Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 517.958

ИНДИКАТОР КОНТАКТНЫХ ГРАНИЦ ДЛЯ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ИНТЕГРАЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

Д. С. Аниконов

Аннотация. Ставится и исследуется довольно специфическая задача интегральной геометрии. В двумерном пространстве рассматриваются всевозможные прямые, пересекающие некоторую область. Известными данными считаются интегралы по всем таким прямым от неизвестной кусочно гладкой функции, зависящей как от точек области, так и от переменных, характеризующих прямые. Искомым объектом считается линия разрывов подынтегральной функции. Своим происхождением задача обязана предыдущим исследованиям автора в области рентгеновской томографии. По существу, она является обобщением одного математического аспекта теории дефектоскопии, но, по-видимому, представляет и самостоятельный интерес. Основным результатом работы является построение специальной функции, которая может быть неограниченной только вблизи искомой линии. Именно это свойство и послужило основанием для названия этой функции *индикатором контактных границ*. Теорема единственности решения сравнительно легко следует из указанного свойства индикатора.

Ключевые слова: интегральная геометрия, обратная задача, сингулярный интеграл, томография.

§ 1. Обозначения, предположения и постановка задачи

Пусть $\mathscr{D}$ — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$. Ее диаметр обозначим через d. Рассмотрим систему областей $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \dots, p$, таких, что

$$\mathscr{D}_i \subset \mathscr{D}; \quad \mathscr{D}_i \cap \mathscr{D}_j = \varnothing,\ i \neq j; \quad \mathscr{D}_0 = \bigcup_{i=1}^{p} \mathscr{D}_i, \quad \overline{\mathscr{D}}_0 = \overline{\mathscr{D}}.$$

Нетрудно видеть, что объединение границ $\partial\mathscr{D}_i$ областей $\mathscr{D}_i$, $i = 1, \dots, p$, совпадает с границей $\partial\mathscr{D}_0$ объединения этих же областей. Считаем, что замкнутые линии $\partial\mathscr{D}_i$ кусочно гладкие класса C^2. Точнее говоря, сделаем следующие предположения. Условимся обозначать координаты точек x, y, z, ω из $\mathbb{R}^2$ в основной системе координат соответственно через $(x_1, x_2), (y_1, y_2), (z_1, z_2), (\omega_1, \omega_2)$. Определим точку $z \in \partial\mathscr{D}_0$ как контактную для областей $\mathscr{D}_j$ и $\mathscr{D}_l$, $1 \leq j,\ l \leq p$, если в некоторой окрестности $V(z)$ точки z нет точек областей $\mathscr{D}_i$, кроме $\mathscr{D}_j$ и $\mathscr{D}_l$, а общий участок двух границ $V(z) \cap \partial\mathscr{D}_j = V(z) \cap \partial\mathscr{D}_l$ может быть представлен графиком гладкой функции в локальных координатах. Считается, что в этой локальной системе координат с центром в точке z первая ось направлена вдоль

Работа выполнена при финансовой поддержке Совета по грантам Президента РФ и государственной поддержке научных школ (НШ–1440.2008.1), а также при финансовой поддержке СО РАН (междисциплинарные интеграционные проекты № 2006–3, № 2006–48).

касательной к ∂D_j (или к $\partial\mathscr{D}_l$) в точке z. Вторая ось направлена по единичному вектору внутренней нормали $n_j(z)$ к $\partial\mathscr{D}_j$ в точке z, причем кратчайший поворот от первой оси ко второй осуществляется против часовой стрелки так же, как и в основной системе координат. Используя для любой точки $y \in \mathbb{R}^2$ локальные координаты (ξ, η), предполагаем, что

$$V(z) \cap \partial\mathscr{D}_j = V(z) \cap \partial\mathscr{D}_l = \{(\xi,\eta),\ |\xi| < \delta,\ \eta = \psi(\xi)\},$$

$$\psi(\xi) \in C^2(-\delta,\delta), \quad \psi(0) = \psi'(0) = 0.$$

Отметим, что положительное число δ и функция $\psi(\xi)$, вообще говоря, зависят от z. Будем считать, что в множестве $\partial\mathscr{D}_0 \setminus \partial\mathscr{D}$ все точки контактные, кроме, быть может, их конечного числа.

Легко видеть, что выполняется неравенство $|\psi(\xi)| \le \mathrm{const}\,|\xi|^2$. Здесь и далее символ const обозначает некоторое положительное число.

Рассмотрим круг, круговое кольцо и единичную окружность в $\mathbb{R}^2$:

$$B(x,r) = \{y : y \in \mathbb{R}^2,\ |y-x| < r\},\ B(x,r_1,r_2) = \{y : y \in \mathbb{R}^2,\ 0 < r_1 < |y-x| < r_2\},$$

$$\Omega = \{\omega : \omega \in \mathbb{R}^2,\ |\omega| = 1\}.$$

Для векторов единичной окружности Ω используем обозначение ω, иногда заменяя ω на s, когда желательно подчеркнуть представление $s = (y-x)/|y-x|$. Для любой контактной точки $z \in \partial G_j \cap \partial G_l$ определим полуплоскости

$$\mathbb{R}^+(x) = \{y : y \in \mathbb{R}^2,\ (y-x, n_j(z)) > 0\},\ \mathbb{R}^-(x) = \{y : y \in \mathbb{R}^2,\ (y-x, n_j(z)) \le 0\},$$

$$\mathbb{R}^+(z) = \{y : y \in \mathbb{R}^2,\ (y-z, n_j(z)) > 0\},\ \mathbb{R}^-(z) = \{y : y \in \mathbb{R}^2,\ (y-z, n_j(z)) \le 0\}.$$

Пусть для $(x,y,\omega) \in \mathscr{D}\times\mathscr{D}\times\Omega$ задана функция $g(x,y,\omega)$, имеющая при $(x,y,\omega) \in \mathscr{D}\times\mathscr{D}_i\times\Omega$, $i = 1,\dots,p$, равномерно непрерывные частные производные первого порядка по x_1 и x_2. Для описания гладкости функций, заданных на Ω, используем следующую трактовку [1]. Продолжим $g(x,y,\omega)$ по ω в круговое кольцо $B(0,r_1,r_2), 0 < r_1 < 1 < r_2$, считая $g(x,y,t\omega)$ постоянной при $t \in (r_1,r_2)$, и потребуем, чтобы таким образом продолженная функция $g(x,y,v)$, $v = (v_1,v_2)$, $v \in B(0,r_1,r_2)$, имела первые частные производные по v_1, v_2, равномерно непрерывные в $\mathscr{D}\times\mathscr{D}_i\times B(0,r_1,r_2)$, $i = 1,\dots,p$. Значения этих производных при $v = \omega$ и будут считаться производными от $g(x,y,\omega)$ по ω_1,ω_2. Обратим внимание на то, что в подробной записи функция g зависит от шести переменных: $g(x_1,x_2,y_1,y_2,\omega_1,\omega_2)$. Имея в виду эту запись, через $D_k g(x,y,\omega)$ будем обозначать частную производную по k-й переменной, $k = 1,2,5,6$. Относительно переменной y функция $g(x,y,\omega)$ и ее частные производные $D_k g(x,y,\omega)$, $k = 5,6$, считаются кусочно непрерывными по Гёльдеру, точнее говоря, существует такое число α, $0 < \alpha \le 1$, что

$$|g(x,y,\omega) - g(x,u,\omega)| + |D_k g(x,y,\omega) - D_k(x,u,\omega)| \le \mathrm{const}\,|y-u|^\alpha, \tag{1.1}$$

$k = 5,6$, $y,u \in \mathscr{D}_i$, $i = 1,\dots,p$, где число const не зависит от i,k,x,y,u,ω,α.

Из сделанных предположений следует, что при всех $(x,\omega) \in \mathscr{D}\times\Omega$ существуют конечные пределы функции $g(x,y,\omega)$ и производных $D_k g(x,y,\omega)$, $k = 5,6$, при $y \to z$, $z \in \partial\mathscr{D}_j$, $y \in \mathscr{D}_j$, $j = 1,\dots,p$, которые обозначим через $g_j(x,z,\omega)$, $D_k g_j(x,z,\omega)$. Более того, имеет место неравенство

$$|g(x,y,\omega) - g_j(x,z,\omega)| + |D_k g(x,y,\omega) - D_k g_j(x,z,\omega)| \le \mathrm{const}\,|y-z|^\alpha, \tag{1.2}$$

$y \in \mathscr{D}_j$, $k = 1, 2$.

