Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 512.542

КОНЕЧНЫЕ ГРУППЫ, В КОТОРЫХ НОРМАЛИЗАТОРЫ СИЛОВСКИХ 3–ПОДГРУПП ИМЕЮТ НЕЧЕТНЫЕ ИЛИ ПРИМАРНЫЕ ИНДЕКСЫ

А. С. Кондратьев, В. Го

Аннотация. Определены композиционные факторы конечных групп, в которых нормализаторы силовских 3-подгрупп имеют нечетные или примарные индексы.

Ключевые слова: конечная группа, простая группа, индекс нормализатора силовской 3-подгруппы.

Свойства нормализаторов силовских подгрупп вызывают большой интерес в теории конечных групп. Ряд статей посвящен исследованию конечных групп с заданными свойствами индексов нормализаторов силовских подгрупп (силовских чисел). Для простого числа p через G_p обозначается некоторая силовская p-подгруппа конечной группы G.

В 1961 г. Хупперт [1] высказал гипотезу, что конечная группа G является p-нильпотентной, если для любого $r \in \pi(G)$ имеем $(|G : N_G(G_r)|, p) = 1$ и $N_G(G_r)$ является p-нильпотентной группой.

Первый автор [2] доказал 2-нильпотентность конечной группы G, если нормализатор каждой силовской подгруппы имеет в G нечетный индекс.

Чжан [3] утверждал p-нильпотентность конечной группы G, только если $(|G : N_G(G_r)|, p) = 1$ для любого $r \in \pi(G)$, и доказал разрешимость конечной группы G, если нормализатор каждой силовской подгруппы имеет в G примарный индекс.

Второй автор в [4] доказал разрешимость конечной группы G, если нормализатор каждой силовской подгруппы имеет в G нечетный или примарный индекс.

Чигира в [5] доказал гипотезу Хупперта. Более того, он доказал p-нильпотентность конечной группы G, если $p \neq 3$ и $(|G : N_G(G_r)|, p) = 1$ для любого $r \in \pi(G)$. Если $p = 3$, то простые унитарные группы $U_3(q)$, где $q = 2^f$, f четно и не делится на 3, являются контрпримерами к утверждению Чжана.

Второй автор и Шам в [6] доказали разрешимость конечной группы G, если нормализатор каждой силовской 2,3-подгруппы имеет в G примарный индекс.

В настоящей работе изучаются композиционные факторы конечных групп, в которых нормализаторы силовских 3-подгрупп имеют нечетные или примарные индексы. Такие группы уже могут быть неразрешимыми. Доказаны следующие две теоремы.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (код проекта 07–01–00148), РФФИ-ГФЕН Китая (код проекта 05–01–3900), РФФИ-БРФФИ (код проекта 08–01–9006) и ГФЕН Китая (код проекта 10771180).

Теорема 1. *Если нормализатор силовской 3-подгруппы имеет в конечной группе G нечетный индекс, то неабелевы композиционные факторы группы G изоморфны одной из следующих групп: $L_2(q)$ для $q \equiv \pm 1 (\operatorname{mod} 12)$, $L_n(q)$ для $n \in \{3,4,5\}$ и $q \equiv -1 (\operatorname{mod} 12)$, $U_n(q)$ для $n \in \{3,4,5\}$ и $q \equiv 1 (\operatorname{mod} 12)$, $PSp_4(q)$ для $q \equiv \pm 1 (\operatorname{mod} 12)$, $Sz(q)$, M_{11}.*

Из доказательства теоремы 1 (см. § 1) следует, что любая простая группа из заключения теоремы 1 удовлетворяет ее условию. Само доказательство теоремы 1 основано на классификации максимальных 2-сигнализаторов конечных простых групп [7].

Теорема 2. *Пусть p — простое число и нормализатор силовской p-подгруппы имеет в конечной группе G примарный индекс. Тогда*

(1) *если $p = 2$, то либо каждый неабелев композиционный фактор группы G изоморфен A_5, либо каждый неабелев композиционный фактор группы G изоморфен $PSp_4(3)$;*

(2) *если $p = 3$, то каждый неабелев композиционный фактор группы G изоморфен группе $Sz(q)$ для некоторого q;*

(3) *если $p > 3$, то все неабелевы композиционные факторы группы G являются p'-группами.*

Так как $Sz(q)$ является $3'$-группой, ввиду леммы 2.2 любая простая группа в каждом из случаев (1)–(3) заключения теоремы 2 удовлетворяет ее условию.

