*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2009. Том 50, № 1*

*УДК 514.763+512.812.4+517.911*

# О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДОВ ГРУППОВОГО АНАЛИЗА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ДЛЯ НЕКОТОРЫХ СИСТЕМ $C^1$–ГЛАДКИХ НЕКОММУТИРУЮЩИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

**А. В. Грешнов**

**Аннотация.** Для канонических базисных $C^1$-гладких векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}$, удовлетворяющих определенным ограничениям на их коммутаторы методами группового анализа дифференциальных уравнений доказана теорема о существовании их локальной однородной нильпотентной аппроксимации в начале координат. Изучены свойства квазиметрик, индуцированных некоторыми системами векторных полей, связанных с $\{\widetilde{X}_i\}$.

**Ключевые слова:** векторное поле, теорема Асколи — Арцела, теорема о существовании и единственности обыкновенных дифференциальных уравнений, коммутатор, квазиметрика.

## Введение

На области $U \subset \mathbb{R}^N$ рассмотрим систему гладких векторных полей $\{X_j\}$ такую, что значения рассматриваемых векторных полей линейно независимы в каждой точке $g \in U$ и каждому векторному полю $X_j$ сопоставлено натуральное число $\deg X_j \geq 1$ (степень векторного поля) так, что «коммутирование» векторных полей (самое большее) «складывает» их степени, т. е.

$$[X_i, X_j] = \sum_k C_{ij}^k X_k, \tag{0.1}$$

где $C_{ij}^k$ — непрерывные на $U$ функции такие, что $C_{ij}^k = 0$ для $\deg X_i + \deg X_j < \deg X_k$ (см. [1]). Совокупность всех пар $(i, \deg X_i)$ назовем *градуировкой* системы векторных полей $\{X_j\}$, а число $M = \max\limits_{i=1,\dots,N} \deg X_i$ — *глубиной градуировки.* В работе [2], в частности, доказано, что в случае достаточно гладких векторных полей $\{X_j\}$ векторные поля $\Delta^g_{1/\varepsilon}\varepsilon^{\deg X_i}X_i$, $i = 1,\dots,N$, где $\Delta^g_\tau = \theta_g \circ \delta_\tau \circ \theta_g^{-1}$ — *неоднородный оператор растяжения*, согласованный с градуировкой системы векторных полей (определение отображения $\delta_\tau$ см. в § 2), а $\theta_g$ — отображение, порождающее (локально) систему координат 1-го рода, связанную с $\{X_j\}$, сходятся равномерно при $\varepsilon \to 0$ в некоторой окрестности $O_g$ точки $g \in U$ к векторным полям $\widehat{X}^g_i$, $i = 1,\dots,N$, таким, что значения векторных полей $\widehat{X}^g_i$,

---

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–00531–а).

$i = 1, \dots, N$, линейно независимы в каждой точке $u \in O_g$, и совокупность векторных полей $\{\widehat{X}_i^g\}$ удовлетворяют следующей таблице коммутаторов:

$$[\widehat{X}_i^g, \widehat{X}_j^g] = \sum_k \delta_{ijk} \widehat{C}_{ijk}^g \widehat{X}_k^g, \quad \widehat{C}_{ijk}^g = C_{ij}^k(g) = \mathrm{const}, \tag{0.2}$$

где $\delta_{ijk} = 1$ в случае $\deg X_i + \deg X_j = \deg X_k$ и $\delta_{ijk} = 0$ во всех остальных случаях. Система векторных полей $\{\widehat{X}_i^g\}$ называется *локальной нильпотентной однородной аппроксимацией* системы векторных полей $\{X_i\}$ в точке $g$ (ср. с [3, § 5]). Нильпотентная однородная аппроксимация для некоммутирующих векторных полей полезна во многих вопросах анализа и геометрии (см., например, [3–9]). Различные нильпотентные аппроксимации использовались при изучении гипоэллиптических уравнений в частных производных и в нелинейной теории оптимального управления, начиная с работ Родшильд и Стейна [10] и Гудмена [11]. Для достаточно гладких векторных полей $\{X_i\}$, удовлетворяющих (0.1), существование нильпотентной аппроксимации и ее свойства изучались в [2–5]. Отметим, что техника работ [2–5, 7, 8] фактически основана на использовании разложений в ряды Кэмпбелла — Хаусдорфа в различных системах координат. Однако если гладкость векторных полей $\{X_i\}$ всего лишь $C^1$, а глубина градуировки достаточно велика, то метод разложения в ряды ничего не дает. Естественно, возникает вопрос о том, можно ли в данной ситуации доказать существование однородной нильпотентной аппроксимации и если да, то какими аналитическими методами. Основные трудности, которые здесь возникают, состоят в следующем:

(a) найдется ли в окрестности точки $g \in U$ система координат $F_g$ (подходящая система координат) такая, что векторные поля $\widetilde{\Delta}_{1/\varepsilon}^g \varepsilon^{\deg X_i} X_i$, $i = 1, \dots, N$, $\widetilde{\Delta}_\tau^g = F_g \circ \delta_\tau \circ F_g^{-1}$, сходятся равномерно к некоторым векторным полям $\widehat{X}_i^g$, $i = 1, \dots, N$,

(b) будут ли векторные поля $\widehat{X}_i^g$, $i = 1, \dots, N$, порождать нильпотентную алгебру Ли,

(c) каковы структурные константы этой алгебры Ли, как они связаны с функциями $C_{ij}^k$.

Задача о существовании однородной нильпотентной аппроксимации для $C^1$-гладких векторных полей, удовлетворяющих (0.1), рассматривалась в известной работе М. Громова [1] на пространствах Карно — Каратеодори. Там же предложен способ решения этой задачи, однако при его реализации дополнительно предполагалось, что для системы координат 2-го рода $E_g$, индуцированной «исходной» системой векторных полей $\{X_i\}_{i=1,\dots,N}$, выполняется формула $\left[\left(E_g^{-1}\right)_* X_i, \left(E_g^{-1}\right)_* X_j\right] = \left(E_g^{-1}\right)_* [X_i, X_j]$ (все необходимые детали читатель может найти в [1, § 1]). В настоящей работе доказано, что если $C^1$-гладкие векторные поля $\{\widetilde{X}_i\}$, удовлетворяющие табл. (0.1), являются каноническими, то векторные поля $(\delta_{1/\varepsilon})_* \varepsilon^{\deg e_i} \widetilde{X}_i$ сходятся равномерно в некоторой окрестности начала обычных евклидовых координат к некоторым аналитическим каноническим векторным полям $\widehat{X}_i$, компоненты координатной записи которых являются полиномами, имеющими соответствующую степень однородности, порождающим нильпотентную алгебру (теорема 2.1, следствия 2.1–2.5). Это является основным результатом данной работы. Способ доказательства теоремы 2.1 не использует методы из [1], он основан на некоторых приемах группового анализа дифференциальных уравнений из [12, гл. 4], адаптированных к настоящей ситуации. А именно, мы изучаем свойства решений систем некоторых обыкновенных дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра $\varepsilon$, являющихся аналогом известных уравнений Маурера — Картана. При этом отметим, что соответствующие доказательства из [12] используют существование группового ассоциативного ядра, которого в нашей ситуации может и не быть, так как функции $C_{ij}^k$ не тождественно постоянны. Отметим, что если «исходные» векторные поля класса $C^2$ ($C^{1,1}$), то это сразу влечет выполнение соответствующих тождеств Якоби всюду (почти всюду), см. утверждение 1.2 (следствие 1.1), откуда сразу следует, что векторные поля $\{\widehat{X}_i\}$ образуют нильпотентную алгебру Ли, градуировка которой совпадает с градуировкой исходных векторных полей.

В § 3 получены следствия из теоремы 2.1. В § 4 мы рассматриваем некоторые анизотропные метрические пространства, включающие в себя квазипространства Карно — Каратеодори из [2, 7], где предполагалось, что гладкость векторных полей не ниже, чем $M + 1$. Для таких пространств установлены некоторые свойства их квазиметрик (анизотропных римановых метрик), обобщающие соответствующие результаты из [2, 7].