Считая, что z — контактная точка для $\mathscr{D}_j$ и $\mathscr{D}_l$, определим скачок функции $g(x, y, \omega)$ при $y = z$ по формуле $[g(x, z, \omega)]_{j,l} = g_j(x, z, \omega) - g_l(x, z, \omega)$.

Заметим, что для удобства оформления функция $g(x, y, z)$ определена для всех $y \in \mathscr{D}$, но при этом значения $g(x, z, \omega)$ и $g_j(x, z, \omega)$ не обязаны совпадать. Аналогично [2] будем предполагать, что множество $\mathscr{D}_0$ является обобщенно выпуклым, т. е. любой луч $L_{x,\omega} = \{x + t\omega,\ t \geq 0\}$, $(x, \omega) \in \mathscr{D} \times \Omega$, пересекает линию $\partial\mathscr{D}_0$ в конечном числе точек. Отсюда, в частности, следует, что при фиксированных x, ω функция $g(x, x + t\omega, \omega)$ является кусочно непрерывной по t, имеющей не более конечного числа точек разрыва. Для упрощения записи будем предполагать, что функция $g(x, y, \omega)$ продолжена по y нулем вне $\mathscr{D}$.

Целью настоящей работы является исследование единственности решения следующей задачи интегральной геометрии.

Задача. *Найти линию $\partial\mathscr{D}_0$ из уравнения*

$$\int_{-d}^{d} g(x, x + t\omega, \omega)\, dt = H(x, \omega), \quad (x, \omega) \in \mathscr{D} \times \Omega, \tag{1.3}$$

где заданы только область $\mathscr{D}$ и функция $H(x, \omega)$.

Отметим, что для простоты формулировки искомой объявлена вся линия $\partial\mathscr{D}_0$. Но поскольку ее часть $\partial\mathscr{D}$ известна, фактически ищется только $\partial\mathscr{D}_0 \setminus \partial\mathscr{D}$.

Поставленная задача довольно необычна. В ней известны интегралы от $g(x, y, \omega)$ по y вдоль любых прямых $\{x + t\omega,\ t \in \mathbb{R}^1\}$. Найти полностью функцию $g(x, y, \omega)$ из уравнения (1.3) не представляется возможным ввиду ее зависимости от слишком большого числа переменных. Поэтому ставится более скромная задача об отыскании только линии разрывов неизвестной функции.

К этой задаче сводятся некоторые проблемы рентгеновской томографии, изученные автором в [3, 4], где в качестве математической модели миграции фотонов в веществе использовалось интегродифференциальное уравнение переноса. Исследование в настоящей статье отличается от соответствующих фрагментов в [3, 4] рядом предположений большей общности и вместе с тем большей простотой изложения. Есть основания предполагать, что результаты этой работы могут использоваться для дальнейшего развития теории рентгеновской томографии и в то же время представлять собой самостоятельную ценность как элемент теории интегральной геометрии.

Говоря об общности поставленной задачи, отметим, что заменой переменных к уравнению (1.3) сводится ряд других подобных проблем, где интегрирование производится вдоль кривых из определенного семейства линий.

Несмотря на свою необычность, рассматриваемая задача имеет аналоги, изученные и другими авторами. Так, опубликован ряд работ, посвященных исследованию задачи, в которой функция $g(x, y, \omega)$ представлена в виде произведения $g(x, y, \omega) = w_1(x, y, \omega)w_2(y)$, причем интегрирование производилось, как правило, вдоль кривых из заданного семейства линий. Весовая функция $w_1(x, y, \omega)$ предполагалась известной, а искомой считалась функция $w_2(y)$. Однако и для такой, более традиционной задачи, доказанные теоремы единственности охватывают лишь некоторые специфические случаи. Например, в [5, 6] доказаны теоремы единственности при условиях определенной симметрии весовой функции, малости ее производных или диаметра области $\mathscr{D}$.

Имеются также работы, в которых предполагалось, что $w_1(x,y,\omega) \equiv 1$. При таком условии левая часть уравнения (1.3) представляет собой преобразование Радона функции $w_2(y)$. В рентгеновской томографии это соответствует лучевому приближению. Для этого случая доказаны теоремы единственности определения функции $w_2(y)$ и построены многочисленные алгоритмы ее вычисления [7–12]. Однако если при этом ограничиваться поиском только линии разрывов подынтегральной функции, то появляется возможность создания значительно более быстрых алгоритмов [9, 10]. Последнее обстоятельство весьма важно, например, в медицинской томографии. Стоит еще отметить работы близкой направленности, касающиеся проблем векторной и тензорной томографии [13, 14].

Сделаем некоторые преобразования уравнения (1.3). Рассмотрим произвольную вспомогательную функцию $\beta(x,\omega)$, $(x,\omega) \in \mathscr{D} \times \Omega$, равномерно непрерывную вместе со всеми своими частными производными первого порядка. Умножая обе части равенства (1.3) на $\beta(x,\omega)$ и обозначая

$$q(x,y,\omega) = \beta(x,\omega)g(x,y,\omega), \quad Q(x,\omega) = \beta(x,\omega)H(x,\omega),$$

получаем

$$\int\limits_{-d}^{d} q(x, x+t\omega, \omega)\, dt = Q(x,\omega). \tag{1.4}$$

Важно отметить, что относительно $q(x,y,\omega)$ выполняются все предположения, сделанные относительно функции $g(x,y,\omega)$, и, в частности, выполняются неравенства (1.1), (1.2), если в левых частях произвести замену g на q.

Проинтегрируем последнее равенство по $\omega \in \Omega$. Предварительно интеграл в (1.4) разобьем на два: один по $t \in [0,d]$ и второй по $t \in [-d,0]$. Используя замену переменных $y = x + t\omega$, получаем

$$\int\limits_{\mathscr{D}} \frac{f(x,y,s)}{|y-x|}\, dy = \int\limits_{\Omega} Q(x,\omega)\, d\omega, \quad (x,\omega) \in \mathscr{D} \times \Omega,\ s = \frac{y-x}{|y-x|}, \tag{1.5}$$

где

$$f(x,y,s) = q(x,y,s) + q(x,y,-s). \tag{1.6}$$

В дальнейшем исследовании единственности решения задачи будем вместо (1.3) использовать уравнение (1.5).

Замечание 1.1. Из равенства (1.6) видно, что функция $f(x,y,\omega)$ четная по ω, т. е. $f(x,y,\omega) = f(x,y,-\omega)$.

§ 2. Вспомогательные утверждения

Изучим отдельно интеграл в левой части уравнения (1.5):

$$W(x) = \int\limits_{D} \frac{f(x,y,s)}{|y-x|} dy, \quad s = \frac{y-x}{|y-x|}. \tag{2.1}$$

Лемма 2.1. *Функция $W(x)$ имеет в $\mathscr{D}_j$, $j = 1,\dots,p$, непрерывные частные производные по x_k, $k = 1,2$, причем выполняется равенство*

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_k} = \int\limits_{\mathscr{D}_j} \frac{F_k(x,y,s)}{|y-x|^2} dy + \int\limits_{\mathscr{D}_j} \frac{D_k f(x,y,s)}{|y-x|}\, dy$$
$$+ \sum_{i=1, i\neq j}^{p} \left\{ \int\limits_{\mathscr{D}_i} \frac{F_k(x,y,s)}{|y-x|^2}\, dy + \int\limits_{\mathscr{D}_i} \frac{D_k f(x,y,s)}{|y-x|}\, dy \right\}, \quad x \in \mathscr{D}_j, \tag{2.2}$$

где первый интеграл в правой части сингулярный, а функции F_1, F_2 определяются формулами

$$F_1(x,y,\omega) = f(x,y,\omega)\omega_1 - D_5 f(x,y,\omega)\omega_2^2 + D_6 f(x,y,\omega)\omega_1\omega_2, \quad \omega = (\omega_1,\omega_2), \tag{2.3}$$

$$F_2(x,y,\omega) = f(x,y,\omega)\omega_2 + D_5 f(x,y,\omega)\omega_1\omega_2 - D_6 f(x,y,\omega)\omega_1^2. \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $\mathscr{D}_j'$ — строго внутренняя подобласть области $\mathscr{D}_j$. Тогда расстояние от $\overline{\mathscr{D}}_j'$ до $\partial\mathscr{D}_j$ положительное, т. е. $\rho(\overline{\mathscr{D}}_j', \partial\mathscr{D}_j) > 0$. Возьмем произвольные точку $x \in \mathscr{D}_j'$ и число $\varepsilon > 0, \varepsilon < \delta_0 < \rho(\overline{\mathscr{D}}_j', \partial\mathscr{D}_j)$. Рассмотрим функцию

$$W_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathscr{D}\setminus B(x,\varepsilon)} \frac{f(x,y,s)}{|y-x|}\,dy. \tag{2.5}$$

Ясно, что $W_\varepsilon(x)$ стремится к $W(x)$ при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in \mathscr{D}_j'$.