Упомянутые выше результаты из [4] и [6] немедленно следуют из теорем 1 и 2.

Наши обозначения и терминология в основном стандартны, их можно найти в [8, 9]. Если n — натуральное число и p — простое число, то через n_p обозначается p-часть числа n. Если S — некоторая силовская 2-подгруппа конечной группы G, то любая S-инвариантная $2'$-подгруппа из G называется *P-сигнализатором* или просто *2-сигнализатором в G*.

§ 1. Доказательство теоремы 1

Пусть везде в этом параграфе G — конечная группа, P — силовская 3-подгруппа в G и индекс $|G : N_G(P)|$ нечетен.

Лемма 1.1. *Если H — нормальная подгруппа в G, то*

(а) *в фактор-группе G/H нормализатор любой силовской 3-подгруппы имеет нечетный индекс;*

(б) *в H нормализатор любой силовской 3-подгруппы имеет нечетный индекс.*

Доказательство. (а) Положим $\overline{G} = G/H$. Тогда $\overline{P}$ — силовская 3-подгруппа в $\overline{G}$ и $\overline{N_G(P)} = N_{\overline{G}}(\overline{P})$, откуда вытекает справедливость утверждения (а).

(б) По теореме Силова $P \cap H$ — силовская 3-подгруппа в H. По лемме Фраттини $G = HN_G(P \cap H)$ и, следовательно,

$$|G : N_G(P \cap H)| = |H : N_H(P \cap H)|.$$

Отсюда ввиду включения $N_G(P) \leq N_G(P \cap H)$ вытекает справедливость утверждения (б). Лемма доказана.

Предположим, что G — контрпример наименьшего порядка к теореме 1. Тогда ввиду леммы 1.1 G — простая неабелева группа. Подгруппа P является 2-сигнализатором в G. Если $P = 1$, то $G \cong Sz(q)$, что не противоречит теореме 1.

Поэтому $P \neq 1$. Применим классификацию максимальных 2-сигнализаторов конечных простых групп, полученную в [7].

Лемма 1.2. *G не изоморфна знакопеременной группе.*

Доказательство. Пусть $G \cong A_n$ для $n \geq 5$. По [7] $n \equiv 3 \pmod 4$ и $|P| = 3$. Тогда $n \geq 7$ и, следовательно, $|G|_3 > 3$, что невозможно. Лемма доказана.

Лемма 1.3. *G не изоморфна спорадической группе.*

Доказательство. Пусть G — спорадическая группа. Тогда по [7] либо $G \cong M_{11}$ и $P \cong 3\times 3$, либо $G \cong Ly$ и $|P| = 3$. В первом случае G не противоречит теореме 1. Второй случай невозможен, так как $|Ly|_3 > 3$. Лемма доказана.

Ввиду лемм 1.2 и 1.3 и классификации конечных простых групп получаем, что $G = G(q)$ — простая группа лиева типа над полем порядка q и характеристики r.

Лемма 1.4. *Имеет место неравенство $r > 3$.*

Доказательство. Если $r = 2$, то по [7] $P = 1$, что не так. Пусть $r = 3$. Тогда $N_G(P)$ — подгруппа Бореля в G и, следовательно, силовская 2-подгруппа из G абелева, т. е. группа G изоморфна либо $L_2(q)$ для $q \equiv \pm\, 3 \pmod 8$, либо ${}^2G_2(q)$. Значит, силовская 2-подгруппа из G циклическая, что противоречит простоте группы G. Лемма доказана.

Ввиду леммы 1.4 $q \equiv \epsilon 1 \pmod 4$, где $\epsilon \in \{+,-\}$. Пусть $(q-\epsilon 1)_3 = 3^m$ для некоторого неотрицательного целого числа m.

