Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2008. Том 49, № 6

УДК 510.6+510.5

ОБ ИНДЕКСНЫХ МНОЖЕСТВАХ Σ–ПОДМНОЖЕСТВ ВЕЩЕСТВЕННЫХ ЧИСЕЛ

А. С. Морозов

Аннотация. Вычислены уровни сложности в арифметической и аналитической иерархиях для множеств Σ-формул, определяющих в наследственно конечной надстройке над упорядоченным полем вещественных чисел классы открытых, замкнутых, открыто-замкнутых нигде не плотных, плотных подмножеств в $\mathbb{R}^n$, подмножеств первой категории в $\mathbb{R}^n$, а также множеств пар Σ-формул, соответствующих отношению равенства и включения на определяемых ими подмножествах $\mathbb{R}^n$. Показано, что сложность множества Σ-формул, определяющих связные множества, не ниже Π^1_1.

Ключевые слова: вычислимость над вещественными числами, сигма-формула, допустимое множество, индексное множество, наследственно-конечная надстройка.

1. Введение

Все основные определения и понятия можно найти в [1–4].

В работе изучаются уровни в аналитической и арифметической иерархиях для множеств Σ-формул, определяющих подмножества $\mathbb{R}^n$ в наследственно-конечной надстройке $\mathbb{HF}(\mathbb{R})$ над упорядоченным полем вещественных чисел $\mathbb{R}$ и обладающих заданными свойствами, а также для некоторых отношений на таких подмножествах.

Перейдем к определениям и обозначениям. Множество натуральных чисел обозначается через ω, множество рациональных чисел — через $\mathbb{Q}$. Через W_k обозначаем k-е перечислимое множество [4]. Если $\bar{a} \in \mathbb{R}^n$ и $\varepsilon > 0$, то обозначаем через $B(\bar{a}, \varepsilon)$ открытый шар с центром в точке $\bar{a}$ радиуса ε, т. е. множество $\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \|\bar{x} - \bar{a}\| < \varepsilon\}$. Мы используем обычные обозначения для интервалов: $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x \leqslant b\}$, $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} \mid a \leqslant x < b\}$ и т. д.

Рассмотрим произвольную модель $\mathfrak{A}$ конечной сигнатуры. Мы предполагаем, что для каждого $n \in \omega$ зафиксирована некоторая гёделева нумерация $\gamma^{(n),\mathfrak{A}}$ всех Σ-формул языка структуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, свободные переменные которых содержатся среди $x_1, \dots, x_n$. Σ-формулу с номером m в нумерации $\gamma^{(n),\mathfrak{A}}$ будем обозначать через $\gamma_m^{(n),\mathfrak{A}}$. Также предполагаем, что семейство этих нумераций $(\gamma^{(n),\mathfrak{A}})_{n\in\omega}$ равномерно по n, т. е. по любым $m, n \in \omega$ мы можем эффективно выписать формулу $\gamma_m^{(n),\mathfrak{A}}$ и по любой Σ-формуле φ и любому n такому, что все свободные переменные φ содержатся среди $x_1, \dots, x_n$, можно эффективно найти такое m, что $\varphi = \gamma_m^{(n),\mathfrak{A}}$. В дальнейшем всегда будет ясно, о какой модели $\mathfrak{A}$

Работа выполнена при финансовой поддержке совместного российско-германского гранта DFG–РФФИ N 06–01–04002–ННИОа, Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00336–а), Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–335.2008.1).

идет речь, поэтому будем опускать верхний индекс $\mathfrak{A}$. Для произвольного множества A через $\mathscr{P}(A)$ будем обозначать множество всех подмножеств A. Если φ — формула языка структуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$, свободные переменные которой содержатся в множестве $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, то через $\varphi^{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}[x_1, x_2, \dots, x_n]$ будем обозначать множество

$$\{\langle a_1, a_2, \dots, a_n\rangle \in \mathfrak{A}^n \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \models \varphi(a_1, a_2, \dots, a_n)\}.$$

Для каждого n возникает естественная нумерация $\lambda^{(n)}$ всех Σ-подмножеств $\mathfrak{A}^n$:

$$\lambda^{(n),\mathfrak{A}}(m) \overset{df}{=} \left(\gamma_m^{(n),\mathfrak{A}}\right)^{\mathbb{HF}(\mathfrak{A})}[x_1, x_2, \dots, x_n].$$

Пусть $S_\Sigma^{(n),\mathfrak{A}}$ обозначает множество всех подмножеств $\mathfrak{A}^n$, Σ-определимых без параметров над $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$. Нумерованное множество $\langle S_\Sigma^{(n),\mathfrak{A}}, \lambda^{(n),\mathfrak{A}}\rangle$ обозначим через $\mathfrak{F}_n$. В дальнейшем будем опускать верхние индексы $\mathfrak{A}$.