В качестве простейшего примера системы канонических векторных полей можно рассмотреть произвольный набор векторных полей $\left\{\left(\theta_g^{-1}\right)_* X_i\right\}$, где гладкие векторные поля $X_i$, $i = 1, \dots, N$, таковы, что их значения линейно независимы в каждой точке области определения, а $\theta_g$ — отображение, индуцирующее систему координат 1-го рода, связанную с $\{X_i\}$, в некоторой окрестности точки $g$, принадлежащей области определения $\{X_i\}$. Другие примеры канонических векторных полей можно получить как решения системы уравнений (2.11) (следствие 2.4). Канонические векторные поля имеют важное значение в теории групп Ли (см., например, [12, 13]). Также отметим, что переход от «произвольных» векторных полей к их канонической реализации (с использованием соответствующего отображения, индуцирующего нормальные координаты) дает значительные преимущества при конкретных вычислениях (см. [2–9]). В последнее время интерес к нильпотентным каноническим алгебрам Ли и соответствующим им нильпотентным каноническим группам Ли стимулировался интенсивным развитием теории квазиконформных отображений и связанных с ними субэллиптических уравнений на неголономных многообразиях (см., например, [14–17]).

В заключение отметим, что интерес к рассматриваемым в настоящей работе вопросам о «минимальных показателях гладкости» является весьма закономерным с точки зрения развития анализа и теории дифференциальных уравнений в неголономной геометрии. В связи с этим отметим недавнюю работу [18], где изучается понятие коммутатора для липшицевых векторных полей.

Автор выражает глубокую благодарность рецензенту за критику предыдущего варианта работы, которая несомненно помогла автору, профессору Г. В. Демиденко за консультации по вопросам теории обыкновенных дифференциальных уравнений, профессору С. К. Водопьянову за интерес к результатам автора.

## § 1. Предварительные определения, обозначения и сведения

В статье угловые скобки $\langle\ \rangle$ будут использованы для обозначения образов при линейных и полилинейных отображениях; $|(x_1, \dots, x_N)|_\infty = \max\limits_{i=1,\dots,N} |x_i|$; $\partial$ — символ производной по аргументу, указанному либо в индексе ($\partial_x$), либо после символа отображения $(\partial f(x))$; $\delta^i_j$ — символы Кронекера; $e_i$ — единичный вектор евклидова пространства $\mathbb{R}^N$, имеющий в координатной записи на $i$-м месте единицу и на остальных местах — нули.

Пусть на некоторой ограниченной области $U \subset \mathbb{R}^N$ заданы $C^1$-гладкие *базисные* векторные поля $X_1,\dots,X_N$, т. е. такие, что $\operatorname{rank}(X_1,\dots,X_N)(g) = N$ для каждой точки $g \in U$. Обозначим через $A = A(x) : U \to \mathbb{R}^N$ отображение (матрицу размера $N \times N$), $i$-й столбец которого совпадает с вектор-столбцом $X_i$ для каждого $i = 1,\dots,N$; также пусть $V(x) = A^{-1}(x)$. Из теоремы о существовании и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений [19, 20] следует, что найдется такое число $T > 0$, что для каждого вектора $(x_1,\dots,x_N)$, $|(x_1,\dots,x_N)|_\infty < T$, решение задачи Коши

$$\dot{x}(s) = \sum_{i=1}^{N} x_i X_i(x(s)),\ s \in [0,1], \quad x(0) = g,$$

существует и единственно. Для каждой точки $g \in U$ определим отображение $\theta_g : B_e(0,T) \to O_g$, действующее по формуле

$$\theta_g : (x_1,\dots,x_N) \to \exp\left(\sum_{j=1}^{N} x_j X_j\right)(g), \quad \theta_g(0,\dots,0) = g,$$

здесь $\exp\left(\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j\right)(g)$ — конец интегральной линии векторного поля $\sum\limits_{j=1}^{N} x_j X_j$ единичной длины, $B_e(0,T) \subset \mathbb{R}^N$ — шар в соответствующей евклидовой метрике $\rho$.

**Лемма 1.1.** 1. *Существует положительное число $\kappa_g$ такое, что отображение $\theta_g$ является $C^1$-гладким диффеоморфизмом на $B_e(0,\kappa_g)$.*

2. *Отображение $\theta_g$ $C^1$-гладко зависит от $g$.*

Доказательство. $C^1$-гладкость отображения вытекает из теоремы о гладкой зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от параметров. Кроме того,

$$\frac{\partial \theta_g(x_1,\dots,x_N)}{\partial(x_1,\dots,x_N)}\Big|_{(x_1,\dots,x_N)=(0,\dots,0)} = (X_1,\dots,X_N)(g),$$

что оканчивает доказательство п. 1. П. 2 следует из теоремы о непрерывной (в данном случае $C^1$-гладкой) зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений с $C^1$-гладкой правой частью от начальных данных [20].

**Лемма 1.2.** *Существует область $O \subset U$ такая, что $O \subset \theta_g(B_e(0,\kappa))$ для каждой точки $g \in O$, $\kappa = \inf\{\kappa_g \mid g \in O\}$.*

Доказательство. В силу теорем непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров [20] $\kappa_g$ непрерывно зависит от точки $g$. Поэтому для достаточно малой окрестности $U_1$ точки $g$ найдется число $\kappa > 0$ такое, что $\kappa \le \kappa_u$ для любого $u \in U_1$. Обозначим

$$r_u = \sup\{r \mid B_e(u,r) \subset \theta_u(B_e(0,\kappa))\}/2.$$

Ввиду теорем о непрерывной зависимости решений обыкновенных дифференциальных уравнений от начальных данных и параметров [20] $r_u$ непрерывно зависит от точки $u \in U_1$. Поэтому найдется число $r' > 0$ такое, что $r' \le r_u$ для любого $u \in U_1$. Рассмотрим евклидов шар $B_e(g, r'/4)$. Очевидно, что $B_e(g, r'/4) \subset B_e(u, r')$ для любого $u \in B_e(g, r'/4)$. Тогда в качестве $O$ можно взять $B_e(g, r'/4)$.

**Лемма 1.3.** *Найдутся число $\tilde{\kappa} > 0$ и область $\widetilde{O} \subset O$ такие, что для любых векторов $a = (a_1, \dots, a_N)$, $b = (b_1, \dots, b_N)$, $\max\{|a|, |b|\} < \tilde{\kappa}$, и $w \in \widetilde{O}$ найдется единственный вектор $c = c(a, b) = (c_1, \dots, c_N)$ такой, что*

$$\exp\left(\sum_{i=1}^{N} b_i X_i\right) \circ \exp\left(\sum_{i=1}^{N} a_i X_i\right)(w) = \exp\left(\sum_{i=1}^{N} c_i X_i\right)(w) \subset O.$$

Доказательство. Выберем точку $g \in O$. Тогда найдется число $\kappa'_g > 0$ такое, что $\theta_g(B_e(0, \kappa'_g)) \subset O$. Из леммы 1.1 следует, что найдется такое положительное число $\kappa \le \kappa'_g$, что $\theta_u(B_e(0, \kappa'_g)) \subset O$ для любого $u \in \theta_g(B_e(0, \kappa))$, откуда вытекает, что $\theta_u(B_e(0, \kappa)) \subset O$ для любого $u \in \theta_g(B_e(0, \kappa))$. Далее рассмотрим произвольную точку $u \in \theta_g(B_e(0, \kappa))$. По лемме 1.1 найдется число $\lambda_u$ такое, что $\theta_v(B_e(0, \kappa)) \subset O$ для любой точки $v \in \theta_u(B_e(0, \lambda_u))$. Согласно лемме 1.1 существуют положительные числа $\kappa'$, $\lambda$ такие, что $\kappa' < \kappa$, $\lambda < \lambda_u$, и для любой точки $v \in \theta_u(B_e(0, \lambda))$, где $u \in \theta_g(B_e(0, \kappa'))$, выполняется $\theta_v(B_e(0, \kappa)) \subset O$. Тогда мы можем полагать, что $\tilde{\kappa} = \min\{\lambda, \kappa'\}$, $\widetilde{O} = \theta_g(B_e(0, \tilde{\kappa}))$.

