Сибирский математический журнал
Июль—август, 2008. Том 49, № 4

УДК 512.534.2+510.227

О СБАЛАНСИРОВАННЫХ ПОДМНОЖЕСТВАХ СИММЕТРИЧЕСКОЙ ИНВЕРСНОЙ ПОЛУГРУППЫ

В. А. Колмыков

Аннотация. Для элементов подмножеств симметрической инверсной полугруппы исследуется вопрос о равномощности множеств коммутирующих и некоммутирующих элементов.

Ключевые слова: инверсная полугруппа, кардинальное число.

Введение. Со всяким множеством M связана полугруппа $\mathscr{I}(M)$, состоящая из всевозможных частичных инъективных преобразований множества M. Она называется *симметрической инверсной полугруппой*. В теории инверсных полугрупп (см. [1]) роль $\mathscr{I}(M)$ аналогична роли симметрической группы $S(M)$ в теории групп: по теореме Вагнера всякую инверсную полугруппу можно вложить в симметрическую инверсную полугруппу. Поэтому подполугруппы симметрической инверсной полугруппы — важный объект исследования.

Полугруппу назовем *сбалансированной*, если для любого ее неединичного и ненулевого элемента равномощны множества коммутирующих и не коммутирующих с ним элементов.

Из результата настоящей статьи следует, что в случае несчетности множества M всякая полугруппа, заключенная между $S(M)$ и $\mathscr{I}(M)$, является сбалансированной.

1. Формулировка результата. *Частичным преобразованием множества* M называется всякое отображение $f : L \to M$, где L — подмножество в M, называемое *областью определения* $D(f)$ частичного преобразования f. Частичное преобразование f множества M называется *частичным инъективным преобразованием* множества M, если соответствующее отображение $D(f) \to M$ инъективно. Частичные инъективные преобразования множества M образуют (относительно операции суперпозиции) полугруппу $\mathscr{I}(M)$. В ней имеется важная подполугруппа $I(M)$, состоящая из всех инъективных преобразований множества M.

В [2] сформулирован вопрос: верно ли, что в случае несчетности множества M любая полугруппа P такая, что $I(M) \subseteq P \subseteq \mathscr{I}(M)$, является сбалансированной? Ниже доказано, что ответ утвердительный. Более того, полугруппу $I(M)$ можно заменить группой $S(M)$, а полугруппу P — множеством F.

Подмножество F некоторой полугруппы назовем *сбалансированным*, если для любого неединичного и ненулевого элемента $a \in F$ множество элементов, содержащихся в F и коммутирующих с a, равномощно множеству элементов, содержащихся в F и не коммутирующих с a.

Теорема. *Пусть множество M бесконечно и $S(M) \subseteq F \subseteq \mathscr{I}(M)$. Множество F сбалансировано, если и только если M несчетно.*

Замечание. Эта теорема является усилением утверждения из [2], которое само есть усиление теоремы 2 из работы [3].

2. Доказательство теоремы. Через $C_{\mathscr{I}(M)}(g)$ обозначается централизатор элемента g в полугруппе $\mathscr{I}(M)$.

Если множество M счетно, то несбалансированность множества F доказывается совсем просто. Без ограничения общности можно считать, что $M = \mathbf{Z}$. Так как $|F| \geq |S(\mathbf{Z})| = 2^{\aleph_0}$, то достаточно привести пример элемента $\sigma \in S(\mathbf{Z})$, для которого $|C_{\mathscr{I}(M)}(\sigma)| = \aleph_0$. В [2] доказано, что таким свойством обладает подстановка $\sigma : n \mapsto n+1$.

В случае несчетности множества M сбалансированность множества F вытекает из лемм 3 и 4, для доказательства которых нужны некоторые конструкции и вспомогательные утверждения.

Исследование коммутативности частичных преобразований удобно проводить с помощью теории графов. В [3, 4] использовалась техника теории графов. В настоящей статье достаточно лишь теоретико-графового языка. Любопытно заметить, что при этом результат, более общий, чем в [2], доказывается более просто.

Ориентированный граф (орграф) — это пара (V, E), где $E \subseteq V^2$. Элемент $\overrightarrow{uv} = (u, v) \in E$ называется *стрелкой* с началом u и концом v. Для орграфа $G = (V, E)$ также обозначают $V(G) = V$ и $E(G) = E$.