Представим $W_\varepsilon(x)$ в виде

$$W_\varepsilon(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_{j,\varepsilon}} \frac{f(x,y,s)}{|y-x|}\,dy + \sum_{j=1, j\neq i}^{p} \int\limits_{\mathscr{D}_i} \frac{f(x,y,s)}{|y-x|}\,dy = W_{1,\varepsilon}(x) + W_2(x), \tag{2.6}$$

где $D_{j,\varepsilon} = \mathscr{D}_j \setminus B(x,\varepsilon)$, а $W_{1,\varepsilon}(x)$ и $W_2(x)$ означают первое и второе слагаемые соответственно. Аналогично [1] составим производную от $W_{1,\varepsilon}(x)$ по x_k, $k = 1,2$:

$$\frac{\partial W_{1,\varepsilon}(x)}{\partial x_k} = \int\limits_{\mathscr{D}_{j,\varepsilon}} \frac{D_k f(x,y,s)}{|y-x|}\,dy + \int\limits_{\mathscr{D}_{j,\varepsilon}} \bigg\{ f(x,y,s)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|y-x|} + \frac{1}{|y-x|} D_5 f(x,y,s)\frac{\partial s_1}{\partial x_k}$$
$$+ \frac{1}{|y-x|} D_6 f(x,y,s)\frac{\partial s_2}{\partial x_k}\bigg\}\,dy - \int\limits_{|y-x|=\varepsilon} \frac{f(x,y,s)}{|y-x|} s_k d_y s$$
$$= W_{3,\varepsilon}(x) + W_{4,\varepsilon}(x) - W_{5,\varepsilon}(x), \quad s_k = \frac{y_k - x_k}{|y-x|}. \tag{2.7}$$

Прежде всего обратим внимание на последний криволинейный интеграл первого рода по окружности $|y-x| = \varepsilon$. Переходя в нем к интегрированию по единичной окружности, получаем

$$W_{5,\varepsilon}(x) = \int\limits_{\Omega} f(x, x+\epsilon\omega, \omega)\omega_k\,d\omega = \int\limits_{\Omega} f(x,x,\omega)\omega_k\,d\omega$$
$$+ \int\limits_{\Omega} (f(x, x+\epsilon\omega, \omega) - f(x,x,\omega))\omega_k\,d\omega.$$

В силу неравенства (1.1), выполненного также и для функции $f(x,y,\omega)$, второй интеграл в правой части последнего равенства по модулю не превосходит $\operatorname{const}\varepsilon^\alpha$. Что касается первого интеграла, то ввиду четности $f(x,y,\omega)$ по ω подынтегральное выражение оказывается нечетным, интеграл от которого равен нулю. Следовательно, $W_{5,\varepsilon}(x)$ стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ равномерно по $x \in \mathscr{D}_j'$.

В силу сделанных предположений интегралы $W_{3,\varepsilon}(x)$ равномерно по $x \in \mathscr{D}_j'$ стремятся при $\varepsilon \to 0$ к интегралу по $\mathscr{D}_j$ от функции $|y-x|^{-1} D_k f(x,y,s)$. Таким образом, в равенстве (2.7) осталось изучить $W_{4,\varepsilon}(x)$. Рассмотрим подынтегральное выражение. Прямыми элементарными вычислениями получаем равенство

$$f(x,y,s)\frac{\partial}{\partial x_k}\frac{1}{|y-x|}+\frac{1}{|y-x|}D_5 f(x,y,s)\frac{\partial s_1}{\partial x_k} + \frac{1}{|y-x|}D_6 f(x,y,s)\frac{\partial s_2}{\partial x_k} = \frac{F_k(x,y,s)}{|y-x|^2}. \tag{2.8}$$

где функции $F_k(x,y,s)$ определяются формулами (2.3) и (2.4). Следовательно,

$$W_{4,\varepsilon}(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_{j,\varepsilon}} \frac{F_k(x,y,s)}{|y-x|^2}\,dy.$$

Представим это же выражение в ином виде:

$$W_{4,\varepsilon}(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_{j,\varepsilon}} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy + \int\limits_{\mathscr{D}_{j,\varepsilon}} \frac{F_k(x,y,s)-F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy = W_{6,\varepsilon}(x)+W_{7,\varepsilon}(x), \tag{2.9}$$

где $W_{6,\varepsilon}(x)$ и $W_{7,\varepsilon}(x)$ — первый и второй интегралы в левой части последнего равенства. По предположению (1.1) верно неравенство $|F_k(x,y,\omega)-F_k(x,x,\omega)| \le \text{const}\,|y-x|^\alpha$, $x\in\mathscr{D}_j$, $y\in\mathscr{D}_j$, $\omega\in\Omega$. Поэтому подынтегральное выражение в интеграле $W_{7,\varepsilon}(x)$ по модулю не превосходит $\text{const}\,|y-x|^{2-\alpha}$ и, значит, $W_{7,\varepsilon}(x)$ стремится к интегралу по всей области $\mathscr{D}_j$ от того же подынтегрального выражения равномерно по $x\in\mathscr{D}'_j$.

Обратим внимание на функции $F_k(x,x,\omega)$, определенные равенствами (2.3), (2.4). Поскольку функция $f(x,x,\omega)$ четная по ω, ее производные $D_5 f(x,x,\omega)$ и $D_6 f(x,x,\omega)$ нечетные по ω. Учитывая то, что функции ω_1 и ω_2 нечетные, а ω_1^2,ω_2^2 четные, в целом видим, что $F_k(x,x,\omega)$ нечетные по ω, т. е. $F_k(x,x,\omega) = -F_k(x,x,-\omega)$. Отсюда следует, что

$$\int\limits_{\Omega} F_k(x,x,\omega)\,d\omega = 0. \tag{2.10}$$

Представим $W_{6,\varepsilon}(x)$ в виде

$$W_{6,\varepsilon}(x) = \int\limits_{B(x,\varepsilon,\delta_0)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy + \int\limits_{\mathscr{D}_j\setminus B(x,\delta_0)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy = W_{8,\varepsilon}(x)+W_9(x),$$

где $W_{8,\varepsilon}(x)$ и $W_9(x)$ — первый и второй интегралы соответственно. Как видно, $W_9(x)$ от ε не зависит, а для вычисления $W_{8,\varepsilon}(x)$ перейдем к полярным координатам $t,\omega, y=x+t\omega$ и, учитывая равенство (2.10), получаем

$$W_{8,\varepsilon}(x) = \int\limits_{\Omega} F_k(x,x,\omega)\,d\omega \int\limits_{\varepsilon}^{\delta_0} \frac{dt}{t} = 0.$$

Тем самым доказано, что существует сингулярный интеграл, равный первому интегралу в правой части (2.2) и равномерному пределу интегралов $W_{4,\varepsilon}(x)$ при $\varepsilon\to 0$. Отсюда следует, что в $\mathscr{D}'_j$ существует производная

$$\frac{\partial}{\partial x_k}\int\limits_{\mathscr{D}_j}\frac{f(x,y,s)}{|y-x|}\,dy, \quad k=1,2,$$

равная сумме двух первых интегралов в правой части (2.2), которая, будучи равномерным пределом непрерывных функций, сама является непрерывной в $\mathscr{D}_j'$ функцией.