Зафиксируем точку $g \in O$ и вместе с ней отображение $\theta_g$. Отметим следующее хорошо известное свойство: $\left(\theta_g^{-1}\right)_* A(g) = I$, где $I : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$ — тождественное отображение. Кроме того,

$$ps = \theta_g^{-1}\left(\exp\left(s\sum_{i=1}^{N} p_i X_i\right)(g)\right), \quad s \in [s_1, s_2],$$

где $p = (p_1, \dots, p_N)$ и число $|p||s_1 - s_2|$ достаточно мало.

Определение 1.1. Набор базисных векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$, определенных в некоторой окрестности начала координат $\mathscr{O}$, будем называть *каноническим*, если для каждого вектора $p \in \mathbb{R}^N$, $tp \in \mathscr{O}$, $t \in \mathbb{R}^+$, выполняются тождества $A(pt)\langle p\rangle = p$, $V(pt)\langle p\rangle = p$.

**Утверждение 1.1.** *Набор $C^1$-гладких базисных векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$ является каноническим тогда и только тогда, когда для любого вектора $p \in \mathbb{R}^N$ выполняется $\exp\left(s\sum\limits_{i=1}^{N} p_i \widetilde{X}_i\right)(0) = sp$, где число $|p|s$ достаточно мало.*

Доказательство. ($\Rightarrow$) Следствие теоремы о существовании и единственности обыкновенных дифференциальных уравнений [20]. ($\Leftarrow$) Продифференцируем по параметру $s$ тождество $\exp\left(s\sum\limits_{i=1}^{N} p_i \widetilde{X}_i\right)(0) = sp$ в некоторой точке $s_1$, в результате получим

$$\left.\frac{d\exp\left(s\sum\limits_{i=1}^{N} p_i \widetilde{X}_i\right)\left(\exp(s_1\sum\limits_{i=1}^{N} p_i \widetilde{X}_i)(0)\right)}{ds}\right|_{s=0}$$

$$= A\left(\exp\left(s_1\sum_{i=1}^{N} p_i \widetilde{X}_i\right)(0)\right)\langle p\rangle = A(ps_1)\langle p\rangle = p,$$

откуда в силу определения отображения $V$ вытекает $V(ps_1)\langle p\rangle = p$.

**Утверждение 1.2.** *Пусть базисные векторные поля, удовлетворяющие табл.* (0.1), *принадлежат классу* $C^2$. *Тогда совокупность функций* $C_{ij}^k$, *для которых выполняется* $\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j$, *удовлетворяют тождеству Якоби в* $U$.

Доказательство. Имеем

$$[X_l,[X_i,X_j]] + [X_i,[X_j,X_l]] + [X_j,[X_l,X_i]] = 0,$$

$$\begin{aligned}[X_l,[X_i,X_j]] = [X_l, \sum_{\deg X_k \le \deg X_i + \deg X_j} C_{ij}^k X_k] &= \sum_{\deg X_k \le \deg X_i + \deg X_j} C_{ij}^k [X_l, X_k] \\ &+ \sum_{\deg X_k \le \deg X_i + \deg X_j} (X_l C_{ij}^k) X_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X_i,[X_j,X_l]] = [X_i, \sum_{\deg X_k \le \deg X_j + \deg X_l} C_{jl}^k X_k] &= \sum_{\deg X_k \le \deg X_j + \deg X_l} C_{jl}^k [X_i, X_k] \\ &+ \sum_{\deg X_k \le \deg X_j + \deg X_l} (X_i C_{jl}^k) X_k,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X_j,[X_l,X_i]] = [X_j, \sum_{\deg X_k \le \deg X_l + \deg X_i} C_{li}^k X_k] &= \sum_{\deg X_k \le \deg X_l + \deg X_i} C_{li}^k [X_j, X_k] \\ &+ \sum_{\deg X_k \le \deg X_l + \deg X_i} (X_j C_{li}^k) X_k.\end{aligned}$$

Используя вышеприведенные равенства и табл. (0.1), получаем утверждение 1.2.

**Следствие 1.1.** *Пусть векторные поля, удовлетворяющие табл.* (0.1), *принадлежат классу* $C^{1,1}$. *Тогда совокупность функций* $C_{ij}^k$ *таких, что* $\deg X_k = \deg X_i + \deg X_j$, *удовлетворяют тождеству Якоби почти всюду в* $O$.

## § 2. Однородная аппроксимация для $C^1$-гладких канонических векторных полей

В этом параграфе будем рассматривать канонические $C^1$-гладкие базисные векторные поля $\{\widetilde{X}_i\}$, $i = 1, \dots, N$, определенные в некоторой окрестности начала координат $\mathscr{O} \subset \mathbb{R}^N$. Здесь, как и выше, $A = A(x) : U \to \mathbb{R}^N$ — отображение, $i$-й столбец которого совпадает с вектор-столбцом $\widetilde{X}_i$ для каждого $i = 1, \dots, N$ и $V(x) = A^{-1}(x)$.

Рассмотрим (ср. с [12, гл. IV]) билинейное кососимметрическое отображение $C_x\langle h, k\rangle : \mathscr{O} \times \mathscr{O} \to \mathscr{O}$, действующее по формуле

$$C_x\langle h, k\rangle = \partial V(x)\langle A(x)\langle h\rangle, A(x)\langle k\rangle\rangle - \partial V(x)\langle A(x)\langle k\rangle, A(x)\langle h\rangle\rangle, \quad x \in \mathscr{O}. \tag{2.1}$$

Заменяя в (2.1) $(h, k)$ на $(V(x)\langle h\rangle, V(x)\langle k\rangle)$, получаем

$$C_x\langle V(x)\langle k\rangle, V(x)\langle h\rangle\rangle = \partial V(x)\langle h, k\rangle - \partial V(x)\langle k, h\rangle.$$

Используя формулу $\partial V(x)\langle h, k\rangle = -V(x)\langle \partial A(x)\langle h, V(x)\langle k\rangle\rangle\rangle$, выводимую при помощи дифференцирования тождества $A(x)V(x) = I$, приходим к равенству

$$A(x)\langle C_x\langle k, h\rangle\rangle = \partial A(x)\langle A(x)\langle k\rangle, h\rangle - \partial A(x)\langle A(x)\langle h\rangle, k\rangle. \tag{2.2}$$

Правая часть (2.2) есть не что иное, как $[A(x)\langle h\rangle, A(x)\langle k\rangle]$. Тождества (2.2) представляют собой аналог *уравнений Маурера — Картана* (см. [12]).

