по теореме 1 ее можно представить в виде $f(\zeta) = \zeta\Phi(\zeta)\Psi(\zeta)$, причем для последних выполняются равенства (a_1, a_2 некоторые функции из H_2)

$$\lambda\Phi\overline{\omega} = \overline{t\Psi} - a_2, \quad \lambda\Psi\overline{\omega} = \overline{t\Phi} - a_1. \tag{16}$$

Рассмотрим равенство

$$I = \lambda^2\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\Phi(t)\overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(t)-\omega^+(\zeta)}{t-\zeta}\,dt = \lambda\left(\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\lambda\Phi(t)\overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(t)-\omega^+(\zeta)}{t-\zeta}\,dt\right).$$

Заменяя $\lambda\Phi\overline{\omega}$ равной ей функцией из правой части первого из уравнений системы (16), имеем

$$I = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}(\overline{t\Psi(t)} - a_2(t))\frac{\omega^+(t) - \omega^+(\zeta)}{t-\zeta}\,dt\right),$$

затем, используя равенства (10) и проделывая необходимые упрощения, получим

$$I = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\overline{t\Psi(t)}\omega^+(t)}{t-\zeta}\,dt + \overline{\zeta\Psi(\zeta)}\omega^+(\zeta)\right).$$

Так как $\omega = \omega^+ - \omega^-$, второе уравнение системы (16) запишем в виде $\lambda\overline{t\Psi}\omega^+ = \Phi - \overline{t(a_1 - \lambda\Psi\overline{\omega^-})} = \Phi - \overline{tb_1}$ ($\overline{tb_1} \in \overline{H_p^0}$, $p < 2$). Заменим в представлении I функцию $\overline{t\Psi}\omega^+$ равной ей функцией $\Phi - \overline{tb_1}$, затем, учитывая (10), получим

$$\begin{aligned}I &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\lambda\overline{t\Psi(t)}\omega^+(t)}{t-\zeta}\,dt + \lambda\overline{\zeta\Psi(\zeta)}\omega^+(\zeta)\right)\\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\Phi - \overline{tb_1(t)}}{t-\zeta}\,dt + \Phi(\zeta) - \overline{\zeta b_1(\zeta)}\right)\\ &= \frac{1}{2}(\Phi(\zeta) + \overline{\zeta b_1} + \Phi(\zeta) - \overline{\zeta b_1}) = \Phi(\zeta).\end{aligned}$$

Аналогично доказывается, что и Ψ удовлетворяет уравнению (15). Теорема доказана.

Теорема 5. *Пусть функция Φ ($\|\Phi\|_{H_2} = 1$) является решением уравнения (15), соответствующим характеристическому числу $\lambda^2 = 1/\|l\|^2$, а $\overline{t\Psi}$ — проекция функции $\lambda\Phi\overline{\omega}$ на $\overline{H_2^0}$. Тогда*

1) экстремальная функция существует и представима в виде $f = \zeta\Phi\Psi$;

2) $1/\|\lambda\|^2$ равно наименьшему характеристическому числу оператора T;

3) если у оператора T отсутствует непрерывный спектр, то $\|l\|^2 = \|T\| = r(T)$, где $r(T)$ — спектральный радиус оператора T.

Доказательство. 1. Положим

$$\lambda\Phi\overline{\omega} = \overline{t\Psi} + a, \quad a \in H_2. \tag{17}$$

Имеем

$$\Phi(\zeta) = \frac{\lambda^2}{2\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\Phi\overline{\omega}(t)\frac{\omega^+(t) - \omega^+(\zeta)}{t-\zeta}\,dt = \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}(\overline{t\Psi} + a)\frac{\omega^+(t) - \omega^+(\zeta)}{t-\zeta}\,dt\right). \tag{18}$$

Упростим это выражение, вновь используя формулы (10). Получим

$$\begin{aligned}\Phi(\zeta) &= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\overline{t\Psi(t)}\omega^+(t)}{t-\zeta}\,dt - \omega^+(\zeta)\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\overline{t\Psi(t)}}{t-\zeta}\,dt\right)\\ &= \frac{\lambda}{2}\left(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}}\frac{\overline{t\Psi(t)}\omega^+(t)}{t-\zeta}\,dt + \omega^+(\zeta)\overline{\zeta\Psi(\zeta)}\right).\end{aligned} \tag{19}$$

Вычитая из (19) равенство

$$0 = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{t\Psi}\omega^-}{t-\zeta}\,dt + \overline{\zeta\Psi}\omega^-,$$

имеем

$$\Phi(\zeta) = \lambda/2\biggl(\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{t\Psi(t)}\omega(t)}{t-\zeta}\,dt + \omega(\zeta)\overline{\zeta\Psi(\zeta)}\biggr). \tag{20}$$