Что касается функции $W_2(x)$, то в силу неравенства $|y-x| > \delta_0 > 0$, $y \in \mathscr{D}_i$, $i \neq j$, $i = 1, \ldots, p$, возможность ее дифференцирования по x_k очевидна. Соответствующие производные имеют вид суммы интегралов в (2.2). Отсюда же следует и непрерывность таких производных. Итак, в силу произвольности подобласти $\mathscr{D}_j'$, $\overline{\mathscr{D}}_j \subset \mathscr{D}_j$, лемма доказана.

Пусть z — произвольная контактная точка. Тогда она является общей для границ некоторых двух областей $\mathscr{D}_j$ и $\mathscr{D}_l$. В силу достаточной гладкости линии $V(z) \cap \partial\mathscr{D}_j = V(z) \cap \partial\mathscr{D}_l$ существует столь малое число $\delta_1 > 0$ такое, что для всех $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \leq \delta_1$, любой круг $B(x,\tau)$ содержится в $\mathscr{D}_j$, а окружность $\partial B(x,\tau)$ имеет единственную общую точку z с линией $\partial\mathscr{D}_j$. Аналогично для $-\delta_1 \leq \tau < 0$ имеем $B(x,\tau) \subset \mathscr{D}_l$ и $\partial B(x,\tau) \cap \partial\mathscr{D}_l = \{z\}$. Используя локальную систему координат с центром в точке z, определим множества в $\mathbb{R}^2$: $C_\tau(z) = \{(\xi,\eta) : |\xi| < \tau,\ |\eta| \leq \delta_1\}$, $C_\delta(z) = \{(\xi,\eta) : |\xi| < \delta,\ |\eta| \leq \delta_1\}$, $C_{\tau,\delta}(z) = \{(\xi,\eta) : \tau \leq |\xi| < \delta,\ |\eta| \leq \delta_1\}$. Заметим, что имеет место равенство $C_\delta(z) = C_\tau(z) \cup C_{\tau,\delta}(z)$. Уменьшая, если нужно, число δ, добьемся неравенства $\delta_1 \geq 2\delta$ и в дальнейшем будем рассматривать точки $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < |\tau| \leq \delta$. Легко видеть, что для таких x и $y \notin C_\delta(z)$ выполняется неравенство $|y-x| \geq \delta$. Еще заметим, что гарантировано вложение $B(x,\tau) \subset C_\delta(z)$.

Для $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \leq \delta$, рассмотрим интегралы

$$V_j(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_j} \frac{F_k(x,y,s)}{|y-x|^2}\,dy, \quad V_l(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_l} \frac{F_k(x,y,s)}{|y-x|^2}\,dy, \quad k = 1,2.$$

Первый из них понимается как сингулярный, так как $x \in \mathscr{D}_j$. Обозначим $B^+(x,\tau,d) = B(x,\tau,d) \cap \mathbb{R}^+(x)$, $B^-(x,\tau,d) = B(x,\tau,d) \cap \mathbb{R}^-(x)$, где d — диаметр области $\mathscr{D}$, а множества $B(x,\tau,d)$, $\mathbb{R}^\pm(x)$ определены в § 1. Для этих обозначений имеет место следующее утверждение.

Лемма 2.2. *Выполняются равенства*

$$V_j(x) = \int\limits_{B^+(x,\tau,d)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy + O(1), \quad V_l(x) = \int\limits_{B^-(x,\tau,d)} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy + O(1),$$

где $O(1)$ означает функцию, ограниченную при всех $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \leq \delta$, а $F_{k,l}(x,z,s)$ — предел $F_k(x,y,s)$ при $y \to z$, $y \in \mathscr{D}_l$.

Доказательство. Докажем сначала первое равенство. Интеграл $V_j(x)$ представим в виде

$$V_j(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_j} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy + \int\limits_{\mathscr{D}_j} \frac{F_k(x,y,s) - F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy. \tag{2.11}$$

В силу оценки $|F_k(x,y,\omega) - F_k(x,x,\omega)| \leq \mathrm{const}\,|y-x|^\alpha$, $x \in \mathscr{D}_j$, $y \in \mathscr{D}_j$, $\omega \in \Omega$, второй интеграл в правой части (2.11) есть величина $O(1)$.

Изучим сингулярный интеграл

$$I_j(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_j} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy.$$

Ввиду равенства (2.10) сингулярный интеграл от функции $F_k(x,x,s)|y-x|^{-2}$ по множеству $B(x,\tau)$ равен нулю. Поэтому

$$I_j(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_j\setminus B(x,\tau)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy.$$

Множество $\mathscr{D}_j\setminus B(x,\tau)$ представим в виде объединения: $\mathscr{D}_j\setminus B(x,\tau) = \mathscr{D}_j^+(x)\cup \mathscr{D}_j^-(x)$, где $\mathscr{D}_j^+(x) = (\mathscr{D}_j\setminus B(x,\tau))\cap\mathbb{R}^+(x)$, $\mathscr{D}_j^-(x) = (\mathscr{D}_j\setminus B(x,\tau))\cap\mathbb{R}^-(x)$. Рассмотрим сумму

$$I_j(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_j^+(x)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy + \int\limits_{\mathscr{D}_j^-(x)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy = I_j^+(x) + I_j^-(x),$$

где $I_j^+(x)$ и $I_j^-(x)$ — первый и второй интегралы соответственно.

Отметим, что некоторые оценки в нижеследующих рассуждениях имеют общие черты с доказательством необходимости в работе [15].

Сначала покажем, что $|I_j^-|\le \mathrm{const}$. Для этого достаточно оценить интеграл

$$I_{j,\delta}^-(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_j^-(x)\cap C_\delta(z)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy,$$

поскольку соответствующая оценка очевидна для интеграла по $y\notin C_\delta(z)$ ввиду неравенства $|y-x|\ge\delta$. В свою очередь, множество $\mathscr{D}_j^-(x)\cap C_\delta(z)$ представим в виде объединения $\mathscr{D}_j^-(x)\cap C_\delta(z) = A_1\cup A_2$, где $A_1 = \mathscr{D}_j^-(x)\cap C_\tau(z)$, $A_2 = \mathscr{D}_j^-(x)\cap C_{\tau,\delta}(z)$. Учитывая определение множества A_1 и переходя к локальным координатам, имеем

$$\int\limits_{A_1} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy = \int\limits_{-\tau}^{\tau} d\xi \int\limits_{\psi(\xi)}^{\tau-\sqrt{\tau^2-\xi^2}} \frac{F_k(x,x,s)}{\xi^2+(\eta-\tau)^2}\,d\eta.$$

Для оценки последнего интеграла используем неравенства $|F_k(x,x,s)|\le\mathrm{const}$, $|\tau-\sqrt{\tau^2-\xi^2}|\le|\xi^2|/\tau$, $|\psi(\xi)|\le\mathrm{const}\,|\xi^2|$, $\xi^2+(\eta-\tau)^2\ge\xi^2$ и получим

$$\left|\int\limits_{A_1} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy\right| \le \mathrm{const}\int\limits_{-\tau}^{\tau} \frac{|\tau-\sqrt{\tau^2-\xi^2}-\psi(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi \le \mathrm{const}\,.$$

Теперь оценим интеграл по A_2. По определению множества A_2 имеем

$$\int\limits_{A_2} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy = \int\limits_{-\delta}^{-\tau} d\xi \int\limits_{\psi_1(\xi)}^{\tau} \frac{F_k(x,x,s)}{\xi^2+(\eta-\tau)^2}\,d\eta + \int\limits_{\tau}^{\delta} d\xi \int\limits_{\psi_1(\xi)}^{\tau} \frac{F_k(x,x,s)}{\xi^2+(\eta-\tau)^2}\,d\eta,$$

где $\psi_1(\xi) = \min(\psi(\xi),\tau)$.