Предложение 1. *Для каждого $n \in \omega \setminus \{0\}$ нумерованное множество $\mathfrak{F}_n$ является полно нумерованным множеством. Множество номеров любого его нетривиального подмножества не вычислимо.*

Доказательство. Второе утверждение теоремы следует из первого по теореме Райса для предполно нумерованных множеств [1, следствие 1, с. 156]. Согласно [1, предложение 3, с. 156] достаточно проверить, что для любой частично рекурсивной функции g существует общерекурсивная функция f такая, что

$$\lambda^{(n)}(f(m)) = \begin{cases} \lambda^{(n)}(g(m)), & \text{если } g(x) \text{ определеноm} \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Имеем

$$\left(\exists y \in \omega \left(\gamma_y^{(n)}(\bar{x}) \wedge (g(m) = y)\right)\right)^{\mathbb{HF}(\mathbb{R})}[\bar{x}] = \begin{cases} \lambda^{(n)}(g(m)), & \text{если } g(m) \text{ определено,} \\ \varnothing & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Существует такая вычислимая функция f, что формула $\gamma_{f(m)}^{(n)}$ эквивалентна $\exists y \in \omega \ \left(\gamma_y^{(n)} \wedge (g(m)) = y\right)$, откуда и следует доказываемое предложение.

Определим другую нумерацию класса всех Σ-определимых без параметров подмножеств $\mathfrak{A}^n$. Пусть $\left(\eta_m^{(n)}\right)_{m\in\omega}$ — гёделева нумерация всех $\exists$-формул языка модели $\mathfrak{A}$, все свободные переменные которых содержатся среди $\bar{x} = x_1, \dots, x_n$. Для $k < \omega$ положим

$$\mu^{(n),\mathfrak{A}}(k) = \Big\{\bar{x} \in \mathfrak{A}^n \mid \mathfrak{A} \models \bigvee_{i \in W_k} \eta_i^{(n)}(\bar{x})\Big\}.$$

Соответствующее нумерованное множество $\langle S_\Sigma^{(n),\mathfrak{A}}, \mu^{(n),\mathfrak{A}}\rangle$ обозначим через $\mathfrak{S}_n$.

Нам понадобится следующее хорошо известное

Предложение 2 [5]. *Пусть $\mathfrak{A}$ — произвольная модель конечной сигнатуры. По любой Σ-формуле $\varphi(x_1, \dots, x_n)$ сигнатуры модели $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ эффективно строится перечислимое множество W такое, что для любых $a_1, \dots, a_n \in \mathfrak{A}$ справедлива эквивалентность*

$$\mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \models \varphi(a_1, \dots, a_n) \ \Leftrightarrow \ \mathfrak{A} \models \bigvee_{i \in W} \eta_i^{(n)}(a_1, \dots, a_n).$$

Замечание 1. Учитывая, что теория упорядоченного поля вещественных чисел допускает эффективную элиминацию кванторов, можно считать, что в нашем случае $\mathfrak{A} = \mathbb{R}$ каждая из формул $\eta_i^{(n)}$ имеет вид

$$\bigwedge_{i=1}^{m_1}(f_i(\bar{x}) = 0) \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{m_2}(g_i(\bar{x}) \neq 0) \ \wedge \ \bigwedge_{i=1}^{m_3}(h_i(\bar{x}) > 0).$$

Следующая теорема позволит нам в каждом конкретном случае пользоваться наиболее удобной из двух нумераций $\mathfrak{F}_n$ и $\mathfrak{S}_n$ и переносить полученные результаты с одной нумерации на другую.

Теорема 1. *Нумерованные множества $\mathfrak{F}_n$ и $\mathfrak{S}_n$ вычислимо изоморфны.*

Доказательство. Достаточно показать, что эти нумерации 1-сводимы друг к другу (см. [1, теорема 2, с. 104]). Нетрудно понять, что обе нумерации $\lambda^{(n)}$ и $\mu^{(n)}$ цилиндрические. Поэтому достаточно показать, что эти нумерации m-сводимы друг к другу. Сводимость $\lambda^{(n)}$ к $\mu^{(n)}$ непосредственно следует из предложения 2.

Покажем сводимость $\mu^{(n)}$ к $\lambda^{(n)}$. Будем рассматривать формулы языка модели $\mathfrak{A}$ как элементы структуры $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ (см. [3]). Нам будет необходимо существование Σ-определимого без параметров предиката $\mathtt{Sat}(u, v)$, который истинен на $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ тогда и только тогда, когда $v = v_1, \dots, v_k$ — кортеж элементов из $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ для некоторого k и u — Σ-формула, все свободные переменные которой содержатся среди $x_0, \dots, x_k$ и $\mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \models u(v_1, \dots, v_k)$ (см. [3] или [1]). Заметим, что отображение $i \mapsto \eta_i^{(n)}$ Σ-определимо без параметров. Возьмем произвольное $k \in \omega$. Тогда

$$\mu^{(n)}(k) = \Big\{\bar{x} \in \mathfrak{A}^n \mid \mathfrak{A} \models \bigvee_{i \in W_k} \eta_i^{(n)}(\bar{x})\Big\}.$$

Имеем

$$\mu^{(n)}(k) = \big\{\bar{x} \in \mathfrak{A}^n \mid \mathbb{HF}(\mathfrak{A}) \models \exists i \in \omega(i \in W_k) \wedge \mathtt{Sat}\big(\eta_i^{(n)}, \bar{x}\big)\big\}.$$

Ввиду того, что отношение $i \in W_k$ Σ-определимо в $\mathbb{HF}(\mathfrak{A})$ без параметров, последнее можно записать Σ-формулой, $\gamma^{(n)}$-номер которой находится эффективно по k. Теорема доказана.