Следующие примеры орграфов будут важны для нас.

1. Орграф $\overrightarrow{P}_n$ определяется так. Если $n \in \mathbf{N}$ и $n \geq 2$, то $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\overrightarrow{v_1v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}v_n}\}$. Если $n = 1$, то $V = \{v_1\}$, $E = \varnothing$.

2. Орграф $\overrightarrow{C}_n$ определяется следующим образом. Если $n \in \mathbf{N}$ и $n \geq 2$, то $V = \{v_1, \dots, v_n\}$, $E = \{\overrightarrow{v_1v_2}, \dots, \overrightarrow{v_{n-1}v_n}, \overrightarrow{v_nv_1}\}$. Если $n = 1$, то $V = \{v_1\}$, $E = \{\overrightarrow{v_1v_1}\}$.

3. Орграф $\overrightarrow{Z}$, для которого $V = \{v_i\}_{i \in \mathbf{Z}}$, $E = \{\overrightarrow{v_iv_{i+1}}\}_{i \in \mathbf{Z}}$.

4. Орграф $\overrightarrow{N}$, для которого $V = \{v_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, $E = \{\overrightarrow{v_iv_{i+1}}\}_{i \in \mathbf{N}}$.

5. Орграф $\overleftarrow{N}$, для которого $V = \{v_i\}_{i \in \mathbf{N}}$, $E = \{\overrightarrow{v_iv_{i-1}}\}_{i \geq 2}$.

Положим
$$\mathscr{L} = \{\overrightarrow{N}, \overleftarrow{N}, \overrightarrow{Z}, \overrightarrow{P}_1, \overrightarrow{P}_2, \dots; \overrightarrow{C}_1, \overrightarrow{C}_2, \dots\}.$$

Частичному преобразованию g множества M поставим в соответствие орграф O_g, для которого $V = M$, $E = \{\overrightarrow{uf(u)}\}_{u \in D(g)}$.

Изоморфизмом двух орграфов называется биекция множеств их вершин $v \mapsto \tilde{v}$ такая, что наличие стрелки $\overrightarrow{uv}$ равносильно наличию стрелки $\overrightarrow{\tilde{u}\tilde{v}}$.

Компоненты связности[1)] орграфа O_g устроены очень просто.

Лемма 1. *Если $g \in \mathscr{I}(M)$, то каждая компонента орграфа O_g изоморфна одному из орграфов множества $\mathscr{L}$.* $\square$

Элементы множества $\mathscr{L}$ занумеруем натуральными числами: $\mathscr{L} = \{L_i\}_{i \in \mathbf{N}}$. Положим $l_i = |V(L_i)|$. Мощность множества компонент орграфа G обычно обозначается через $k(G)$. Через $k_i(O_g)$ обозначим мощность множества компонент

[1)] Точнее, компоненты слабой связности. Две вершины орграфа слабо связаны, если они связаны в неориентированном графе, получающемся заменой стрелок ребрами.

орграфа O_g, изоморфных орграфу L_i, а через $K(O_g)$ — множество индексов, для которых $k_i(O_g) \neq 0$.

Если s — некоторое кардинальное число и $s \geq \aleph_0$, то положим $s - 1 = s$. Кардинальное число $\sum\limits_{i \in K(O_g)} (k_i(O_g) - 1)$ обозначим через $k'(O_g)$.

Лемма 2. *Если* $|M| > \aleph_0$ *и* $g \in \mathscr{I}(M)$, *то* $k'(O_g) = |M|$.

Доказательство. Положим $k = k(O_g)$, $k_i = k_i(O_g)$, $K = K(O_g)$ и $k' = k'(O_g)$. Так как $\aleph_0 < |M| = \sum\limits_{i \in K} l_i k_i \leq \aleph_0 k$, то $k > \aleph_0$. Отсюда $|M| \leq \aleph_0 k = k$, но $k \leq |M|$, поэтому $k = |M|$.