Из последнего равенства выводим

$$\begin{aligned}\left|\int\limits_{A_2} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy\right| &\le \mathrm{const}\int\limits_{\tau}^{\delta} \frac{(\tau-\psi_1(\xi))}{\xi^2}\,d\xi \\ &\le \mathrm{const}\left\{\int\limits_{\tau}^{\delta}\frac{\tau\,d\xi}{\xi^2} + \int\limits_{\tau}^{\delta}\frac{|\psi(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi\right\} \le \mathrm{const}\,.\end{aligned}$$

Объединяя полученные оценки, получаем $|I_j^-(x)| \le \mathrm{const}$.

Осталось исследовать интеграл $I_j^+(x)$. Перейдем в нем к интегрированию по половине кругового кольца $B^+(x,\tau,d)$, определенной в лемме. Так как $B^+(x,\tau,d) \supset \mathscr{D}_j^+(x)$, то

$$I_j^+(x) = \int\limits_{B^+(x,\tau,d)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy - \int\limits_{B^+(x,\tau,d)\setminus\mathscr{D}_j^+(x)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy. \tag{2.12}$$

Покажем, что второй интеграл в правой части (2.12) есть величина типа $O(1)$. При этом будем оценивать интеграл только по множеству $A_3 = (B^+(x,\tau,d) \setminus \mathscr{D}_j^+(x)) \cap C_\delta(z)$, поскольку для остальных y выполняется неравенство $|y-x| \ge \delta$ и требуемая оценка очевидна. Используя локальные координаты, имеем

$$\int\limits_{A_3} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy = \int\limits_{-\delta}^{\delta} d\xi \int\limits_{\tau}^{\psi_2(\xi)} \frac{F_k(x,x,s)}{\xi^2+(\eta-\tau)^2}\,d\eta,$$

где $\psi_2(\xi) = \max(\tau,\psi(\xi))$. Применяя неравенство $|\psi_2(\xi)-\tau| \le |\psi(\xi)| \le \mathrm{const}\,|\xi|^2$, видим, что

$$\left|\int\limits_{A_3} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy\right| \le \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\mathrm{const}\,|\psi(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi \le \mathrm{const}\,.$$

Таким образом, установлено, что второй интеграл в правой части (2.12) есть величина типа $O(1)$, как и интеграл $I_j^-(x)$. Это и означает, что первое из равенств в формулировке леммы доказано. Докажем второе.

Рассмотрим сумму

$$V_l(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_l} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy + \int\limits_{\mathscr{D}_l} \frac{F_k(x,y,s)-F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy. \tag{2.13}$$

Поскольку z — ближайшая точка из $\overline{\mathscr{D}}_l$ к точке x, то $|z-x| < |y-x|$ для всех $y \in \mathscr{D}_l$. По неравенству треугольника имеем $|y-z| \le |y-x| + |z-x| < 2|y-x|$. Отсюда следует, что $|F_k(x,y,\omega)| - F_{k,l}(x,z,\omega)| \le \mathrm{const}\,|y-z|^\alpha \le \mathrm{const}\,|y-x|^\alpha$. Поэтому второй интеграл в правой части (2.13) есть величина типа $O(1)$, а первый, обозначенный через $I_l(x)$, подлежит дальнейшему изучению.

Область $\mathscr{D}_l$ представим в виде объединения: $\mathscr{D}_l = \mathscr{D}_l^+ \cup \mathscr{D}_l^-$, где $\mathscr{D}_l^+ = \mathscr{D}_l \cap \mathbb{R}^+(z)$, $\mathscr{D}_l^- = \mathscr{D}_l \cap \mathbb{R}^-(z)$, и рассмотрим сумму

$$I_l(x) = \int\limits_{\mathscr{D}_l^+} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy + \int\limits_{\mathscr{D}_l^-} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy = I_l^+(x) + I_l^-(x), \tag{2.14}$$

где $I_l^+(x)$, $I_l^-(x)$ — первый и второй интегралы соответственно.

Сначала докажем, что $|I_l^+(x)| \le \mathrm{const}$. Для этого достаточно оценить интеграл только по множеству $A_4 = \mathscr{D}_l^+ \cap C_\delta(z)$. Переходя к полярным координатам, имеем

$$\int\limits_{A_4} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy = \int\limits_{-\delta}^{\delta} d\xi \int\limits_{0}^{\psi_3(\xi)} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{\xi^2+(\eta-\tau)^2}\,d\eta,$$

где $\psi_3(\xi) = \max(0, \psi(\xi))$. Используем неравенства $\xi^2 + (\eta - \tau)^2 \geq \xi^2$, $|\psi_3(\xi)| \leq \mathrm{const}\,|\xi|^2$, $|F_{k,l}(x,z,\omega)| \leq \mathrm{const}$ и получаем

$$\Bigl|\int\limits_{A_4} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy\Bigr| \leq \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\mathrm{const}\,|\psi_3(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi \leq \mathrm{const}\,.$$

Тем самым доказано, что $I_l^+(x)$ есть величина типа $O(1)$.

Перейдем к изучению интеграла $I_l^-(x)$. Возьмем множество $B^-(z,d) = B(z,d) \cap \mathbb{R}^-(z)$. Ясно, что $B^-(z,d) \supset \mathscr{D}_l^-$, поэтому

$$I_l^-(x) = \int\limits_{B^-(z,d)} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy - \int\limits_{B^-(z,d)\setminus\mathscr{D}_l^-} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy. \tag{2.15}$$

Покажем, что второй интеграл в правой части (2.15) есть величина $O(1)$. Для этого достаточно оценить интеграл от той же функции только по множеству $A_5 = (B^-(z,d) \setminus \mathscr{D}_l^-) \cap C_\delta(z)$. Переходя к локальным координатам, имеем

$$\int\limits_{A_5} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy = \int\limits_{-\delta}^{\delta} d\xi \int\limits_{\psi(\xi)}^{\psi_3(\xi)} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{\xi^2 + (\eta-\tau)^2}\,d\eta.$$

Отсюда

$$\Bigl|\int\limits_{A_5} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy\Bigr| \leq \int\limits_{-\delta}^{\delta} \frac{\mathrm{const}\,|\psi(\xi)|}{\xi^2}\,d\xi \leq \mathrm{const}\,.$$

Подводя промежуточные итоги полученным оценкам, видим, что второй интеграл в правой части равенства (2.15) есть величина $O(1)$. Ранее такое утверждение было доказано для $I_l^+(x)$. Поэтому из (2.14) и (2.15) следует, что

$$I_l(x) = \int\limits_{B^-(z,d)} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy + O(1). \tag{2.16}$$

В последнем представлении перейдем от интегрирования по $B^-(z,d)$ к интегрированию по $B^-(x,\tau,d) = B(x,\tau,d) \cap \mathbb{R}^-$. Для этого используем тождество $B^-(z,d) = (B^-(x,\tau,d) \setminus (B^-(x,\tau,d) \setminus B^-(z,d))) \cup (B^-(z,d) \setminus B^-(x,\tau,d))$. Обозначая $A_6 = B^-(x,\tau,d) \setminus B^-(z,d)$, $A_7 = B^-(z,d) \setminus B^-(x,\tau,d)$, имеем $B^-(z,d) = (B^-(x,\tau,d) \setminus A_6) \cup A_7$ и поэтому

$$\int\limits_{B^-(z,d)} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy = \int\limits_{B^-(z,\tau,d)} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy - \int\limits_{A_6} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy + \int\limits_{A_7} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy. \tag{2.17}$$

Третий интеграл в правой части (2.17) есть величина $O(1)$, поскольку для $y \in A_7$ верно неравенство $|y-x| \geq d$. Докажем, что и второй интеграл есть также ограниченная функция. Для этого достаточно рассмотреть интеграл от той же функции, но по множеству $A_8 = A_6 \cap C_\delta(z)$, так как для остальных y выполняется неравенство $|y-x| \geq \delta$. Поэтому имеем

$$\int\limits_{A_6} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy = \int\limits_{A_8} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy + O(1). \tag{2.18}$$

Переходя к локальным координатам и учитывая структуру множества A_8, получаем

$$\int\limits_{A_8} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy = \int\limits_{-\tau}^{\tau} d\xi \int\limits_{0}^{\tau-\sqrt{\tau^2-\xi^2}} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{\xi^2+(\eta-\tau)^2}\,d\eta$$
$$+ \int\limits_{-\delta}^{-\tau} d\xi \int\limits_{0}^{\tau} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{\xi^2+(\eta-\tau)^2}\,d\eta + \int\limits_{\tau}^{\delta} d\xi \int\limits_{0}^{\tau} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{\xi^2+(\eta-\tau)^2}\,d\eta.$$

Отсюда

$$\left| \int\limits_{A_8} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy \right| \leq \mathrm{const} \left(\int\limits_{-\tau}^{\tau} \frac{\tau-\sqrt{\tau^2-\xi^2}}{\xi^2}\,d\xi + \int\limits_{\tau}^{\delta} \frac{\tau\,d\xi}{\xi^2} \right) \leq \mathrm{const}\,.$$

Из последних неравенств, а также из (2.16)–(2.18) следует, что

$$V_l(x) = \int\limits_{B^-(x,\tau,d)} \frac{F_{k,l}(x,z,s)}{|y-x|^2}\,dy + O(1).$$

Тем самым лемма 2.2 полностью доказана.