Пусть

$$\mathfrak{P} \subseteq \mathscr{P}(\mathfrak{A}^{n_1}) \times \mathscr{P}(\mathfrak{A}^{n_2}) \times \dots \times \mathscr{P}(\mathfrak{A}^{n_k}), \quad n_1, n_2, \dots, n_k \in \omega.$$

Определим *индексное множество отношения* $\mathfrak{P}$ как

$$I_{\mathfrak{P}} = \{\langle m_1, \dots, m_k\rangle \mid \langle \lambda^{(n_1)}(m_1), \lambda^{(n_2)}(m_2), \dots, \lambda^{(n_k)}(m_k)\rangle \in \mathfrak{P}\}.$$

Мы будем неоднократно пользоваться хорошо известным результатом о разрешимости и эффективной элиминации кванторов теории упорядоченного поля вещественных чисел $\mathbb{R}$.

2. Основной результат

Теорема 2. 1. *Индексное множество свойства «быть открытым подмножеством в $\mathbb{R}^n$» Π^1_1-полно для всех $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

2. *Индексное множество свойства «быть замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}^n$» Π^1_1-полно для всех $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

3. *Индексное множество свойства «быть открыто-замкнутым подмножеством в $\mathbb{R}^n$» Π^1_1-полно для всех $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

4. *Индексное множество отношения включения на $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ Π^1_1-полно для всех $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

5. *Индексное множество отношения равенства на $\mathscr{P}(\mathbb{R}^n) \times \mathscr{P}(\mathbb{R}^n)$ Π^1_1-полно для всех $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

6. *Индексное множество свойства «быть нигде не плотным подмножеством в $\mathbb{R}^n$» Π^0_3-полно для всех $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

7. *Индексное множество свойства «быть плотным подмножеством в $\mathbb{R}^n$» Π^0_2-полно для всех $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

8. *Индексное множество свойства «быть множеством первой категории в $\mathbb{R}^n$» Π^0_1-полно для всех $n \in \omega \setminus \{0\}$.*

Доказательство. Напомним определение упорядочения Клини — Брауэра $<_{\mathsf{KB}}$ на множестве $\omega^\omega \cup \omega^{<\omega}$: соотношение $\alpha <_{\mathsf{KB}} \beta$ выполнено тогда и только тогда, когда β является начальным сегментом α либо β не является начальным сегментом α и при этом α лексикографически меньше, чем β (см. [4]).

Обозначим через $\mathfrak{T}$ множество всех деревьев $T \subseteq \omega^{<\omega}$, у которых существуют наименьший и наибольший элементы относительно упорядочения $<_{\mathsf{KB}}$. Нетрудно убедиться, что по любому эффективному перечислению произвольного дерева $T \subseteq \omega^{<\omega}$ эффективно строится перечисление некоторого бесконечного дерева $T^* \in \mathfrak{T}$ такого, что T не имеет бесконечных ветвей тогда и только тогда, когда T^* не имеет бесконечных ветвей.

Хорошо известна следующая

Лемма 1 [3]. *Упорядочение $<_{\mathsf{KB}}$ на дереве T является вполне упорядочением тогда и только тогда, когда T не имеет бесконечных ветвей.*

Лемма 2. *Существует эффективная процедура, которая по любому эффективному перечислению произвольного дерева $T \in \mathfrak{T}$ такому, что первым в этом перечислении идет наименьший относительно $<_{\mathsf{KB}}$ элемент, строит вычислимую последовательность рациональных чисел $(q_{\alpha,t})_{\alpha \in T, t \in \omega}$ такую, что множество $S_T = \bigcup\limits_{\alpha \in T, t \in \omega} [q_{\alpha,t}, q_{\alpha,t+1})$ удовлетворяет следующим условиям:*

1) *$\varnothing \neq S_T \subseteq [0,1)$;*

2) *$S_T = [0,1)$ тогда и только тогда, когда T не имеет бесконечных ветвей;*

3) *множество S_T плотно в $[0,1)$.*

Доказательство. Будем строить последовательность $q_{\alpha,i}$ по шагам.

Шаг 0. Пусть $T^0 = \{\alpha\}$, α — наименьший элемент из T относительно $<_{\mathsf{KB}}$. Полагаем $q_{\alpha,0} = 0$.