Пусть оператор $C_x$ действует следующим образом: векторам $e_i$ соответствуют натуральные числа $\deg e_i$, $1 \leq \deg e_i < N$, такие, что $\deg e_1 = 1$, $\deg e_i \leq \deg e_j$ в случае $i \leq j$, при этом

$$C_x\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{\deg e_k \leq \deg e_i + \deg e_j} C^k_{ij}(x) e_k \tag{2.3}$$

для некоторых непрерывных на $\mathscr{O}$ функций $C^k_{ij}(x)$ и $C^k_{ij}(x) = 0$ в случаях $\deg e_i + \deg e_j < \deg e_k$. Отметим, что из кососимметричности $C_x$ следует $C^k_{ij}(x) = -C^k_{ji}(x)$. Используя (2.2), (2.3), получаем

$$[\widetilde{X}_i, \widetilde{X}_j](x) = \Big(\sum_{\deg e_k \leq \deg e_i + \deg e_j} C^k_{ij}\widetilde{X}_k\Big)(x), \quad x \in \mathscr{O}. \tag{2.4}$$

Исходя из (2.4), автоматически присваиваем каждому векторному полю $\widetilde{X}_j$ степень, равную $\deg e_j$. Рассмотрим на $\mathbb{R}^N$ согласованный с градуировкой системы векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}$ оператор растяжения $\delta_\tau$, действующий по формуле

$$\delta_\tau x = (\tau^{\deg e_1} x_1, \dots, \tau^{\deg e_N} x_N) = x_\tau, \quad x = (x_1, \dots, x_N),$$

и пусть

$$\mathrm{Box}^e_{cc}(0, \varepsilon) = \{u \in \mathscr{O} \mid u = \delta_\tau x,\ |x|_\infty = 1,\ \tau < \varepsilon\}.$$

Также введем следующие обозначения: $h_i = \max\{j \mid \deg e_j = i\}$. Тогда

$$\mathrm{rank}(\widetilde{X}_1, \dots, \widetilde{X}_k)(x) = h_i \quad \forall x \in \mathscr{O},$$

где $\widetilde{X}_j$, $j = 1, \dots, k$, — все векторные поля, имеющие степень не выше $i$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $C^1$-гладкий базисный канонический набор векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$, определенный в $\mathscr{O}$, удовлетворяет* (2.4). *Тогда на некотором множестве $\mathrm{Box}^e_{cc}(0, \varepsilon_0) \subset \mathscr{O}$ выполняется*

$$(\delta_{1/\varepsilon})_* \circ A(\delta_\varepsilon x) \circ (\delta_\varepsilon)_* \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} \widehat{A}(x),$$

*где $\varepsilon \in (0, 1)$, $\widehat{A} = \widehat{A}(x) \in C^\infty$ — $N \times N$-нижнетреугольная матрица с диагональными элементами, равными* 1.

Доказательство. Пусть $w(t) = tV(tx)\langle h\rangle$ для некоторого произвольно выбранного вектора $h$. Дифференцирование вектор-функции $w$ по $t$ дает выражение

$$\partial_t w = t\partial V(tx)\langle x, h\rangle + V(tx)\langle h\rangle.$$

С другой стороны, имеем тождество $x = V(tx)\langle x\rangle$, дифференцирование которого по $x$ на векторе $h$ приводит к равенству $h = t\partial V(tx)\langle h, x\rangle + V(tx)\langle h\rangle$. В результате вычитания этого равенства из предыдущего получается

$$\partial_t w - h = t\partial V(tx)\langle x, h\rangle - t\partial V(tx)\langle h, x\rangle = tC_{tx}\langle V(tx)\langle h\rangle, V(tx)\langle x\rangle\rangle = C_{tx}\langle w, x\rangle.$$

Таким образом, каждая вектор-функция $w$ удовлетворяет следующему дифференциальному уравнению:

$$\partial_t w = h + C_{tx}\langle w, x\rangle, \quad w(0) = 0. \tag{2.5}$$

Исследуем свойства решений задачи (2.5). В качестве $h$ рассмотрим вектор $e_j^\varepsilon = \varepsilon^{\deg e_j} e_j$ для некоторого фиксированного $j \in \{1, \dots, N\}$. Пусть $w_\varepsilon(t) = tV(tx_\varepsilon)\langle e_j^\varepsilon\rangle$, где $w_\varepsilon = (w_{\varepsilon,i})_{i=1,\dots,N}$, $x \in \mathrm{Box}^e_{cc}(\varepsilon_0)$, $\varepsilon \leq 1$. Положим

$$w_\varepsilon = (\varepsilon^{\deg e_i} \widehat{w}_{\varepsilon,i})_{i=1,\dots,N} = \delta_\varepsilon \widehat{w}_\varepsilon. \tag{2.6}$$

Из определения вектор-функции $w_\varepsilon$ вытекает, что

$$w_{\varepsilon,i} = \varepsilon^{\deg e_j} t v_i(tx_\varepsilon) = O(\varepsilon^{\deg e_j}), \quad i = 1, \dots, N, \tag{2.7}$$

где $v_i(tx_\varepsilon)$ — некоторые $C^1$-гладкие функции. Подстановка (2.6) в (2.5) дает

$$\partial_t w_\varepsilon = \delta_\varepsilon \partial_t \widehat{w}_\varepsilon = e_j^\varepsilon + C_{t\delta_\varepsilon x}\langle \delta_\varepsilon \widehat{w}_\varepsilon, \delta_\varepsilon x\rangle, \quad \widehat{w}_\varepsilon(0) = 0. \tag{2.8}$$

Если в (2.8) положить $\varepsilon = 1$, то мы получаем задачу (2.5) для $h = e_j$. Расписывая (2.8) покоординатно, для каждого $k = 1, \dots, N$ имеем

$$\varepsilon^{\deg e_k} \partial_t \widehat{w}_{\varepsilon,k} = \varepsilon^{\deg e_j} \delta_k^j + \sum_{\deg e_k \leq \deg e_i + \deg e_l} \varepsilon^{\deg e_i + \deg e_l} C_{il}^k(t\delta_\varepsilon x) \widehat{w}_{\varepsilon,i} x_l. \tag{2.9}$$

Из (2.9) вытекает, что

$$\partial_t \widehat{w}_\varepsilon = e_j + C_{tx}^\varepsilon \langle \widehat{w}_\varepsilon, x\rangle, \quad \widehat{w}_\varepsilon(0) = 0, \tag{2.10}$$

где оператор $C_{tx}^\varepsilon$ определяется при помощи непрерывных функций

$$C_{ilk}^\varepsilon(tx) = \varepsilon^{\deg e_i + \deg e_l - \deg e_k} C_{il}^k(t\delta_\varepsilon x).$$

Заметим, что семейство функций $C_{ilk}^\varepsilon(tx)$ равностепенно непрерывно и равномерно ограничено на области определения; при этом, учитывая (2.7), имеем

$$C_{ilk}^\varepsilon(tx) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} \begin{cases} C_{il}^k(0), & \deg e_i + \deg e_j = \deg e_k, \\ 0, & \deg e_i + \deg e_j > \deg e_k, \end{cases}$$

равномерно на области определения. Поэтому если число $\varepsilon_0$ достаточно мало, то из классических теорем о существовании решений обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [19]) вытекает, что для каждого $\varepsilon$ существует решение задачи (2.10) в промежутке $[0, 1]$. Пусть $\widehat{w}_0(t)$ — решение следующей задачи Коши:

$$\partial_t \widehat{w}_0 = e_j + \widehat{C}_0\langle \widehat{w}_0, x\rangle, \quad \widehat{w}_0(0) = 0, \quad t \in [0, 1], \tag{2.11}$$

где действие оператора $\widehat{C}_0$ определяется тождествами

$$\widehat{C}_0\langle e_i, e_j\rangle = \sum_{\deg e_i + \deg e_j = \deg e_k} \widehat{C}_{ij}^k e_k, \quad \text{где } \widehat{C}_{ij}^k = C_{ij}^k(0) = \mathrm{const}. \tag{2.12}$$

Решение $\widehat{w}_0$ аналитическое (в силу линейности (2.11) по $\widehat{w}_0$) и единственно (см. также [12]). Используя теорему Асколи — Арцела (см. [19, теорема 2.4]), приходим к следующей равномерной сходимости:

$$\widehat{w}_\varepsilon(t) \underset{\varepsilon \to 0}{\rightrightarrows} \widehat{w}_0(t), \quad t \in [0, 1]. \tag{2.13}$$

Обозначим $\left(a_1^j, \dots, a_N^j\right)(\delta_\varepsilon x) = \widetilde{X}_j(\delta_\varepsilon x) = A(\delta_\varepsilon x)\langle e_j\rangle$. Докажем следующие оценки:

$$a_k^j(x_\varepsilon) = \begin{cases} \delta_k^j + c_k^j(x_\varepsilon, \varepsilon) = \delta_k^j + O(\varepsilon), & k \leq h_{\deg e_j}, \\ c_k^j(x_\varepsilon) = O(\varepsilon^{\deg e_k - \deg e_j}), & k > h_{\deg e_j}, \end{cases} \tag{2.14}$$