В основной системе координат, используя полярный угол φ, представим нормаль $n_j(z)$ в виде $n_j(z) = (\cos\varphi_0, \sin\varphi_0)$, где $\cos\varphi_0 = (n_j(z), e_1)$, $\sin\varphi_0 = (n_j(z), e_2)$, e_1, e_2 — направляющие единичные векторы первой и второй координатных осей соответственно, z — контактная точка, $z \in \partial\mathscr{D}_j \cap \partial\mathscr{D}_l$. Легко видеть, что единичные векторы $\omega_0(z) = (\sin\varphi_0, -\cos\varphi_0)$, $-\omega_0(z) = (-\sin\varphi_0, \cos\varphi_0)$ ортогональны к $n_j(z)$, т. е. являются касательными к линии $\partial\mathscr{D}_j$, а также к линии $\partial\mathscr{D}_l$ в точке z. Рассмотрим полуокружности $\Omega^+(z) = \{\omega : \omega \in \Omega, (n_j(z), \omega) \geq 0\}$, $\Omega^-(z) = \{\omega : \omega \in \Omega, (n_j(z), \omega) \leq 0\}$. Представляя вектор ω через полярный угол, видим, что

$$\Omega^+(z) = \{\omega(\varphi) : \omega(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ -\varphi_0 - \pi/2 \leq \varphi \leq \varphi_0 + \pi/2\},$$

$$\Omega^-(z) = \{\omega(\varphi) : \omega(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi),\ \varphi_0 + \pi/2 \leq \varphi \leq \varphi_0 + 3\pi/2\}.$$

Лемма 2.3. *Для функций* $F_k(x,y,\omega)$, $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \leq \delta$, $y \in \mathscr{D}_0$, $\omega \in \Omega$, $k = 1,2$, *определенных равенствами* (2.3), (2.4), *имеют место формулы*

$$\int\limits_{\Omega^+(z)} F_k(x,y,\omega)\,d\omega = 2(-1)^{k+1}(n_j(z), e_k) f(x,y,\omega_0(z)), \tag{2.19}$$

$$\int\limits_{\Omega^-(z)} F_k(x,y,\omega)\,d\omega = 2(-1)^{k}(n_j(z), e_k) f(x,y,\omega_0(z)). \tag{2.20}$$

Доказательство. Из формул (2.3), (2.4), используя представление $\omega(\varphi) = (\cos\varphi, \sin\varphi)$, видим, что

$$F_1(x,y,\omega(\varphi)) = f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi - D_5 f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\sin^2\varphi$$
$$+ D_6 f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\cos\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi} f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi, \qquad (2.21)$$

$$F_2(x,y,\omega(\varphi)) = f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi + D_5 f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\cos\varphi$$
$$- D_6 f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\cos^2\varphi = \frac{\partial}{\partial\varphi} f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi. \qquad (2.22)$$

Из равенства (2.21) следует, что

$$\int\limits_{\Omega^+(z)} F_1(x,y,\omega)\,d\omega = \int\limits_{\varphi_0-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} F_1(x,y,\omega(\varphi))\,d\varphi = \int\limits_{\varphi_0-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial\varphi} f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$
$$= f(x,y,-\sin\varphi_0,\cos\varphi_0)\cos\varphi_0 + f(x,y,\sin\varphi_0,-\cos\varphi_0)\cos\varphi_0$$
$$= f(x,y,-\omega_0(z))(n_j(z),e_1) + f(x,y,\omega_0(z))(n_j(z),e_1)$$
$$= 2(n_j(z),e_1) f(x,y,\omega_0(z)). \qquad (2.23)$$

Отметим, что для получения последних равенств использованы тригонометрические формулы приведения и четность функции $f(x,y,\omega)$ по ω (см. замечание 1.1).

Аналогично из равенства (2.22) вытекает, что

$$\int\limits_{\Omega^+(z)} F_2(x,y,\omega)\,d\omega = \int\limits_{\varphi_0-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} F_2(x,y,\omega(\varphi))\,d\varphi$$
$$= \int\limits_{\varphi_0-\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0+\frac{\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial\varphi} f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi = -2(n_j(z),e_2) f(x,y,\omega_0(z)). \qquad (2.24)$$

Рассуждая точно так же, из равенств (2.21) и (2.22) получаем

$$\int\limits_{\Omega^-(z)} F_1(x,y,\omega)\,d\omega = \int\limits_{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0+\frac{3\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial\varphi} f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\sin\varphi\,d\varphi$$
$$= -2(n_j(z),e_1) f(x,y,\omega_0(z)), \qquad (2.25)$$

$$\int\limits_{\Omega^-(z)} F_2(x,y,\omega)\,d\omega = \int\limits_{\varphi_0+\frac{\pi}{2}}^{\varphi_0+\frac{3\pi}{2}} \frac{\partial}{\partial\varphi} f(x,y,\cos\varphi,\sin\varphi)\cos\varphi\,d\varphi$$
$$= 2(n_j(z),e_2) f(x,y,\omega_0(z)). \qquad (2.26)$$

Объединяя формулы (2.23), (2.24), а также (2.25), (2.26), приходим к равенствам (2.19), (2.20). Лемма доказана.

Замечание 2.1. Из (2.19) следует, что при $x = y$ верно равенство

$$\int\limits_{\Omega^+(z)} F_k(x,x,\omega)\,d\omega = 2(-1)^{k+1}(n_j(z),e_k)f(x,x,\omega_0(z)). \tag{2.27}$$

Предельным переходом по $y \to z$, $y \in \mathscr{D}_l$, из (2.20) получаем

$$\int\limits_{\Omega^-(z)} F_{k,l}(x,z,\omega)\,d\omega = 2(-1)^k(n_j(z),e_k)f_l(x,z,\omega_0(z)). \tag{2.28}$$

§ 3. Основные утверждения

Используя лемму 2.1, можно для $x \in \mathscr{D}_0$ определить функцию $\mathscr{I}(x)$ по следующей формуле:

$$\mathscr{I}(x) = \left|\nabla \int\limits_{\Omega} Q(x,\omega)\,d\omega\right|, \tag{3.1}$$

где $Q(x,\omega)$ является правой частью уравнения (1.4).