Лемма 1.5. *$G \not\cong L_n(q)$ для $n \geq 2$.*

Доказательство. Пусть $G \cong L_n(q)$ для $n \geq 2$. Тогда

$$|G| = \frac{q^{n(n-1)/2}}{(n,q-1)}\prod_{i=2}^{n}(q^i-1) = \frac{q^{n(n-1)/2}}{(n,q-1)}(q-1)^{n-1}\prod_{i=2}^{n}\frac{q^i-1}{q-1}.$$

Если $n = 2$, то P — циклическая группа порядка 3^m, т. е. $q \equiv \pm 1 \pmod{12}$, что не противоречит теореме 1. Поэтому $n \geq 3$.

Предположим, что 3 делит $q-1$. Тогда по [7] $|G|_3 = \big(\frac{(q-1)^{n-1}}{(n,q-1)}\big)_3$ и $\epsilon = +$, откуда 3 не делит $\prod\limits_{i=2}^{n}\frac{q^i-1}{q-1}$. Но 3 делит $\frac{q^3-1}{q-1} = (q^2-1)+(q-1)+3$, откуда $n < 3$; противоречие.

Итак, 3 делит $q+1$. Тогда по [7] $|G|_3 = ((q+1)_3)^{[n/2]}$ и $\epsilon = -$. Имеем $(q^{2j+1}-1, q^2-1) = (2j+1, 2) = 1$, поэтому

$$|G|_3 = \left(\prod_{j=1}^{[n/2]}\frac{q^{2j}-1}{q-1}\right)_3 = ((q+1)_3)^{[n/2]}\left(\prod_{j=1}^{[n/2]}\frac{q^{2j}-1}{q^2-1}\right)_3,$$

так что 3 не делит $\prod\limits_{j=1}^{[n/2]}\frac{q^{2j}-1}{q^2-1}$. Но $\big(\frac{q^6-1}{q^2-1}, q^2-1\big) = (6, q^2-1)$ делится на 3, поэтому $[n/2] < 3$, т. е. $n \leq 5$. Отсюда $q \equiv -1 \pmod{12}$, что не противоречит теореме 1. Лемма доказана.

Лемма 1.6. *$G \ncong U_n(q)$ для $n \geq 3$.*

Доказательство. Пусть $G \cong U_n(q)$ для $n \geq 3$. Тогда

$$|G| = \frac{q^{n(n-1)/2}}{(n,q+1)} \prod_{i=2}^{n} (q^i - (-1)^i) = \frac{q^{n(n-1)/2}}{(n,q+1)} (q+1)^{n-1} \prod_{i=2}^{n} \frac{q^i - (-1)^i}{q+1}.$$

Предположим, что 3 делит $q+1$. Тогда по [7] $|G|_3 = \left(\frac{(q+1)^{n-1}}{(n,q+1)}\right)_3$ и $\epsilon = -$, тем самым 3 не делит $\prod\limits_{i=2}^{n} \frac{q^i-(-1)^i}{q+1}$. Но 3 делит $\frac{q^3+1}{q+1} = (q^2-1)-(q+1)+3$, тем самым $n < 3$; противоречие.

Итак, 3 делит $q-1$. Тогда по [7] $|G|_3 = ((q-1)_3)^{[n/2]}$ и $\epsilon = +$. Имеем $(q^{2j+1}+1, 3) = ((q^{2j+1}-1)+2, 3) = 1$, поэтому

$$|G|_3 = \left(\prod_{j=1}^{[n/2]} \frac{q^{2j}-1}{q-1} \right)_3 = ((q-1)_3)^{[n/2]} \left(\prod_{j=1}^{[n/2]} \frac{q^{2j}-1}{q^2-1} \right)_3,$$

откуда 3 не делит $\prod\limits_{j=1}^{[n/2]} \frac{q^{2j}-1}{q^2-1}$. Но $\frac{q^6-1}{q^2-1}$ делится на 3, поэтому $[n/2] < 3$, т. е. $n \leq 5$. Отсюда $q \equiv 1 (\operatorname{mod} 12)$, что не противоречит теореме 1. Лемма доказана.