где $c_k^j(x_\varepsilon,\varepsilon)$ — $C^1$-гладкие функции. Так как $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$ — набор $C^1$-гладких базисных векторных полей, имеем $w_\varepsilon(1)=V(x_\varepsilon)\langle e_j^\varepsilon\rangle\in C^1$. Интегрируя (2.8), с учетом (2.7), (2.9) получаем, что

$$w_{\varepsilon,k}(1)=\begin{cases}\varepsilon^{\deg e_j}\delta_j^k+\tilde{c}_k^j(x_\varepsilon)=\varepsilon^{\deg e_j}\delta_j^k+O(\varepsilon^{\deg e_j+1}), & k\le h_{\deg e_j},\\ \tilde{c}_k^j(x_\varepsilon)=O(\varepsilon^{\deg e_k}), & k>h_{\deg e_j},\end{cases} \tag{2.15}$$

для некоторых $C^1$-гладких на $\mathrm{Box}_{cc}^e(0,\varepsilon)$ функций $\tilde{c}_k^j$. Заметим, что $j$-й столбец матрицы $V(x_\varepsilon)$ совпадает с вектором $\varepsilon^{-\deg e_j}w_\varepsilon(1)$. Учитывая (2.15), получаем, что матрица $V(x_\varepsilon)$ удовлетворяет условиям леммы 3.1 из [7]. Так как $V^{-1}(x_\varepsilon)=A(x_\varepsilon)\in C^1$, равенства (2.14) доказаны. Обозначим символом $\widehat{V}$ матрицу размера $N\times N$, $j$-й столбец которой совпадает с $w_0$, и $\widehat{A}=\widehat{V}^{-1}$. Из (2.13), (2.15) вытекает, что

$$(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\circ V(\delta_\varepsilon x)\circ(\delta_\varepsilon)_*\underset{\varepsilon\to0}{\rightrightarrows}\widehat{V}(x)$$

равномерно на $\mathrm{Box}_{cc}^e(0,\varepsilon_0)$, что равносильно тому, что

$$(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\circ A(\delta_\varepsilon x)\circ(\delta_\varepsilon)_*\underset{\varepsilon\to0}{\rightrightarrows}\widehat{A}(x) \tag{2.16}$$

равномерно на $\mathrm{Box}_{cc}^e(0,\varepsilon_0)$. При этом из (2.14) и (2.16) вытекает, что матрица $\widehat{A}(x)$ в каждой точке $x\in\mathrm{Box}_{cc}^e(0,\varepsilon_0)$ будет нижнетреугольной с диагональными элементами, равными 1, а элементы матрицы будут (локально) аналитическими функциями. Теорема 2.1 доказана.

Для каждого мультииндекса $\alpha$ обозначим

$$|\alpha|_h=|(\alpha_1,\dots,\alpha_N)|_h=\sum_{i=1}^N\deg e_i\alpha_i;$$

также $\widehat{X}_j^\varepsilon=\varepsilon^{\deg e_j}\widehat{X}_j$, $j=1,\dots,N$.

**Следствие 2.1.** 1. *Имеют место равенства*

$$(\delta_{1/\varepsilon})_*\widehat{X}_j^\varepsilon(\delta_\varepsilon x)=\widehat{X}_j(x),\quad \varepsilon\in(0,1], \tag{2.17}$$

2. *Пусть* $\big(\hat{a}_1^j,\dots,\hat{a}_N^j\big)(x)=\widehat{X}_j(x)=\widehat{A}(x)\langle e_j\rangle$, $x\in\mathrm{Box}_{cc}^e(\varepsilon_0)$. *Тогда*

$$\hat{a}_k^j(x)=\begin{cases}\delta_k^j, & k\le h_{\deg X_j},\\ \sum\limits_{\substack{|\alpha+e_j|_h=\deg e_k,\\ \alpha>0}}\widehat{F}_{\alpha,e_j}^k\cdot x^\alpha, & k>h_{\deg e_j},\end{cases} \tag{2.18}$$

*где* $\widehat{F}_{\alpha,e_j}^i=\mathrm{const}$.

Доказательство. П. 1 вытекает из (2.16), п. 2 — из п. 1 и аналитичности функций $\hat{a}_k^j(x)$.

**Следствие 2.2.** *Для каждого* $j=1,\dots,N$

$$a_k^j(x_\varepsilon)=\begin{cases}\delta_k^j+f_k^j(x_\varepsilon), & k\le h_{\deg e_j},\\ \varepsilon^{\deg e_k-\deg e_j}\cdot\sum\limits_{\substack{\alpha>0\\ |\alpha+e_j|_h=\deg e_k}}\widehat{F}_{\alpha,e_j}^k\cdot x^\alpha+f_k^j(x_\varepsilon), & k>h_{\deg e_j},\end{cases}$$

*где*

$$f_k^j(x_\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon), & k \le h_{\deg e_j}, \\ o(\varepsilon^{\deg e_k - \deg e_j}), & k > h_{\deg e_j}, \end{cases}$$

*а величины* $o(\varepsilon^{\deg e_k - \deg e_j})$, $O(\varepsilon)$ *равномерны на* $\mathrm{Box}^e_{cc}(0,\varepsilon)$.

Доказательство. Ввиду (2.13), (2.16), (2.18) следствие 2.2 является «покоординатной» записью сходимостей из теоремы 2.1.

**Следствие 2.3.** *На* $\mathrm{Box}^e_{cc}(0,\varepsilon_0)$ *имеют место следующие равномерные сходимости:*

$$\big[(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_i^\varepsilon, (\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_j^\varepsilon\big](x) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} \Big(\sum_{\deg e_i + \deg e_j = \deg e_k} \widehat{C}_{ij}^k \widehat{X}_k\Big)(x).$$

Доказательство. Используя теорему 2.1 и (2.4), получаем равномерную сходимость

$$\begin{aligned}\big[(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_i^\varepsilon, (\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\widetilde{X}_j^\varepsilon\big](x) &= (\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\big[\widetilde{X}_i^\varepsilon, \widetilde{X}_j^\varepsilon\big](\delta_\varepsilon x) \\ &= \varepsilon^{\deg e_i + \deg e_j - \deg e_k}(\delta_{\varepsilon^{-1}})_*\Big(\sum_{\deg e_i + \deg e_j \ge \deg e_k} C_{ij}^k \widetilde{X}_k^\varepsilon\Big)(\delta_\varepsilon x) \\ &\underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} \Big(\sum_{\deg e_i + \deg e_j = \deg e_k} C_{ij}^k(0) \widehat{X}_k\Big)(x).\end{aligned}$$

**Следствие 2.4.** *Набор векторных полей* $\{\widehat{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$ *является каноническим.*

Доказательство. Возьмем произвольное векторное поле $\widehat{X}_j$. Рассмотрим точку $\gamma_{j,s} \in \mathbb{R}^N$, у которой на $j$-м месте расположено число $s$, на оставшихся местах — 0. Подставим $\gamma_{j,s}$ вместо $x$, а прямую $te_j$ — вместо $\widehat{w}_0$ в уравнение из (2.11). Используя $\widehat{C}_{ij}^k = -\widehat{C}_{ji}^k$ (см. (2.3)), приходим к тождеству. Следовательно, по теореме о существовании и единственности решений обыкновенных дифференциальных уравнений получаем, что в этом случае $\widehat{w}_0(t) = te_j$, откуда $\widehat{w}_0(1) = e_j$. Тогда из соображений «линейности» вытекает, что решением задачи

$$\partial_t \widehat{w}_0 = h + \widehat{C}_0\langle \widehat{w}_0, x\rangle, \quad \widehat{w}_0(0) = 0, \quad t \in [0,1],$$

где $x = sh$, $h \in \mathbb{R}^N$, является прямая $th$, т. е. в этом случае $\widehat{w}_0(1) = h$. Таким образом, $\widehat{V}(sh)\langle h\rangle = h$, что эквивалентно $\widehat{A}(sh)\langle h\rangle = h$. Следствие 2.4 доказано.