Теорема 3.1. *Функция $\mathscr{I}(x)$ непрерывна в $\mathscr{D}_0$, а для любой контактной точки $z \in \partial\mathscr{D}_j \cap \partial\mathscr{D}_l$ и для точек $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \le \delta$, выполняется равенство*

$$\mathscr{I}(x) = M(z)|\ln|x-z|\,| + O(1), \tag{3.2}$$

где

$$M(z) = 2|[q(z,z,\omega_0(z)) + q(z,z,-\omega_0(z))]_{j,l}|, \quad (\omega_0(z), n_j(z)) = 0. \tag{3.3}$$

Доказательство. Согласно равенствам (1.5), (2.1) для функции $\mathscr{I}(x)$ верна формула

$$\mathscr{I}(x) = \left|\left(\frac{\partial W(x)}{\partial x_1}, \frac{\partial W(x)}{\partial x_2}\right)\right|, \quad x \in \mathscr{D}_0. \tag{3.4}$$

Отсюда и из леммы 2.1 следует непрерывность $\mathscr{I}(x), x \in \mathscr{D}_0$. Докажем равенство (3.2). Пусть $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \le \delta$. Рассмотрим представление (2.2) для частных производных функции $W(x)$, выделяя в нем интегралы $V_j(x)$ и $V_l(x)$. Остальные слагаемые, будучи интегралами от непрерывных функций, ограниченных при всех x, являются величинами типа $O(1)$, т. е. для любого $k = 1,2$, имеет место равенство

$$\frac{\partial W}{\partial x_k}(x) = V_j(x) + V_l(x) + O(1). \tag{3.5}$$

Изучим сначала интеграл $V_j(x)$. По лемме 2.1 выполняется равенство

$$V_j(x) = \int\limits_{B^+(x,\tau,d)} \frac{F_k(x,x,s)}{|y-x|^2}\,dy + O(1).$$

Совершая замену переменных: $y = x + t\omega$, $\tau < t < d$, $\omega \in \Omega^+(z)$, получаем

$$V_j(x) = \int\limits_{\Omega^+(z)} F_k(x,x,\omega) \int\limits_{\tau}^{d} \frac{dt}{t}\,d\omega + O(1) = -\ln\tau \int\limits_{\Omega^+(z)} F_k(x,x,\omega)\,d\omega + O(1).$$

Используя формулу (2.27) (см. замечание 2.1), выводим

$$V_j(x) = 2(-1)^k \ln\tau \cdot (n_j(z), e_k) f(x, x, \omega_0(z)) + O(1).$$

Из этого равенства ввиду того, что $|z - x| = \tau$, $|f_j(z, z, \omega_0(z)) - f(x, x, \omega_0(z))| \leq \mathrm{const}\,|z - x|^\alpha$, получаем

$$V_j(x) = 2\ln\tau(-1)^k (n_j(z), e_k) f_j(z, z, \omega_0(z)) + O(1). \tag{3.6}$$

Теперь изучим интеграл $V_l(x)$. По лемме 2.2 имеем

$$V_l(x) = \int\limits_{B^-(x,\tau,d)} \frac{F_{k,l}(x, z, s)}{|y - x|^2}\, dy + O(1).$$

Делая замену переменных $y = x + t\omega$, $\tau < t < d$, $\omega \in \Omega^-(z)$, получим

$$V_l(x) = \int\limits_{\Omega^-(z)} F_{k,l}(x, z, \omega) \int\limits_\tau^d \frac{dt}{t} + O(1) = -\ln\tau \int\limits_{\Omega^-(z)} F_{k,l}(x, z, \omega)\, d\omega + O(1).$$

Отсюда, применяя формулу (2.28), выводим

$$V_l(x) = 2(-1)^{k+1} \ln\tau (n_j(z), e_k) f_l(x, z, \omega_0(z)) + O(1).$$

Учитывая равенство $|z - x| = \tau$ и неравенство $|f_l(z, z, \omega_0(z)) - f_l(x, z, \omega_0(z))| \leq \mathrm{const}\,|z - x|^\alpha$, приходим к представлению

$$V_l(x) = 2(-1)^{k+1} \ln\tau (n_j(z), e_k) f_l(z, z, \omega_0(z)) + O(1). \tag{3.7}$$

Используя равенства (3.6) и (3.7) в равенстве (3.5), получаем

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_k} = 2\ln\tau (n_j(z), e_k)\{(-1)^{k+1} f_j(z, z, \omega_0(z)) + (-1)^k f_l(z, z, \omega_0(z))\}$$
$$+ O(1) = 2(-1)^{k+1} \ln\tau (n_j(z), e_k)[f(z, z, \omega_0(z))]_{j,l} + O(1). \tag{3.8}$$

Таким образом, заменяя τ на $|x - z|$, запишем

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_1} = 2\ln|x - z|[f(z, z, \omega_0(z))]_{j,l} (n_j(z), e_1) + O(1), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial W(x)}{\partial x_2} = -2\ln|x - z|[f(z, z, \omega_0(z))]_{j,l} (n_j(z), e_2) + O(1). \tag{3.10}$$

Для получения компактного вида функции $\mathscr{I}(x)$ остается воспользоваться формулой (3.4), применяя следующее соображение. Пусть заданы две вектор-функции $A(x) = (A_1(x), A_2(x))$ и $B(x) = (B_1(x), B_2(x))$, причем $|B(x)| \leq \mathrm{const}$, тогда

$$|A(x) + B(x)| = |A(x)| + O(1). \tag{3.11}$$

Для вывода этого равенства запишем тождество $|A(x)+B(x)| = |A(x)| + |A(x)+B(x)| - |A(x)|$. Из неравенства треугольника следует, что $||A(x)+B(x)| - |A(x)|| \leq |B(x)|$. Обозначая $|A(x) + B(x)| - |A(x)| = O(1)$, получаем (3.11).

Пусть теперь

$$A_1(x) = 2\ln|x - z|[f(z, z, \omega_0(z))]_{j,l} (n_j(z), e_1),$$

$$A_2(x) = -2\ln|x - z|[f(z, z, \omega_0(z))]_{j,l} (n_j(z), e_2),$$

величина $O(1)$ в (3.9) есть $B_1(x)$ и величина $O(1)$ в (3.10) есть $B_2(x)$. Легко видеть, что

$$\mathscr{I}(x) = |A(x) + B(x)|, \quad |A(x)| = 2|\ln|x-z|\,|\,|[f(z,z,\omega_0(z))]_{j,l}|.$$

Следовательно, из (3.11) получаем

$$\mathscr{I}(x) = 2|\ln|x-z|\,|\,|[f(z,z,\omega_0(z))]_{j,l}| + O(1),$$

откуда с учетом равенства $f(x,y,\omega) = q(x,y,\omega) + q(x,y,-\omega)$ следует равенство (3.2). Теорема 3.1 доказана.

Из теоремы 3.1 легко сделать следующий вывод.

Следствие 3.1. *Непрерывная в $\mathscr{D}_0$ функция $\mathscr{I}(x)$ ограничена на всяком компакте в $\mathscr{D}_0$, а при $x \to z$ стремится к бесконечности, если $M(z) > 0$.*

Иначе говоря, $\mathscr{I}(x)$ может быть неограниченной только вблизи искомой линии. Именно это свойство и послужило основанием для того, чтобы назвать функцию $\mathscr{I}(x)$ *индикатором контактных границ* в области $\mathscr{D}$.

Последняя часть статьи посвящена вопросу единственности решения задачи интегральной геометрии, представленной уравнением (1.3). Для этого понадобятся следующие обозначения. Пусть в области $\mathscr{D}$ имеются две системы подобластей $\{\mathscr{D}_i^m\}$, $m = 1, 2$, $i = 1, \ldots, p_m$. Соответственно задаются два множества $\mathscr{D}_0^m$ и две функции $g_m(x,y,\omega)$, $(x,y,\omega) \in \mathscr{D} \times \mathscr{D} \times \Omega$. Равенство (1.3), где в левой части на место функции $g(x,y,\omega)$ подставлены $g_m(x,y,\omega)$, определяет две функции $H_m(x,\omega)$, $(x,\omega) \in \mathscr{D} \times \Omega$, $m = 1, 2$. Разумеется, относительно областей $\mathscr{D}_i^m$ и функций $g_m(x,y,\omega)$ выполнены все предположения, сделанные в § 1 для $\mathscr{D}_i$ и $g(x,y,\omega)$. В этих обозначениях имеет место теорема единственности.

Теорема 3.2. *Пусть для всякой контактной точки $z \in \partial\mathscr{D}_{j_m}^m \cap \partial\mathscr{D}_{l_m}^m$ и для каждого $m = 1, 2$ выполняется хотя бы одно из неравенств*

$$[g_m(z,z,\omega_0(z))]_{j_m,l_m} \neq 0, \ [g_m(z,z,-\omega_0(z))]_{j_m,l_m} \neq 0, \ (\omega_0(z), n_{j_m}(z)) = 0. \quad (3.12)$$

Тогда из совпадения функций $H_1(x,\omega)$ и $H_2(x,\omega)$, $(x,\omega) \in \mathscr{D} \times \Omega$, следует совпадение линий $\partial\mathscr{D}_0^1$ и $\partial\mathscr{D}_0^2$.