Лемма 1.7. *G не изоморфна группам $PSp_{2n}(q)$ и $P\Omega_{2n+1}(q)$ для $n \geq 2$.*

Доказательство. Пусть G изоморфна $PSp_{2n}(q)$ или $P\Omega_{2n+1}(q)$ для $n \geq 2$. Тогда по [7] P — гомоциклическая абелева группа ранга n и экспоненты 3^m. Имеем

$$|G| = \frac{q^{n^2}}{2} \prod_{i=1}^{n} (q^{2i}-1) = \frac{q^{n^2}}{2} (q^2-1)^n \prod_{i=1}^{n} \frac{q^{2i}-1}{q^2-1},$$

откуда 3 не делит $\prod\limits_{i=1}^{n} \frac{q^{2i}-1}{q^2-1}$. Но $\frac{q^6-1}{q^2-1}$ делится на 3, поэтому $n = 2$ и $G \cong PSp_4(q) \cong P\Omega_5(q)$. Отсюда $q \equiv \epsilon 1 (\operatorname{mod} 12)$, что не противоречит теореме 1. Лемма доказана.

Лемма 1.8. *$G \ncong P\Omega^+_{2n}(q)$ для $n \geq 4$.*

Доказательство. Пусть $G \ncong P\Omega^+_{2n}(q)$ для $n \geq 4$. Тогда

$$|G| = \frac{q^{n(n-1)}}{(4,q^n-1)} (q^n-1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i}-1) = \frac{q^{n(n-1)}}{(4,q^n-1)} (q^2-1)^{n-1} (q^n-1) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{q^{2i}-1}{q^2-1}.$$

По [7] P — гомоциклическая абелева группа экспоненты 3^m и ранга, равного $n-1$ при $\epsilon = -$ и нечетном n и равного n в остальных случаях.

Если n четно, то $|G|_3 = ((q^2-1)_3)^n$ и, рассуждая, как в предыдущих леммах, получим, что $n-1 < 3$.

Если n нечетно, то $|G|_3 = ((q^2-1)_3)^{n-1}(q-1)_3$ и, опять рассуждая, как в предыдущих леммах, выводим, что $n-1 < 3$.

Полученное противоречие с неравенством $n \geq 4$ доказывает лемму.

Лемма 1.9. *$G \ncong P\Omega^-_{2n}(q)$ для $n \geq 4$.*

Доказательство. Пусть $G \ncong P\Omega^+_{2n}(q)$ для $n \geq 4$. Тогда

$$|G| = \frac{q^{n(n-1)}}{(4,q^n+1)} (q^n+1) \prod_{i=1}^{n-1} (q^{2i}-1) = \frac{q^{n(n-1)}}{(4,q^n+1)} (q^2-1)^{n-1} (q^n+1) \prod_{i=1}^{n-1} \frac{q^{2i}-1}{q^2-1}.$$

По [7] P — гомоциклическая абелева группа экспоненты 3^m и ранга, равного n при $\epsilon = -$ и нечетном n и равного $n-1$ в остальных случаях.

Если n четно, то $|G|_3 = ((q^2-1)_3)^{n-1}$ и, рассуждая, как в предыдущих леммах, получим, что $n-1 < 3$.

Если n нечетно, то $|G|_3 = ((q^2-1)_3)^{n-1}(q+1)_3$ и, опять рассуждая, как в предыдущих леммах, выводим, что $n-1 < 3$.

Полученное противоречие с неравенством $n \geq 4$ доказывает лемму.

Лемма 1.10. *G не изоморфна простой группе исключительного лиева типа.*

Доказательство. Пусть G изоморфна простой группе исключительного лиева типа. Ввиду леммы 1.4 группа G не изоморфна группам $Sz(q)$, ${}^2G_2(q)$ и ${}^2F_4(q)'$. По [7] $P = O_3(T^\epsilon)$ для некоторого максимального тора T^ϵ группы G (определение см. в [7]), причем $|N_G(T^\epsilon)/T^\epsilon|$ делится на 3. Поэтому $|P| < |G|_3$; противоречие. Лемма доказана.

Теперь теорема 1 следует из лемм 1.2–1.10.