Шаг t. Состоит из двух подшагов.

Подшаг 1. Для каждого α такого, что некоторое число $q_{\alpha,t}$ в данный момент определено, проделываем нижеследующее.

Сначала зафиксируем наибольшее t, для которого $q_{\alpha,t}$ определено.

Если существует определенное в данный момент число $q_{\beta,s} > q_{\alpha,t}$, то зафиксируем число $q_{\beta,s}$, для которого не существует γ и v таких, что $q_{\alpha,t} < q_{\gamma,v} < q_{\beta,s}$, и положим $q_{\alpha,t+1} = \frac{1}{2}(q_{\alpha,t} + q_{\beta,s})$.

Если ни одного числа $q_{\beta,s} > q_{\alpha,t}$ в данный момент не определено, то положим $q_{\alpha,t+1} = \frac{1}{2}(q_{\alpha,t} + 1)$.

Подшаг 2. Пусть $\alpha \in T^{t+1} \setminus T^t$.

Возможны два случая.

Случай 1. Существуют $\alpha_0, \alpha_1 \in T^t$ такие, что $\alpha_0 <_{\mathsf{KB}} \alpha <_{\mathsf{KB}} \alpha_1$. Тогда ищем такую пару $\alpha_0 <_{\mathsf{KB}} \alpha_1 \in T^t$, что $\alpha_0 <_{\mathsf{KB}} \alpha <_{\mathsf{KB}} \alpha_1$ и не существует $\beta \in T^t$ такого, что $\alpha_0 <_{\mathsf{KB}} \beta <_{\mathsf{KB}} \alpha_1$. После этого ищем $s \in \omega$ такое, что строго между $q_{\alpha_0,s}$ и $q_{\alpha_1,0}$ не существует определенных в данный момент элементов вида $q_{\gamma,v}$, и затем полагаем $q_{\alpha,0} = \frac{1}{2}(q_{\alpha_0,s} + q_{\alpha_1,0})$.

Случай 2. Случай 1 не выполнен, и существует $\alpha_0 \in T^t$ такой, что $\alpha_0 <_{\mathsf{KB}} \alpha$, и не существует $\beta \in T^t$ такого, что $\alpha_0 <_{\mathsf{KB}} \beta <_{\mathsf{KB}} \alpha$. Тогда найдем максимальное $s \in \omega$ такое, что $q_{\alpha_0,s}$ определено, и положим $q_{\alpha,0} = \frac{1}{2}(q_{\alpha_0,s} + 1)$.

Из построения видно, что так построенные элементы $q_{\alpha,s}$ обладают следующими свойствами:

1) отображение $\alpha \in T$, $s \in \omega \mapsto q_{\alpha,s}$, вычислимо, причем алгоритм для его вычисления строится равномерно по перечислению дерева T;

2) $q_{\alpha,s} < q_{\beta,t} \;\Leftrightarrow\; (\alpha <_{\mathsf{KB}} \beta) \vee (\alpha = \beta \wedge s < t)$.

П. 1 леммы очевиден.

Докажем п. 2 леммы. Пусть T не имеет бесконечных ветвей, но существует

$$r \in [0,1) \setminus S_T. \tag{1}$$

Рассмотрим $A = \{\alpha \in T \mid r \leqslant q_{\alpha,0}\}$. Поскольку T содержит наибольший элемент, из построения следует, что $A \neq \varnothing$. Предположим, что в множестве A существует наименьший относительно порядка $<_{\mathsf{KB}}$ элемент α_0. Тогда с учетом (1) имеем $r < q_{\alpha_0,0}$. В силу описания первого шага $r \neq 0$ и на каждом шаге t существует такой определенный элемент w_t вида $q_{\beta,s}$, что $w_t \leqslant r$ и строго между w_t и r на этом шаге уже нет определенных к данному моменту элементов вида $q_{\beta,s}$; при этом в силу (1) и описания построения равенство $w_t \leqslant r$ невозможно.

Пусть элемент $q_{\alpha_0,0}$ появляется на шаге t_0 нашей конструкции. Тогда для всех $t \geqslant t_0$ выполнено $\|w_t - q_{\alpha_0,0}\| \leqslant \frac{1}{2}\|w_{t+1} - q_{\alpha_0,0}\|$. Отсюда $\lim\limits_{t\to\infty} w_t = q_{\alpha_0,0}$; противоречие с тем, что для любого $t > t_0$ выполнено $w_t < r < q_{\alpha_0,0}$.

Значит, множество A не может содержать наименьшего элемента. Тем самым получим существование бесконечной убывающей последовательности элементов T относительно упорядочения $<_{\mathsf{KB}}$, что противоречит лемме 1.