Доказательство. Равенство $H_1(x,\omega) = H_2(x,\omega)$ влечет равенство функций $Q_1(x,\omega)$ и $Q_2(x,\omega)$, $(x,\omega) \in \mathscr{D} \times \Omega$, где $Q_1 = \beta H_1$, $Q_2 = \beta H_2$; $\beta(x,\omega)$ — пока произвольная вспомогательная функция, введенная в § 1. Отсюда следует совпадение индикаторов $\mathscr{I}_1(x)$ и $\mathscr{I}_2(x)$, определяемых по формуле (3.1), если на место функции $Q(x,\omega)$ поставлены $Q_1(x,\omega)$ и $Q_2(x,\omega)$ соответственно. Теперь возьмем произвольную контактную точку z, $z \in \partial\mathscr{D}_0^1$, $z \in \partial\mathscr{D}_{j_1}^1 \cap \partial\mathscr{D}_{l_2}^2$, и докажем, что $z \in \partial\mathscr{D}_0^2$. Предположим противное, т. е. $z \notin \partial\mathscr{D}_0^2$. Тогда существует окрестность $V(z)$ точки z, не содержащая точек из $\partial\mathscr{D}_0^2$, т. е. $\overline{V}(z) \subset \mathscr{D}_0^2$. Обозначим через $\delta^{(1)}$ число для $\partial\mathscr{D}_0^1$, аналогичное числу δ для $\partial\mathscr{D}_0$, как об этом сказано в § 2 перед леммой 2.2. Уменьшая, если нужно, число $\delta^{(1)}$, можно добиться включения точек $x = z + \tau n_{j_1}(z)$, $0 < \tau \le \delta^{(1)}$, в окрестность $V(z)$. Но при этом $x \notin \partial\mathscr{D}_0^2$. Более того, расстояние между всеми такими точками x и линией $\partial\mathscr{D}_0^2$ больше некоторого положительного числа. Ввиду того, что $x \in \mathscr{D}_0^2$, $x \in \mathscr{D}_0^1$, для x определены оба индикатора $\mathscr{I}_1(x)$ и $\mathscr{I}_2(x)$. Однако их поведение различно. Согласно следствию 3.1 функция $\mathscr{I}_2(x)$ ограничена при $x = z + \tau n_{j_1}(z)$, $0 < \tau \le \delta^{(1)}$. Изучим индикатор $\mathscr{I}_1(x)$. Пусть для определенности при $m = 1$

выполняется первое из неравенств (3.12), т. е. $[g_1(z,z,\omega_0(z))]_{j_1,l_1} \neq 0$ (для второго неравенства последующие рассуждения аналогичны). Возьмем в качестве $\beta(x,\omega)$ вспомогательную функцию такую, что $\beta(z,\omega_0(z)) \neq 0$, $\beta(z,-\omega_0(z)) = 0$, и рассмотрим функцию $M_1(z)$, определенную формулой (3.3), где на место функции q подставлена $q_1(x,y,\omega) = \beta(x,\omega)g_1(x,y,\omega)$. Нетрудно понять, что в нашем случае верно неравенство $M_1(z) > 0$. Отсюда согласно следствию 3.1 имеем $\mathscr{I}_1(x) \to \infty$ при $x \to z$. Поэтому функции $\mathscr{I}_1(x)$ и $\mathscr{I}_2(x)$ не могут совпадать при всех $x = z + \tau n_{j_1}(z)$, $0 < \tau \leq \delta^{(1)}$. Полученное противоречие доказывает, что $z \in \partial\mathscr{D}_0^2$, т. е. всякая контактная точка линии $\partial\mathscr{D}_0^1$ есть также точка из $\partial\mathscr{D}_0^2$. Так как любая точка линии $\partial\mathscr{D}_0^1 \setminus \partial\mathscr{D}$ является предельной для своих контактных точек, верно включение $\partial\mathscr{D}_0^1 \setminus \partial\mathscr{D} \subset \partial\mathscr{D}_0^2 \setminus \partial\mathscr{D}$, или $\partial\mathscr{D}_0^1 \subset \partial\mathscr{D}_0^2$. По симметрии рассуждений можно утверждать также, что $\partial\mathscr{D}_0^2 \subset \partial\mathscr{D}_0^1$, т. е. $\partial\mathscr{D}_0^1 = \partial\mathscr{D}_0^2$. Теорема доказана.

Как видно, доказанная теорема единственности имеет несколько условный характер. Действительно, в ней содержится ограничение, состоящее в наличии ненулевого скачка неизвестной функции в точках искомой линии и для хотя бы одного касательного направления. Однако заметим, что это требование довольно близко к условию существования линии разрывов, при отсутствии которого рассмотренная задача теряла бы содержательный смысл. Возьмем, например, довольно типичный случай, упомянутый в конце § 1: $g(x,y,\omega) = w_1(x,y,\omega)w_2(y)$, где разрывной может быть только $w_2(y)$. Легко видеть, что в этом варианте упомянутое условие теоремы единственности является эквивалентным условию существования искомой линии.

В заключение отметим, что наличие явных формул для индикатора $\mathscr{I}(x)$ и их простота позволяют надеяться на создание соответствующего устойчивого алгоритма решения задачи интегральной геометрии, что уже было успешно реализовано в одном частном случае [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.
2. *Владимиров В. С.* Математические задачи односкоростной теории переноса частиц // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова АН СССР. 1961. Т. 61. С. 3–158.
3. *Anikonov D. S.* Integro-differential heterogeneity indicator in tomography problem // J. Inverse Ill-Posed Problems. 1999. V. 7, N 1. P. 17–59.
4. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.
5. *Лаврентьев М. М., Савельев Л. Я.* Теория операторов и некорректные задачи. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики СО РАН, 1999.
6. *Романов В. Г.* Обратные задачи для дифференциальных уравнений. Новосибирск: Новосиб. гос. ун-т, 1973.
7. *Гельфанд И. М., Гончаров А. Б.* Нахождение функции с компактным носителем по интегралам вдоль линий, пресекающих заданное множество точек в пространстве // Докл. АН СССР. 1986. Т. 290, № 5. С. 1037–1040.
8. *Паламодов В. П.* Некоторые сингулярные задачи томографии // Вопросы томографии. Математические проблемы томографии. М.: Наука, 1990. С. 132–140.
9. *Вайнберг Э. Н., Казак И. А., Файнгойз М. Л.* Рентгеновская вычислительная томография по методу обратного проецирования с фильтрацией двойным дифференцированием // Дефектоскопия. 1985. № 2. С. 31–39.
10. *Faridani A., Keinert F., Ritman T. L, Smith K. T.* Local and global tomography // Signal processing. New York: Springer-Verl., 1990. P. 241–255. (IMA Vol. Math. Appl.; V. 23).
11. *Louis A. K., Maass P.* Contour reconstruction in 3-D X-Ray CT // IEEE Trans. Med. Imag. 1993. V. 12, N 4. P. 109–115.

12. *Katsevich A. I., Ramm A. G.* New methods for finding values of the jumps of a function from its local tomographic data // Inverse Problems. 1995. V. 11. P. 1005–1023.

13. *Derevtsov E. Yu., Pickalov V. V., Schuster T., Louis A. K.* Reconstruction of singularities in local vector and tensor tomography // International Conference "Inverse Problems: Modelling and Simulation", May 29–June 02, 2006. Abstracts. Fethiye, Turkey, 2006. P. 38–40.

14. *V. Sharafutdinov, M. Skonan, G. Uhlmann.* Regularity of ghosts in tensor tomography. 2004. 50 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; №136).

15. *Аниконов Д. С.* Об ограниченности сингулярного интегрального оператора в пространстве $C^{\alpha}(\overline{G})$ // Мат. сб. 1977. Т. 104, № 4. С. 515–534.

Статья поступила 26 февраля 2007 г.

Аниконов Дмитрий Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
anik@math.nsc.ru