§ 2. Доказательство теоремы 2

Пусть везде в этом параграфе G — конечная группа, p — простое число, P — силовская p-подгруппа в G и индекс $|G : N_G(P)|$ равен некоторой степени простого числа r.

Лемма 2.1. *Если H — нормальная подгруппа в G, то*

(а) *в фактор-группе G/H индекс нормализатора любой силовской p-подгруппы равен некоторой степени числа r;*

(б) *в H индекс нормализатора любой силовской p-подгруппы равен некоторой степени числа r.*

Доказательство проводится, как в лемме 1.1.

Лемма 2.2 [10, теорема 1]. *Пусть G — простая неабелева группа, H — ее подгруппа и $|G : H| = r^l > 1$, где r — простое число. Тогда выполняется одно из следующих утверждений:*

(1) *$G \cong A_n$, $H \cong A_{n-1}$ и $n = r^l$;*

(2) *$G \cong L_n(q)$, n — нечетное простое число, $|G : H| = (q^n-1)/(q-1) = r^l$ и H — холлова r'-подгруппа в G, равная стабилизатору прямой или гиперплоскости проективного пространства, соответствующего группе G;*

(3) *$G \cong L_2(11)$, $H \cong A_5$ и $r^l = 11$;*

(4) *$G \cong U_4(2) \cong PSp_4(3)$, $H \cong 2^4 : A_5$ и $r^l = 27$;*

(5) *$G \cong M_{23}$, $H \cong M_{22}$ и $r^l = 23$;*

(6) *$G \cong M_{11}$, $H \cong M_{10}$ и $r^l = 11$.*

Предположим, что G — контрпример наименьшего порядка к теореме 2. Тогда ввиду леммы 2.1 G — простая неабелева группа. Можно считать, что $P \neq 1$. Применим лемму 2.2 для $H = N_G(P)$. В случае (1) получим, что $G \cong A_5$, $H \cong A_4$, $p = 2$ и $r = 5$, что не противоречит теореме 2. В случае (2) $H = N_G(P)$ есть подгруппа Бореля в G и, следовательно, $n = 2$, что невозможно. Случаи (3), (5), (6) невозможны, так как $O_p(H) \neq 1$. В случае (4) получим, что $G \cong PSp_4(3)$ и $p = 2$, что не противоречит теореме 2. Так как в случаях (1) и (4) число r равно 5 и 3 соответственно, то теорема 2 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Subnormale Untergruppen und p-Sylowgruppen // Acta Sci. Math. Szeged. 1961. V. 22. P. 46–61.

2. *Кондратьев А. С.* Критерий 2-нильпотентности конечных групп // Подгрупповая структура групп. Свердловск: УрО АН СССР, 1988. С. 82–84.

3. *Zhang J.* Sylow numbers of finite groups // J. Algebra. 1995. V. 176, N 1. P. 111–123.

4. *Го Вэньбинь.* Конечные группы с заданными индексами нормализаторов силовских подгрупп // Сиб. мат. журн. 1996. Т. 37, № 2. С. 295–300.

5. *Chigira N.* Numbers of Sylow subgroups and p-nilpotency of finite groups // J. Algebra. 1998. V. 201, N 1. P. 71–85.

6. *Guo W., Shum K. P.* A note on finite groups whose normalizers of Sylow 2,3-subgroups are prime power indices // J. Appl. Algebra Discrete Struct. 2005. V. 3, N 1. P. 1–9.

7. *Кондратьев А. С., Мазуров В. Д.* 2-сигнализаторы конечных простых групп // Алгебра и логика. 2003. Т. 42, № 5. С. 594–623.

8. *Aschbacher M.* Finite group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1986.

9. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.

10. *Guralnick R. M.* Subgroups of prime index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81, N 2. P. 304–311.

Статья поступила 20 декабря 2007 г.

Кондратьев Анатолий Семенович
Институт математики и механики УрО РАН,
ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, ГСП-384, 620219
a.s.kondratiev@imm.uran.ru

Guo Wenbin (Го Вэньбинь)
Нормальный университет г. Сюйджоу
Сюйджоу, 221116, Китайская Народная Республика
Xuzhou Normal University
Xuzhou, 221116, P. R. China
wbguo@xznu.edu.cn