Предположим, что T имеет бесконечную ветвь ζ и $\zeta_0 \subset \zeta_1 \subset \dots$ — ее конечные начальные отрезки из T. Тогда $\zeta_0 >_{\mathsf{KB}} \zeta_1 >_{\mathsf{KB}} \dots$. Покажем, что тогда

$$[0,1) \setminus S_T \neq \varnothing.$$

Более точно, покажем, что $r = \inf\{q_{\zeta_i,0} \mid i < \omega\}$ принадлежит этому множеству. Предположим, что это не так. Тогда $r \in [q_{\alpha,t}, q_{\alpha,t+1})$. Очевидно, что $r < q_{\alpha,t+1} < q_{\zeta_i,0}$ для всех $i < \omega$; противоречие с определением r.

Докажем п. 3 леммы. Обозначим через w_t максимальный элемент среди построенных за первые t шагов, удовлетворяющий условию $w_t < r$. Пусть также u_t — минимальный элемент вида $q_{\alpha,0}$ среди построенных за первые t шагов, удовлетворяющий условию $u_t > r$. Из построения следует, что для любого $t \in \omega$

выполнено неравенство $\|w_{t+1}-u_{t+1}\| \leqslant \frac{1}{2}\|w_t-u_t\|$. Отсюда вытекает, что точки u_t вида $q_{\alpha,0}$, принадлежащие множеству S_n, содержатся в любой окрестности точки r.

Зафиксируем некоторое вычислимое взаимно однозначное отображение $i \mapsto r_i$ из ω на $\mathbb{Q}$. Будем с помощью этого отображения отождествлять функции $f:\omega\to\omega$ и последовательности рациональных чисел $(r_{f(i)})_{i\in\omega}$.

Лемма 3. *Множество* $\bigl\{\bigl\langle m, \bigl(q_i^{(1)}\bigr)_{i<\omega}, \dots, \bigl(q_i^{(k)}\bigr)_{i<\omega}\bigr\rangle \mid \bigl(q_i^{(j)}\bigr)_{i<\omega}, j=1,\dots,k,$ *— фундаментальные последовательности и* $\bigl\langle \lim\limits_{i\to\infty} q_i^{(1)}, \dots, \lim\limits_{i\to\infty} q_i^{(k)}\bigr\rangle \in \mu^{(n)}(m)\bigr\}$ *лежит в* Σ_4^0.

Доказательство. Сначала заметим, что свойство «$(q_i)_{i<\omega}$ — фундаментальная последовательность» записывается в Π_3^0-форме как

$$\forall e \exists n_0 \forall m, n > n_0 \ (\|q_m - q_n\| < 1/(e+1)).$$

Без ограничения общности можно считать, что каждая формула $\eta_i^{(n)}$ в дизъюнкции $\bigvee\limits_{i\in W_m} \eta_i^{(n)}$, определяющей множество $\mu^{(n)}(m)$, есть конъюнкция равенств и неравенств вида $f(\bar{x})=0$, $f(\bar{x})\neq 0$, $f(\bar{x})>0$.

Обозначим $q^* = \lim\limits_{i\to\infty} q_i$. Пусть $f(\bar{x})$ — некоторый полином над $\mathbb{Q}$. Свойство $f((q^{(1)})^*,\dots,(q^{(k)})^*)=0$ тоже можно записать в Π_3^0-форме как

$$\forall e \exists n_0 \forall n > n_0 \ \bigl(\bigl\|f\bigl(q_n^{(1)},\dots,q_n^{(k)}\bigr)\bigr\| < 1/(e+1)\bigr).$$

Свойство $f((q^{(1)})^*,\dots,(q^{(k)})^*)\neq 0$ записывается в Σ_2^0-виде как

$$\exists b \exists n_0 \forall n > n_0 \ \bigl(\bigl\|f\bigl(q_n^{(1)},\dots,q_n^{(k)}\bigr)\bigr\| > 1/(b+1)\bigr).$$

Аналогично записывается и в Σ_2^0-виде свойство $f((q^{(1)})^*,\dots,(q^{(k)})^*)>0$.

Заметим, что рассмотренные выше формулы являются также формулами соответствующих арифметических классов от указанных параметров и номера полинома f.

Таким образом, каждая формула $\eta_i^{(n)}(\bar{q}^*)$ имеет представление в Π_3^0-виде от ее номера i и $\bar{q}$, откуда получим, что их дизъюнкция по $i\in W_m$ имеет представление в Σ_4^0-виде. Лемма доказана.

Теперь мы будем последовательно доказывать пункты теоремы.

Докажем (1). Обозначим через $\mathtt{Fund}(\bar{x})$ утверждение о том, что все члены кортежа $\bar{x}$ — фундаментальные последовательности. Тогда утверждение о том, что множество $S=\mu^{(n)}(k)\subseteq\mathbb{R}^n$ открыто, можно записать так:

$$\forall \bar{x}(\mathtt{Fund}(\bar{x}) \wedge \bar{x}\in S \to \exists \varepsilon\in\mathbb{Q}\forall \bar{y}(\mathtt{Fund}(\bar{y}) \wedge \|\bar{x}-\bar{y}\|<\varepsilon \to \bar{y}\in S)).$$

Из леммы 3 и полученного в ходе ее доказательства утверждения о том, что свойство «быть фундаментальной последовательностью» является арифметическим, следует, что рассматриваемое множество принадлежит Π_1^1.