Пусть $Y_j = \big(f_1^j, \dots, f_N^j\big)$, где функции $f_k^j$ из следствия 2.2, $Y_j^\varepsilon = \varepsilon^{\deg e_j} Y_j$.

**Следствие 2.5.** 1. *Предположим, что имеют место следующие равномерные сходимости:*

$$(\delta_{1/\varepsilon})_*\big([Y_i^\varepsilon, \widehat{X}_j^\varepsilon] + [\widehat{X}_i^\varepsilon, Y_j^\varepsilon] + [Y_i^\varepsilon, Y_j^\varepsilon]\big)(\delta_\varepsilon x) \underset{\varepsilon\to 0}{\rightrightarrows} 0, \quad i,j = 1,\dots,N,$$

*на* $\mathrm{Box}^e_{cc}(0,\varepsilon_0)$. *Тогда на* $\mathrm{Box}^e_{cc}(0,\varepsilon_0)$ *выполняется*

$$[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j](x) = \Big(\sum_{\deg e_i + \deg e_j = \deg e_k} \widehat{C}_{ij}^k \widehat{X}_k\Big)(x). \tag{2.19}$$

2. *Пусть* $[\widehat{X}_i, \widehat{X}_j](x) = (p_1, \dots, p_N)(x)$, $\deg e_i + \deg e_j = k$. *Тогда существуют константы* $G^{\alpha}_{l,i,j}$ *такие, что*

$$p_l(x) = \begin{cases} 0, & l \leq h_{k-1}, \\ \sum\limits_{\substack{\alpha \geq 0 \\ |\alpha|_h = \deg e_l - k}} G^{\alpha}_{l,i,j} x^{\alpha}, & l > h_{k-1}. \end{cases}$$

3. $\{\widehat{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$ *порождают нильпотентную алгебру Ли степени* $M$.

Доказательство. 1. Имеем

$$(\delta_{1/\varepsilon})_*\bigl[\widetilde{X}^{\varepsilon}_i, \widetilde{X}^{\varepsilon}_j\bigr] = (\delta_{1/\varepsilon})_*\bigl[\widehat{X}^{\varepsilon}_i + Y^{\varepsilon}_i, \widehat{X}^{\varepsilon}_j + Y^{\varepsilon}_j\bigr]$$
$$= (\delta_{1/\varepsilon})_*\bigl[\widehat{X}^{\varepsilon}_i, \widehat{X}^{\varepsilon}_j\bigr] + (\delta_{1/\varepsilon})_*\bigl[\widehat{X}^{\varepsilon}_i, Y^{\varepsilon}_j\bigr] + (\delta_{1/\varepsilon})_*\bigl[Y^{\varepsilon}_i, \widehat{X}^{\varepsilon}_j\bigr] + (\delta_{1/\varepsilon})_*\bigl[Y^{\varepsilon}_i, Y^{\varepsilon}_j\bigr].$$

Используя (2.17) и следствие 2.3, получаем п. 1 следствия 2.5.

2. Ввиду (2.17) для любой точки $x \in \mathrm{Box}^e_{cc}(0, \varepsilon_0)$ имеем

$$(\delta_{1/\varepsilon})_* \varepsilon^{\deg e_i + \deg e_j} [\widehat{X}_i, \widehat{X}_j](\delta_{\varepsilon} x) = \bigl[(\delta_{1/\varepsilon})_* \widehat{X}^{\varepsilon}_i, (\delta_{1/\varepsilon})_* \widehat{X}^{\varepsilon}_j\bigr](x) = [\widehat{X}_i, \widehat{X}_j](x),$$

откуда в силу аналитичности векторных полей $\widehat{X}_i$ $\widehat{X}_j$ и вытекает п. 2.

3. Используя п. 2, получаем, что любой «коммутатор» длины $M$, составленный из векторных полей $\{\widehat{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$, равен 0. (Рассуждения, подобные тем, которые приведены при доказательстве пп. 2 и 3, можно найти в [3, ч. 5].)

Замечание 2.1. Пусть функции $C^k_{ij}$ такие, что $\deg e_k = \deg e_i + \deg e_j$, в точке 0 удовлетворяют тождествам Якоби, т. е. $\widehat{C}^s_{ij}\widehat{C}^l_{sk} + \widehat{C}^s_{jk}\widehat{C}^l_{si} + \widehat{C}^s_{ki}\widehat{C}^l_{sj} = 0$. Тогда из фактов общей теории (см. [12]) вытекает, что набор чисел $\bigl\{\widehat{C}^k_{ij}\bigr\}$ является структурным тензором некоторой канонической конечномерной нильпотентной алгебры Ли, базис которой образуют векторные поля $\{\widehat{X}_l\}$, $l = 1, \dots, N$, удовлетворяющие «таблице коммутаторов» (2.19). Данной алгебре Ли соответствует каноническая группа Ли, групповая операция (ассоциативное групповое ядро) которой стандартным образом определяется при помощи ряда Кэмпбелла — Хаусдорфа; относительно данной групповой операции векторные поля $\{\widehat{X}_l\}$ левоинвариантны.

Замечание 2.2. В [12] при помощи критерия интегрируемости Фробениуса доказано, что в случае групп Ли имеем $C_x = C$, оператор $C$ определяется тождествами $(C\langle h, k\rangle)^{\alpha} = C^{\alpha}_{\beta\gamma} h^{\beta} k^{\gamma}$, где $C^{\alpha}_{\beta\gamma}$ — вещественные числа, называемые структурными константами группы Ли, $C\langle h, k\rangle = [h, k]$ и каждому отображению $C$ соответствует группа Ли, для которой $C$ является ее структурным оператором. Существенным при доказательстве этих утверждений является свойство ассоциативности группового ядра. Но в нашем случае (ассоциативного) группового ядра, соответствующего векторным полям $\widetilde{X}_i$, может и не существовать, поскольку наш «структурный» оператор $C_x$ (см. (2.1)), вообще говоря, зависит от точки $x$ (см. (2.1)).

## § 3. Некоторые обобщения

Ниже мы приведем некоторые обобщения теоремы 2.1 в терминах гладкости векторных полей $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N}$ и «структурного» оператора $C_x$ (см. (2.1), (2.3)).

**Утверждение 3.1.** *Пусть* $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N} \in D^1$ *— базисные канонические векторные поля такие, что компоненты оператора* $C_x$ *непрерывны на прямых линиях, исходящих из начала координат, а также на всех кривых* $\gamma_x(\tau) = \delta_\tau x$, $\tau \in [0,1]$, $x \in \mathrm{Box}^e_{cc}(\varepsilon_0)$. *В этом случае теорема 2.1 также имеет место.*

Доказательство утверждения 3.1 не отличается от доказательства теоремы 2.1.