Из (9) следует, что

$$\overline{\zeta\Psi(\zeta)}\omega(\zeta) + 2(\overline{\zeta\Psi(\zeta)}\omega(\zeta))^- = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{\mathbb{T}} \frac{\overline{t\Psi(t)}\omega(t)}{t-\zeta}\,dt.$$

Преобразуем правую часть (20), заменяя в ней интеграл по только что приведенной формуле:

$$\Phi(\zeta) = \lambda/2(\overline{\zeta\Psi(\zeta)}\omega(\zeta) + 2(\overline{\zeta\Psi(\zeta)}\omega(\zeta))^- + \overline{\zeta\Psi(\zeta)}\omega(\zeta)).$$

Отсюда, полагая $\lambda(\overline{\zeta\Psi(\zeta)}\omega(\zeta))^- = \overline{\zeta a_1(\zeta)} \in \overline{H_2^0}$, имеем

$$\Phi(\zeta) = \lambda\overline{\zeta\Psi(\zeta)}\omega(\zeta) + \overline{\zeta a_1(\zeta)}.$$

Присоединяя к выведенному соотношение (17), получим

$$\overline{\Phi(\zeta)} = \lambda\zeta\Psi(\zeta)\overline{\omega}(\zeta) + \zeta a_1(\zeta), \quad \overline{\Psi(\zeta)} = \lambda\zeta\Phi(\zeta)\overline{\omega}(\zeta) - \zeta a(\zeta) \quad \text{для п. в. } \zeta \text{ из } \mathbb{T}. \tag{21}$$

Заключаем, что (Φ, Ψ) является решением системы (4). Следовательно, по теореме 1 $f = t\Phi\Psi$ — экстремальная функция.

2. Оператор T положителен, поэтому все его характеристические числа положительны. При этом характеристическое число, равное $1/\|l\|^2$, не может быть больше минимального, так как тогда на нормированной функции $f_\nu = t\Phi_\nu\Psi$, соответствующей минимальному характеристическому числу ν^2, значение функционала l_ω было бы больше его нормы. Следовательно, $1/\|l\|^2$ — наименьшее положительное характеристическое число.

3. Оператор T положителен, тем самым самосопряжен, а у последнего нет остаточного спектра. Поэтому на основании теоремы VI.6 из [10] выполняется $\|T\| = r(T) = \|l\|^2$. Теорема доказана.

Из теорем 4 и 5 вытекает

Теорема 6. *Для того чтобы у функционала (1) существовала экстремальная функция, необходимо и достаточно, чтобы число $\|l\|^2$ было наибольшим собственным числом уравнения (15). При этом любую экстремальную функцию можно представить в виде $\frac{\zeta\Phi\Psi}{\|\Phi\Psi\|_1}$, где Φ — нетривиальное решение уравнения $\|l\|^2 y = T(y)$ в пространстве H_2, а $t\Psi$ — проекция функции $\frac{1}{\|l\|}\overline{\Phi}\omega$ на H_2^0.*

Теорема 7. *Экстремальная функция f единственна тогда и только тогда, когда уравнение $\|l\|^2 y = T(y)$ имеет единственное фундаментальное решение.*

Доказательство следует из теоремы 6.

Теорема 8. *Пусть $\omega \in VMO \cap L_\infty$. Тогда экстремальную функцию почти всюду на $\mathbb{T}$ можно представить в виде*

$$f(t) = \frac{t}{2\sqrt{\mu}} \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k(t) \sum_{k=1}^{n} \overline{C}_k \left(\overline{t\varphi_k(t)} \omega(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\zeta\varphi_k}\omega}{\zeta - t} \, d\zeta \right), \tag{22}$$

где n — кратность полюса функции R_T ($R_T(\mu) = (\mu I - T)^{-1}$) в точке $\mu = r(T)$, φ_k — фундаментальная система решений, соответствующая характеристическому числу $1/\|l\|^2$, $C_1, C_2, \dots, C_n$ — комплексные числа, выбранные таким образом, что $\|f\| = 1$, $\frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} f\overline{\omega} d\theta > 0$. Обратно, функция f из (22) — экстремальная функция для функционала (1).