Известно [3], что существует вычислимая последовательность деревьев $(T_i)_{i<\omega}$ такая, что множество $\{i \mid T_i$ не имеет бесконечных ветвей$\}$ Π_1^1-полно. Без ограничения общности можно считать, что все T_i принадлежат $\mathfrak{T}$.

Пусть $f(a,b,x)=(b-a)x+a$. Тогда $f(a,b,0)=a$, $f(a,b,1)=b$, причем f линейно отображает отрезок $[0,1)$ на $[a,b)$. Пусть $S_i = \bigcup\limits_{\alpha\in T_i, t\in\omega} [q_{\alpha,t}, q_{\alpha,t+1})$ —

множество из леммы 2, определенное по T_i. Определим множества A_i, $i \in \omega$, как

$$A_i = (0,1] \cup \bigcup_{m\in\omega} f\left(1+\frac{1}{m+2}, 1+\frac{1}{m+1}, S_i\right).$$

Если T_i не имеет бесконечных ветвей, то $S_i = [0,1)$ и, следовательно, $A_i = (0,2)$ — открытое множество. Если T_i имеет бесконечную ветвь, то $S_i \subsetneqq [0,1)$, и тем самым сколь угодно близко к 1 существуют точки, не принадлежащие A_i. Значит, множество A_i не открыто. Существует алгоритм, строящий по любому $i < \omega$ перечислимую дизъюнкцию бескванторных формул, определяющих множество A_i. Это означает, что некоторое Π^1_1-полное множество сводится к множеству $\mu^{(1)}$-номеров открытых множеств. Случай $n > 1$ тривиально получается из случая $n = 1$. Достаточно заменить множества A_i на $A_i \times \mathbb{R}^{n-1}$. Этим же способом мы получим доказательства для $n > 1$ и во всех остальных пунктах теоремы.

Докажем (2). Аналогично предыдущему получаем, что рассматриваемое множество принадлежит Π^1_1. Пусть последовательность деревьев T_i выбрана, как и раньше. Если T_i не имеет бесконечных ветвей, то множество $\{1\} \cup S_i = [0,1]$ замкнуто. Если же T_i имеет бесконечную ветвь, то множество $\{1\}\cup S_i$ плотно в интервале $[0,1]$, но не совпадает с ним. Следовательно, оно не замкнуто. Далее доказательство проводится так же, как и в предыдущем случае.

Докажем (3)–(5) одновременно. Как и ранее, убеждаемся, что рассматриваемые множества принадлежат Π^1_1.

Остается проверить, что множество $A_i = \bigcup_{i\in\mathbb{Z}} (f(i, i+1, S_n))$, где функция f определена в доказательстве п. (1), равно $\mathbb{R}$ в случае, когда у T_i нет бесконечных ветвей, и не является замкнутым в противном случае. Нетрудно убедиться, что для подходящей вычислимой функции h выполнено $A_i = \mu^{(n)}(h(i))$. Пп. (3)–(5) следуют из этого замечания.

Докажем (6). Пусть $A = \mu^{(n)}(m)$ — Σ-подмножество $\mathbb{R}^n$, определимое с помощью формулы $\bigvee_{i\in W_m} \eta^{(n)}_i(\bar{x})$. Пусть $\mathbb{Q}^+$ обозначает множество всех строго положительных рациональных чисел. Легко проверить, что определение нигде не плотности множества A может быть записано в следующем эквивалентном виде:

$$\forall \bar{a}, b \in \mathbb{Q}^+ \, \exists \bar{c}, d \in \mathbb{Q}^+ \; (B(\bar{c}, d) \subseteq B(\bar{a}, b) \wedge B(\bar{c}, d) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A). \tag{2}$$

Условие $B(\bar{c}, d) \subseteq \mathbb{R}^n \setminus A$ можно переписать в эквивалентном виде

$$\bigwedge_{i\in W_m} \forall \bar{x} \left(\sum_{i=1}^{n} (x_i - c_i)^2 < d^2 \to \neg \eta^{(n)}_i(\bar{x})\right).$$

В силу разрешимости теории упорядоченного поля вещественных чисел последнее условие является конъюнкцией вычислимого семейства условий, т. е. Π^0_1-условием. Значит, все условие (2) записывается в виде Π^0_3-выражения от m, откуда следует, что рассматриваемое множество лежит в Π^0_3.