**Утверждение 3.2.** *Пусть* $\{\widetilde{X}_i\}_{i=1,\dots,N} \in D^1$ *— базисные канонические векторные поля такие, что компоненты оператора* $C_x$*, являющиеся ограниченными некоторой константой* $K$ *измеримыми в* $\mathscr{O}$ *функциями, непрерывны почти всюду на прямых линиях, исходящих из начала координат, а также непрерывны в начале координат по направлениям* $\gamma_x(\tau) = \delta_\tau x$, $\tau \in [0,1]$, $x \in \mathrm{Box}^e_{cc}(\varepsilon_0)$. *В этом случае теорема 2.1 также имеет место.*

Доказательство. Используя (2.10), (2.11), запишем

$$(\partial_t \widehat{w}_\varepsilon - \partial_t \widehat{w}_0)(t) = C^\varepsilon_{tx}\langle \widehat{w}_\varepsilon, x\rangle - \widehat{C}_0\langle \widehat{w}_0, x\rangle,$$

откуда

$$\begin{aligned}\widehat{w}_\varepsilon(t) - \widehat{w}_0(t) &= \int\limits_0^t \big(C^\varepsilon_{tx}\langle \widehat{w}_\varepsilon, x\rangle - \widehat{C}_0\langle \widehat{w}_0, x\rangle\big)\,dt \\ &= \int\limits_0^t \Big(\big(C^\varepsilon_{tx}\langle \widehat{w}_\varepsilon, x\rangle - C^\varepsilon_{tx}\langle \widehat{w}_0, x\rangle\big) + \big(C^\varepsilon_{tx}\langle \widehat{w}_0, x\rangle - \widehat{C}_0\langle \widehat{w}_0, x\rangle\big)\Big)\,dt. \qquad (3.1)\end{aligned}$$

Применяя (3.1), получаем

$$\|\widehat{w}_\varepsilon(t) - \widehat{w}_0(t)\| \le K_1 \int\limits_0^t \|\widehat{w}_\varepsilon(t) - \widehat{w}_0(t)\|\,dt + K_2 t\lambda = v(t), \qquad (3.2)$$

где $K_1$, $K_2$ — константы, зависящие от $K$, $\varepsilon_0$, $\|\widehat{w}_0\|$, а $\lambda = o(1)$ при $\varepsilon \to 0$. Учитывая (3.2), рассмотрим следующие соотношения:

$$\dot{v}(t) = K_1\|\widehat{w}_\varepsilon(t) - \widehat{w}_0(t)\| + K_2\lambda \le K_1 v(t) + K_2\lambda, \quad v(0) = 0. \qquad (3.3)$$

Из (3.3) вытекает, что

$$\frac{d}{dt}(e^{-tK_1}v(t)) \le K_2\lambda e^{-tK_1},$$

откуда в силу того, что $v(0) = 0$, получаем

$$0 \le e^{-tK_1}v(t) \le \int\limits_0^t K_2\lambda e^{-tK_1}.$$

Следовательно, величина $v(t)$, а вместе с ней и $\|\widehat{w}_\varepsilon(t) - \widehat{w}_0(t)\|$ равномерно стремятся к 0 (см. (3.2)), что влечет равномерную сходимость $\widehat{w}_\varepsilon(t)$ к $\widehat{w}_0(t)$ при $\varepsilon \to 0$. Дальше можно повторить те же рассуждения, что и в теореме 2.1 после (2.11).

## § 4. Свойства некоторых анизотропных метрических пространств

Рассмотрим $C^1$-гладкие базисные векторные поля $X_1, \ldots, X_N$ из § 1, удовлетворяющие табл. (0.1). Предположим, что на области $U \times B_e(0,\nu)$, где $\nu$ — некоторое фиксированное число, задано отображение $\vartheta(g,x)$, удовлетворяющее следующим свойствам:

$1^0$) при каждом фиксированном $g \in O$ отображение $\vartheta(g,x) = \vartheta_g(x)$ является $C^2$-гладким диффеоморфизмом, при этом $O \subset \vartheta_g(B_e(0,\nu))$,

$2^0$) отображение $\vartheta(g,x)$ и его частные производные непрерывно зависят от $u$,

$3^0$) векторные поля $\left\{(\vartheta_g^{-1})_* X_i\right\}_{i=1,\ldots,N}$ канонические на множестве $\vartheta_g^{-1}O$.

Если векторные поля $\{X_i\}$ класса $C^2(U)$, то отображение $\theta_g$ из § 1 является примером отображения $\vartheta_g$, если же векторные поля $\{X_i\}$ класса $C^1(U)$, то отображение $\theta_g$ в общем случае может и не быть класса $C^2$.

Зафиксируем точку $g \in O$. Символом $\Delta_t^g$, $t \geq 0$, обозначим *неоднородный оператор растяжения*, действующий по правилу $\Delta_t^g = \vartheta_g \circ \delta_t \circ \vartheta_g^{-1}$, где оператор $\delta_t$ определен в § 2. Пусть

$$\operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon) = \left\{ u \in O \mid u = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} \hat{\varepsilon}^{\deg X_i} x_i X_i\right)(g),\ |(x_1,\ldots,x_N)|_\infty = 1,\ \hat{\varepsilon} < \varepsilon \right\}.$$

Тогда ввиду определения области $O$ и отображения $\vartheta(g,x)$ из теоремы 2.1 вытекает

**Теорема 4.1.** *На каждом множестве* $\operatorname{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0)$, $g \in O$, *векторные поля*

$$\left(\Delta_{\varepsilon^{-1}}^g\right)_* X_i^\varepsilon, \quad i = 1,\ldots,N,$$

*сходятся равномерно при* $\varepsilon \to 0$ *к векторным полям* $\widehat{X}_i^g$, $i = 1,\ldots,N$, *локально порождающим некоторую нильпотентную алгебру Ли степени* $M$, *и эти сходимости равномерны относительно* $g$.

Определение 4.1. Пусть $A$ — некоторое множество. *Квазиметрикой* будем называть отображение $d : A \times A \to \mathbb{R}^+ \cup 0$ (ср. с [21]), обладающее следующими свойствами:

1) $d(u,v) \geq 0$, $d(u,v) = 0$ тогда и только тогда, когда $u = v$;

2) $d(u,v) \leq K_1 d(v,u)$ для некоторой константы $K_1$, не зависящей от выбора $u, v \in A$;

3) $d(u,v) \leq K_2(d(u,w) + d(w,v))$ для некоторой константы $K_2$, не зависящей от выбора $u, v, w \in A$.

Пару $(A,d)$ будем называть *квазипространством.*

Введем в рассмотрение на $O$ метрическую функцию $d_{cc} : O \times O \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$, действующую по правилу

$$d_{cc}(u,v) = \max\{|y_j|^{1/\deg X_j} \mid j = 1,\ldots,N\}, \quad u = \exp\left(\sum_{j=1}^{N} y_j X_j\right)(v), \quad u, v \in O.$$

Из леммы 1.2 вытекает, что функция $d_{cc}$ определена корректно.

**Теорема 4.2.** *$(\widetilde{O}, d_{cc})$ является квазипространством, где область $\widetilde{O}$ из леммы* 1.3.

Доказательство. Очевидно, $d_{cc}(u,v)=0$ тогда и только тогда, когда $u=v$. Если $u=\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N} y_jX_j\Bigr)(v)$, то $v=\exp\Bigl(-\sum\limits_{i=1}^{N} y_jX_j\Bigr)(u)$, откуда вытекает, что $d_{cc}(u,v)=d_{cc}(v,u)$. Остается проверить обобщенное неравенство треугольника. Рассмотрим точки $g,u,v\in\widetilde{O}$, связанные соотношением

$$\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{N}\epsilon^{\deg X_j}y_jX_j\Biggr)\circ\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^{\deg X_j}x_jX_j\Biggr)(g)=\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{N}\epsilon^{\deg X_j}y_jX_j\Biggr)(u)=v,$$

где $|x|_\infty=|y|_\infty=1$, $y=(y_1,\dots,y_N)$, $x=(x_1,\dots,x_N)$. Из определения области $O$ вытекает, что существует единственное векторное поле $\sum\limits_{i=1}^{N}p_jX_j$, $p_j=\mathrm{const}$, такое, что $v=\exp\Bigl(\sum\limits_{j=1}^{N}p_jX_j\Bigr)(g)$. Нам необходимо доказать, что существует константа $Q$, не зависящая от точек $g$, $u$, $v$, такая, что

$$d_{cc}(v,g)\le Q(\varepsilon+\epsilon). \tag{4.1}$$

Учитывая «симметричность» $d_{cc}$, мы можем считать, не уменьшая общности, что $\epsilon\le\varepsilon$. Рассмотрим отображение $\vartheta_g$. Обозначим $\widetilde{X}_i^g=\bigl(\vartheta_g^{-1}\bigr)_*X_i$, $i=1,\dots,N$. Переходя к локальным координатам $\vartheta_g^{-1}$, в силу $1^0-3^0$ в некоторой окрестности начала координат $\mathrm{Box}_{cc}^e(0,c_1\varepsilon)$, где $\varepsilon\in(0,\varepsilon_0]$, $c_1>0$ — некоторая константа, не зависящая от $\varepsilon$, будем иметь асимптотические оценки (2.14) для координат векторных полей $\widetilde{X}_i^g$. В системе координат $\vartheta_g^{-1}$ получаем тождество

$$\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{N}p_j\widetilde{X}_j^g\Biggr)(0)=\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{N}\varepsilon^{\deg X_j}y_j\widetilde{X}_j^g\Biggr)\circ\exp\Biggl(\sum_{j=1}^{N}\epsilon^{\deg X_j}x_j\widetilde{X}_j^g\Biggr)(0).$$