Доказательство. Если $\omega \in VMO \cap L_\infty$, то по теореме 2 экстремальная функция существует и по теореме 1 ее можно представить в виде $f = \zeta\Phi\Psi$. При этом, как следует из теоремы 4, функции Φ и Ψ удовлетворяют уравнению (15). Оператор T положительный, следовательно, самосопряженный. Так как он по теореме 3 к тому же компактный, по теореме Гильберта — Шмидта [10, теорема VI.16] его собственное значение $\|l\|^2$ имеет конечную кратность n, равную кратности полюса функции $R_T(\mu)$ при $\mu = r(T)$. Тем самым функцию Φ можно представить в виде

$$\Phi = \sum_{k=1}^{n} C_k \varphi_k. \tag{23}$$

Для нахождения Ψ воспользуемся вторым уравнением из (4). Из него вытекает, что $\Psi(t) = \lambda \overline{t\Phi(t)}\omega(t) + \overline{ta_2(t)}$, следовательно,

$$\Psi(z) = \frac{\lambda}{2\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{t\Phi}\omega}{t - z} \, dt, \quad |z| < 1.$$

По формулам (9) имеем

$$\Psi(t) = \frac{\lambda}{2} \left(\overline{t\Phi(t)}\omega(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\zeta\Phi}\omega}{\zeta - t} \, d\zeta \right). \tag{24}$$

Подставляя в эту формулу Φ из (23), получим

$$\Psi(t) = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} \overline{C_k} \left(\overline{t\varphi_k(t)}\omega(t) + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\zeta\varphi_k(\zeta)}\omega(\zeta)}{\zeta - t} \, d\zeta \right). \tag{25}$$

Отсюда следует (22).

Пусть теперь φ_k — фундаментальная система собственных функций уравнения (15). Положим $\Phi = \sum\limits_{k=1}^{n} C_k \varphi_k$, тогда в соответствии с равенством (18)

$$\Psi = \lambda \overline{t\Phi}\omega - \overline{ta}. \tag{26}$$

Из этого равенства, действуя, как при выводе (25), получим

$$\Psi = \frac{\lambda}{2} \sum_{k=1}^{n} \overline{C_k} \left(\overline{t\varphi_k}\omega + \frac{1}{\pi i} \int_{\mathbb{T}} \frac{\overline{\zeta\varphi_k}\omega \, d\zeta}{\zeta - t} \right). \tag{27}$$

По теореме 5 заключаем (напомним: $\lambda = 1/\|l\| = 1/\sqrt{r(T)} = 1/\sqrt{\mu}$), что (22) — экстремальная функция. Теорема доказана.

Теорема 9. *Пусть $\omega \in VMO \cap L_\infty$. Для того чтобы функционал l_ω имел единственную экстремальную функцию, необходимо и достаточно, чтобы функция $R_T(\mu)$ имела в точке $\mu = \|l_\omega\|^2$ простой полюс.*

Этот результат следует из предыдущей теоремы.

Теорема 10. *Если $\omega \in VMO \cap L_\infty$, то функция $\overline{\omega}$ имеет единственное наилучшее приближение функциями из H_∞ в норме L_∞ и выполняется равенство $\operatorname{dist}(\overline{\omega}, H_\infty) = \sqrt{\mu}$, где μ — наибольший из полюсов функции $R_T(\mu)$, а само наилучшее приближение χ может быть вычислено почти для всех t, $|t| = 1$, по формуле*

$$\chi(t) = \sqrt{\mu}\frac{|f(t)|}{f(t)} - \overline{\omega}(t).$$

Здесь f определяется формулой (22).

Доказательство. Первое утверждение следует из теорем A и 2, справедливость второго вытекает из теоремы 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Хавинсон С. Я.* Основы теории экстремальных задач для ограниченных аналитических функций и их различных обобщений. М.: МИСИ, 1981.
2. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.
3. *Carleson L., Jacobs S.* Best uniform approximation by analytic functions // Arc. Math. 1972. V. 10, N 2. P. 219–229.
4. *Hayshi E.* The solution set of extremal problem in H_1 // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 3, N 3. P. 690–696.
5. *Рябых В. Г.* Вид экстремальной функции линейного функционала над пространством H_1. Деп в ВИНИТИ 10.08.01. № 1857-В2001. 15 с.
6. *Рябых В. Г.* Экстремальные функции линейного функционала над пространством Харди // Изв. вузов Северо-Кавказского региона. Естественные науки. 2003. № 6. С. 10–13.
7. *Гофман К.* Банаховы пространства аналитических функций. М.: Изд-во иностр. лит., 1963.
8. *Привалов И. И.* Граничные свойства аналитических функций. М.: Гостехиздат, 1950.
9. *Интегральные уравнения* / П. П. Забрейко, А. И. Кошелев, М. А. Красносельский и др. М.: Наука, 1968.
10. *Рид М. Саймон Б.* Методы современной математической физики. М.: Мир, 1977. Т. 1.

Статья поступила 13 марта 2006 г., окончательный вариант — 20 февраля 2007 г.

Рябых Владимир Георгиевич
Ростовский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Зорге, 5, Ростов-на-Дону 344090
ryabich@aaanet.ru