Покажем теперь, что любое Π^0_3-множество A m-сводимо к множеству индексов Σ-формул, определяющих нигде не плотные подмножества в $\mathbb{R}$. Зафиксируем вычислимую последовательность $(a_{i,s})_{i,s\in\omega}$ рациональных чисел такую, что для всех m выполнено $\{a_{m,s} \mid s < \omega\} = \mathbb{Q} \cap [m, m+1)$. Пусть A — произвольное Π^0_3-подмножество ω, определяемое условием $m \in A \Leftrightarrow \forall x \exists y \forall z \, R(x, y, z, m)$, где $R(x, y, z, m)$ — вычислимое отношение от $x, y, z, m \in \omega$.

Для произвольных $m, x \in \omega$ определим множество

$$S_x^m = \{a_{m,s} \mid \exists t \forall y \leqslant s \exists z \leqslant t \ \neg R(x, y, z, m)\}.$$

Легко видеть, что S_x^m равномерно перечислимо по x и m, $S_x^m \subseteq [m, m+1)$, и если справедливо $\forall y \exists z \ \neg R(x, y, z, m)$, то $S_x^m \cap [m, m+1) = \mathbb{Q} \cap [m, m+1)$; в противном случае множество $S_x^m \cap [m, m+1)$ конечно. Отсюда следует, что множество $S^m = \bigcup\limits_{x \in \omega} S_x^m$ нигде не плотно тогда и только тогда, когда $m \in A$.

Осталось заметить, что

$$x_1 \in S^m \ \Leftrightarrow \bigvee_{b \in S^m} x_1 = b$$

и S^m равномерно перечислимо по m, поэтому существует вычислимая функция h такая, что $S^m = \mu^{(1)}(h(m))$, откуда и следует утверждение.

Для случая $n > 1$ можно рассмотреть множества $S^m \times \mathbb{R}^{n-1}$, определяемые теми же самыми формулами, но уже рассматриваемыми как формулы от $x_1, \dots, x_n$.

Докажем (7). Условие плотности множества

$$\mu^{(n)}(k) = \Big\{\bar{x} \in \mathbb{R}^n \mid \mathbb{R} \models \bigvee_{i \in W_k} \eta_i^{(n)}(\bar{x})\Big\}$$

записывается в эквивалентном виде:

$$\forall \bar{r} \in \mathbb{Q}^n \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \exists \bar{x} \ \Big(\|\bar{r} - \bar{x}\| < \varepsilon \wedge \bigvee_{i \in W_k} \eta_i^{(n)}(\bar{x})\Big),$$

что равносильно

$$\forall \bar{r} \in \mathbb{Q}^n \forall \varepsilon \in \mathbb{Q}^+ \bigvee_{i \in W_k} \exists \bar{x} \ \left(\eta_i^{(n)}(\bar{x}) \wedge \sum_{i=1}^n (r_i - x_i)^2 < \varepsilon^2\right).$$

Из разрешимости теории $\mathbb{R}$ следует, что данное условие является Π_2^0-выражением от k.

Пусть A — произвольное множество, задаваемое условием

$$m \in A \ \Leftrightarrow \ \forall x \exists y \ R(x, y, m).$$

Пусть F — произвольное Σ-определимое без параметров отображение из ω на $\mathbb{Q}$. Определим

$$S_m = \{F(x) \mid \forall x' \leqslant x \exists y \ R(x, y, m)\}.$$

Справедливы следующие утверждения:

1) S_m перечислимо равномерно по m;

2) если $m \notin A$, то S_m конечно;

3) если $m \in A$, то $S_m = \mathbb{Q}$.

Далее,

$$S_m = \Big\{x \in \mathbb{Q} \mid \mathbb{R} \models \bigvee_{s \in S_m} (x = s)\Big\}.$$

Остается заметить, что ввиду равномерности перечисления S_m по m данное определение можно переписать в виде $S_m = \mu^{(1)}(h(m))$ для подходящей вычислимой функции h.

Случай $n > 1$ рассматривается аналогично предыдущему.

Докажем (8). Сначала проверим, что произвольное множество $S \subseteq \mathbb{R}^n$, определяемое в $\mathbb{R}$ (возможно, бесконечной) дизъюнкцией формул $\psi_i(\bar{x})$, имеющих вид конъюнкций формул вида $f(\bar{x}) = 0$, $g(\bar{x}) \neq 0$ и $h(\bar{x}) > 0$, является множеством первой категории тогда и только тогда, когда все множества, определяемые формулами $\psi_i(\bar{x})$, нигде не плотны. Если все эти множества нигде не плотны, то S — множество первой категории по определению. Пусть теперь S — множество первой категории, но некоторая формула $\psi_i(\bar{x})$ определяет множество, плотное в некотором шаре $B(c, \varepsilon)$. Но если полином f от переменных $\bar{x}$ равен нулю на некотором множестве, плотном в некотором шаре, то $f = 0$ на всем этом шаре, откуда следует, что f — нулевой полином. Отсюда вытекает, что нетривиальных формул вида $f(\bar{x}) = 0$ в данной конъюнкции быть не может. Значит, все множество S содержит некоторый шар и, таким образом, не может быть множеством первой категории.