Пусть $p=(p_1,\dots,p_N)$, $\widetilde{Y}^\varepsilon=\sum\limits_{j=1}^{N}\varepsilon^{\deg X_j}y_j\widetilde{X}_j^g$. Тогда $p=\eta(1)$, где

$$\dot\eta(s)=\widetilde{Y}^\varepsilon(\eta(s)),\quad \eta(0)=\delta_\epsilon x,\quad s\in[0,1],$$

откуда

$$p=\delta_\epsilon x+\int_0^1\widetilde{Y}^\varepsilon(\eta(s))\,ds. \tag{4.2}$$

Из (2.14) и (4.2) получаем

$$p_j=\epsilon^{\deg X_j}x_j+\varepsilon^{\deg X_j}y_j+\sum_{\substack{\deg X_j>p,\,q>0,\\ p+q=\deg X_j}}c_{p,q}^j\epsilon^p\varepsilon^q,$$

где $c_{p,q}^j=c_{p,q}^j(x,y,\epsilon,\varepsilon,g)$ — непрерывные на множестве $A=B_e(0,\kappa)\times B_e(0,\tilde\kappa)\times[0,\tilde\varepsilon]\times[0,\tilde\varepsilon]\times\widetilde{O}$, $\tilde\varepsilon\le\varepsilon_0$, функции, равномерно ограниченные по модулю некоторой константой $c'$. Тогда очевидно, что найдется константа $\tilde c=\tilde c(c')$ такая, что

$$|p_j|\le(\epsilon+\tilde c\varepsilon)^j,\quad |p_j|\le(\varepsilon+\tilde c\epsilon)^j. \tag{4.3}$$

Ввиду теоремы 4.1 все полученные выше оценки не зависят от выбора $g$. Тогда (4.1) доказано с константой $Q=2\tilde c$.

**Следствие 4.1.** *Имеем* $\mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon)=\{u\in\widetilde{O}\mid d_{cc}(g,u)<\varepsilon\}$.

**Следствие 4.2.** *Найдется константа $c_1$ такая, что для всех $g\in\widetilde{O}$ и всех достаточно малых положительных $\epsilon$, $\varepsilon$ выполняется*

$$\bigcup_{v\in\mathrm{Box}_{cc}(g,\epsilon)}\mathrm{Box}_{cc}(v,\varepsilon)\subset\mathrm{Box}_{cc}(g,\epsilon+c_1\varepsilon).$$

Доказательство. Следствие 4.2 вытекает из оценок (4.3).

На множестве $\mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0)$ рассмотрим векторные поля $\{\widehat{X}_i^g\}_{i=1,\dots,N}$. Полагаем, что число $\varepsilon_0$ мало настолько, что для любых двух точек $u,v\in\mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0)$ найдется единственное векторное поле $\widehat{Y}^g=\sum\limits_{i=1}^N y_i\widehat{X}_i^g$ такое, что $u=\exp\widehat{Y}^g(v)$. Определим на $\mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0)$ метрическую функцию $\hat{d}_c^g(u,v)=\max\{|y_i|^{1/\deg X_i}\mid i=1,\dots,N\}$.

**Следствие 4.3.** *Предположим, что на* $\mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0)$ *выполняется*

$$\big[\widehat{X}_i^g,\widehat{X}_j^g\big]=\sum_{\deg X_i+\deg X_j=\deg X_k}c_{ij}^k\widehat{X}_k^g \tag{4.4}$$

*для некоторых констант $c_{ij}^k$. Тогда $\big(\mathrm{Box}_{cc}(g,\varepsilon_0),\hat{d}_c^g\big)$ является квазипространством.*

Доказательство. Следствие 4.3 доказывается точно так же, как и теорема 4.2.

Замечание 4.1. Несложно проверить, используя (2.18), что в случае $M=2$ существуют константы $c_{ij}^k$ такие, что (4.4) выполняется. Также можно непосредственно проверить, не используя (4.4), что $\hat{d}_c^g$ является квазиметрикой; здесь мы не будем приводить это доказательство.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Gromov M.* Carnot–Caratheodory spaces seen from within // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 79–323.
2. *Грешнов А. В.* Метрики равномерно регулярных пространств Карно — Каратеодори и их касательных конусов // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 2. С. 259–292.
3. *Belläiche A.* The tangent space in sub-Riemannian geometry // Sub-Riemannian geometry. Basel: Birkhäuser, 1996. P. 1–78.
4. *Mitchell J.* On Carnot–Carathéodory metrics // J. Differ. Geom. 1985. V. 21. P. 35–45.
5. *Metivier G.* Fonction spectrale et valeurs proposes d'une classe d'operateurs // Commun. Partial Differ. Equations. 1976. V. 1. P. 479–519.
6. *Rockland Ch.* Intrinsic nilpotent approximations // Acta Appl. Math. 1987. V. 8. P. 213–270.
7. *Грешнов А. В.* Локальная аппроксимация равномерно регулярных квазипространств Карно — Каратеодори их касательными конусами // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 2. С. 290–312.
8. *Водопьянов С. К., Грешнов А. В.* О дифференцируемости отображений пространств Карно — Каратеодори // Докл. АН. 2003. Т. 389, № 5. С. 592–596.
9. *Margulis G. A., Mostow G. D.* The differential of quasi-conformal mapping of a Carnot–Carathéodory spaces // Geom. Funct. Anal. 1995. V. 5, N 2. P. 402–433.
10. *Rothschild L. P., Stein E. M.* Hypoelliptic differential operators and nilpotent groups // Acta Math. 1976. V. 136. P. 247–320.
11. *Goodman R.* Nilpotent Lie groups. Berlin: Springer-Verl., 1976. (Lect. Notes Math.; V. 562).
12. *Овсянников Л. В.* Групповой анализ дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1978.
13. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1973.

**14.** *Koranyi A., Reimann H. M.* Foundations for the theory of quasiconformal mappings on the Heisenberg group // Adv. Math. 1995. V. 111. P. 1–87.
**15.** *Capogna L., Garofalo N.* Boundary behavior of nonnegative solutions of subelliptic equations in $NTA$ domains for Carnot–Carathéodory metrics // J. Fourier Anal. Appl. 1998. V. 4, N 4. P. 403–432.
**16.** *Водопьянов С. К.* Монотонные функции и квазиконформные отображения на группах Карно // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 6. С. 1269–1295.
**17.** *Даирбеков Н. С.* Об отображениях с ограниченным искажением на группе Гейзенберга // Сиб. мат. журн. 2000. Т. 41, № 1. С. 49–59.
**18.** *Rampazzo F., Sussmann H.* Commutators of flow maps of nonsmooth vector fields // J. Differ. Equiations. 2007. V. 232, N 1. P. 134–175.
**19.** *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1970.
**20.** *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. М.: Физматгиз, 1961.
**21.** *Stein E. M.* Harmonic analysis: Real-variables methods, orthogonality, and oscillatory integrals. Princeton: Princeton Univ. Press, 1993.

*Статья поступила 15 марта 2007 г., окончательный вариант — 29 августа 2008 г.*

Грешнов Александр Валерьевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
greshnov@math.nsc.ru