Для некоторого $s \leq \aleph_0$ справедливо равенство

$$\aleph_0 + k' = \aleph_0 + \sum_{i \in K} (k_i - 1) = k + s.$$

Так как $k > \aleph_0$, то $\aleph_0 + k' > \aleph_0$; поэтому $k' > \aleph_0$. Теперь из равенства $\aleph_0 + k' = k + s$ следует, что $k' = k$. $\square$

Лемма 3. *Если* $|M| > \aleph_0$ *и* $g \in \mathscr{I}(M)$, *то* $|S(M) \cap C_{\mathscr{I}(M)}(g)| = 2^{|M|}$.

Доказательство. Автоморфизм орграфа — это изоморфизм с самим собой. Множество всех автоморфизмов орграфа G обозначается через $\mathrm{Aut}(G)$. Очевидно, что $S(M) \cap C_{\mathscr{I}(M)}(g) = \mathrm{Aut}(O_g)$.

Так как $|S(M)| = |M|!$, если $|M| < \aleph_0$, и $|S(M)| = 2^{|M|}$, если $|M| \geq \aleph_0$, то $|S(M)| \geq 2^{|M|-1}$.

Пусть все компоненты некоторого непустого орграфа G изоморфны друг другу и $\mathscr{K}$ — множество этих компонент. Тогда

$$|\mathrm{Aut}(G)| \geq |S(\mathscr{K})| \geq 2^{|\mathscr{K}|-1} = 2^{k(G)-1}.$$

Отсюда следует, что

$$|\mathrm{Aut}(O_g)| \geq \prod_{i \in K(O_g)} 2^{k_i(O_g)-1} = 2^{k'(O_g)}.$$

Из этого и леммы 2 вытекает, что $|\mathrm{Aut}(O_g)| \geq 2^{|M|}$, но $|\mathrm{Aut}(O_g)| \leq 2^{|M|}$. $\square$

Лемма 4. *Если множество M бесконечно и f — неединичный и ненулевой элемент полугруппы $\mathscr{I}(M)$, то*

$$|S(M) \setminus C_{\mathscr{I}(M)}(f)| = 2^{|M|}.$$

Доказательство. Напомним, что элемент $g \in \mathscr{I}(M)$ является единичным (соответственно нулевым), если все компоненты орграфа O_g изоморфны орграфу $\overrightarrow{C}_1$ (соответственно $\overrightarrow{P}_1$). Для элемента $f \in \mathscr{I}(M)$ рассмотрим две возможности.

1. Пусть одна компонента орграфа O_f изоморфна орграфу $\overrightarrow{C}_1$ (вершину этой компоненты обозначим через a), а остальные компоненты изоморфны орграфу $\overrightarrow{P}_1$. Пусть $b \in M$ и $b \neq a$. Если $\sigma \in S(M)$, $\sigma(a) = b$ и $\sigma(b) = a$, то $\sigma \notin C_{\mathscr{I}(M)}(f)$. Поэтому

$$|S(M) \setminus C_{\mathscr{I}(M)}(f)| \geq |S(M \setminus \{a, b\})| = 2^{|M|}.$$

2. В ином случае можно утверждать, что в множестве M существуют b и c такие, что $b \in D(f)$, $f(b) \neq b$, $c \neq b$, $c \neq f(b)$ и $c \neq f(f(b))$ (если $f(f(b))$ не определено, то утверждение $c \neq f(f(b))$ верно, так как выражение c определено). Если $\sigma \in S(M)$, $\sigma(b) = f(b)$, $\sigma(f(b)) = c$ и $\sigma(c) = b$, то $\sigma \notin C_{\mathscr{I}(M)}(f)$. Поэтому $|S(M) \setminus C_{\mathscr{I}(M)}(f)| \geq |S(M \setminus \{b, f(b), c\})| = 2^{|M|}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Petrich M.* Inverse semigroups. New York: John Wiley & Sons, 1984.
2. *Колмыков В. А.* О соотношении коммутативности в полугруппах инъекций // Изв. вузов. Математика. 2006. № 11. С. 26–28.
3. *Колмыков В. А.* О соотношении коммутативности в симметрической полугруппе // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1130–1135.
4. *Колмыков В. А.* Эндоморфизмы функциональных графов // Дискрет. математика. 2006. Т. 18, № 3. С. 115–119.

Статья поступила 22 декабря 2006 г.

Колмыков Владислав Алексеевич
Воронежский гос. университет, НИИ математики при ВГУ,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
kolmykov@math.vsu.ru