Нигде не плотность множества $\mu^{(n)}(k)$, определяемого вычислимой дизъюнкцией $\bigvee\limits_{i \in W_k} \eta_i^{(n)}(\bar{x})$, можно установить следующим образом. Сначала, пользуясь эффективной элиминацией кванторов для $\mathbb{R}$, представляем эту дизъюнкцию как вычислимую дизъюнкцию формул $\psi_i(\bar{x})$, каждая из которых является конъюнкций формул вида $f(\bar{x}) = 0$, $g(\bar{x}) \neq 0$ и $h(\bar{x}) > 0$. Очевидно, что перечисление таких формул $\eta_i^{(n)}(\bar{x})$ можно эффективно переработать в такую вычислимую дизъюнкцию формул ψ_i. Для каждой формулы $\psi_i(\bar{x})$ можно, используя разрешимость теории $\mathbb{R}$, последовательно проверять, определяет ли она нигде не плотное множество. Если хотя бы одно из этих множеств не будет нигде не плотным, то по доказанному ранее и все множество S не является множеством первой категории. В противном случае множество S будет множеством первой категории. Это дает коперечислимость множества $\mu^{(n)}$-номеров множеств первой категории, т. е. это множество лежит в Π^0_1.

Пусть $X \subseteq \omega$ — произвольное множество, определяемое Π^0_1-условием $u \in X \Leftrightarrow \forall t\, R(t, u)$, где R — вычислимый предикат. Определим формулы $\psi_{t,x}$ следующим образом:

$$\psi_{t,u}(x) = \begin{cases} x = 0, & \text{если } R(t, u), \\ x > 0, & \text{если } \neg R(t, u). \end{cases}$$

Тогда формула $\bigvee\limits_{t \in \omega} \psi_{t,u}(x)$ определяет множество первой категории тогда и только тогда, когда $u \in X$. Пусть вычислимая функция $h(t, u)$ такова, что $\psi_{t,u} = \eta^{(1)}_{h(t,u)}$ для всех $t, u \in \omega$. Возьмем вычислимую функцию $g(u)$ так, чтобы для любого $u \in \omega$ выполнялось равенство $W_{g(u)} = \{h(t, u) \mid t \in \omega\}$. Тогда множество $\mu^{(1)}(g(u))$, определяемое условием $\bigvee\limits_{i \in W_{g(u)}} \eta^{(1)}_{h(t,u)}(x)$, эквивалентным условию $\bigvee\limits_{t \in \omega} \psi_{t,u}(x)$, является множеством первой категории тогда и только тогда, когда $u \in X$. Из этого получаем Π^0_1-полноту множества $\mu^{(1)}$-номеров множеств первой категории. Случай $n > 1$ рассматривается аналогично предыдущему.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $n > 0$. Тогда к индексному множеству свойства «быть связным подмножеством в $\mathbb{R}^n$» сводится Π^1_1-полное множество.*

Доказательство. Из теоремы 1 и доказательства теоремы 2 следует существование такой вычислимой последовательности Σ-формул $\varphi_i(x)$, что множество, состоящее из тех i, для которых $\varphi_i^{\mathbb{HF}(\mathbb{R})}$ равно $[0, 1)$, Π^1_1-полно, а если

$\varphi_i^{\mathbb{HF}(\mathbb{R})}$ не равно $[0,1)$, то оно не является связным. Возьмем вычислимую функцию f так, что для любого i выполнено $\varphi_i = \gamma_{f(i)}^{(1)}$. Тогда

$$\varphi_i^{\mathbb{HF}(\mathbb{R})}(x) = [0,1) \Leftrightarrow \varphi_i^{\mathbb{HF}(\mathbb{R})}(x) \text{ связно} \Leftrightarrow \left(\gamma_{f(i)}^{(1)}\right)^{\mathbb{HF}(\mathbb{R})}(x) \text{ связно} \Leftrightarrow \lambda^{(1)}(f(i)) \text{ связно.}$$

Случай $n > 1$ рассматривается аналогично предыдущему.

Теорема доказана.

Автор благодарит анонимного рецензента за исправление некоторых неточностей и за замечания, улучшившие изложение.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Ершов Ю. Л.* Теория нумераций. М.: Наука, 1977.
2. *Ершов Ю. Л.* Определимость и вычислимость. Новосибирск: Научная книга, 1996.
3. *Barwise J.* Admissible sets and structures. Berlin; Göttingen; Heidelberg: Springer-Verl., 1975.
4. *Rogers H.* Theory of recursive functions and effective computability. New York; St. Louis; San Francisco; Toronto; London; Sydney: McGraw-Hill Book Comp., 1967.
5. *Вайценавичюс Р. Ю.* О необходимых условиях существования универсальной функции на допустимом множестве // Математическая логика и применения. Вильнюс, 1989. № 6. С. 21–37.

Статья поступила 4мая 2007 г.

Морозов Андрей Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
morozov@math.nsc.ru