Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 517.946

АСИМПТОТИКА ФУНКЦИОНАЛА ЭНЕРГИИ ДЛЯ СМЕШАННОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА В ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗОМ

Е. М. Рудой

Аннотация. Рассматривается эллиптическое уравнение четвертого порядка в области, содержащей криволинейный разрез. На разрезе заданы условия одностороннего ограничения на решение. Для общего вида достаточно гладкого возмущении области исследуется асимптотика функционала энергии. Выведена формула для производной функционала энергии по параметру возмущения области.

Ключевые слова: односторонние ограничения, негладкая область, разрез, вариационное неравенство, функционал энергии.

1. Введение. Рассматривается смешанная задача для уравнений Кирхгофа — Лява в области с разрезом. На внешней границе области заданы однородные условия Дирихле, на разрезе — условия одностороннего ограничения (условия типа Синьорини).

В работе исследуется асимптотика функционала энергии. Для этого вводится общее возмущение области, зависящее от малого параметра ε. В возмущенной области определяется функционал энергии, который также будет зависеть от ε. Основным результатом работы является формула для производной функционала энергии по параметру ε. Данная задача моделирует равновесие пластины с трещиной, и если рассматривать такое возмущение области, которое соответствует квазистатическому росту трещины, то полученная производная используется в механике разрушения [1, 2].

Широкий класс задач с ограничениями на решения имеется в работах [3–5].

Возможность дифференцирования функционалов энергии по параметру возмущения области исследовалась во многих работах. Случаи линейных краевых задач в негладких областях можно найти в [6–8]. В работах [9–20] изучались вариации решений, полной энергии, а также других различных функций геометрических и механических параметров при изменении формы разреза.

Работы [21–31] посвящены исследованию дифференцируемости функционалов энергии для краевых задач с односторонними ограничениями на границе. Для таких задач с помощью формулы для производной выведены инвариантные интегралы для различных возмущений области [22, 23, 28]. В работах [21–28] предполагалось, что разрезы являются прямолинейными или плоскими, либо

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 06–01–00209) и гранта Президента РФ (МК–4338.2008.1).

накладывались дополнительные условия на возмущение области. В [29–31] выведена асимптотика функционала энергии для криволинейных (поверхностных) разрезов.

В настоящей работе в отличие от [22, 23, 25–27] не накладываются никакие ограничения на функцию, задающую возмущение области, кроме ее гладкости.

2. Постановка задачи. Рассмотрим ограниченную область Ω в пространстве $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей $\partial\Omega$. Пусть строго внутри области расположена кривая Γ_0. Сделаем ряд предположений, касающихся Ω и Γ_0.

Предположение 1. *Пусть набор* $\{\Omega, \partial\Omega, \Gamma_0\}$ *удовлетворяет следующим условиям:*

(а) *область* Ω *может быть разбита на две подобласти* Ω_1 *и* Ω_2 *с общей границей* Γ*;*

(б) *границы областей* Ω_1 *и* Ω_2 *липшицевы;*

(в) $\overline{\Omega}_1 \cup \overline{\Omega}_2 = \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega}_1 \cap \overline{\Omega}_2 = \overline{\Gamma}$*;*

(г) $\Gamma_0 \subset \Gamma$*;*

(д) Γ_0 *принадлежит классу* $C^{2,1}$ *и является регулярной кривой;*

(е) Γ_0 *может быть продолжена до гладкой замкнутой кривой* $\Sigma \subset \Omega$.

Условие (д) означает, что Γ_0 является кривой без самопересечений, в каждой точке которой существует вектор нормали.

Будем считать, что разрез Γ_0 в пространстве $\mathbb{R}^2$ задается в следующем виде:

$$\Upsilon(x) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \Gamma_0, \tag{1}$$

где $\Upsilon \in C^{2,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

Определим единичный вектор нормали $\nu_0 = (\nu_{01}, \nu_{02})$ к Γ_0. В силу (1) и гладкости Υ компоненты вектора ν_0 имеют вид

$$\nu_{0i} = \frac{\partial\Upsilon}{\partial x_i} / |\nabla\Upsilon|, \quad i = 1, 2.$$

Заметим, что $\nabla\Upsilon \neq 0$ для всех $x \in \Gamma_0$, так как Γ_0 — регулярная кривая. Считаем, что выбранное направление нормали ν_0 определяет положительный берег Γ_0^+, а направление $(-\nu_0)$ — отрицательный берег Γ_0^- разреза Γ_0. Определим область $\Omega_0 = \Omega \backslash \Gamma_0$.

Пусть $\chi = (W, w)^t$ — трехкомпонентный вектор-столбец, где $W = (w_1, w_2)^t$; символ ^{t} означает операцию транспонирования. Зададим тензоры $\{\varepsilon_{ij}(W)\}$ и $\{\sigma_{ij}(W)\}$, компоненты которых определяются по следующим формулам [3]:

$$\varepsilon_{ij}(W) = (1/2)(w_{i,j} + w_{j,i}),$$

$$\sigma_{11}(W) = \varepsilon_{11}(W) + k\varepsilon_{22}(W), \quad \sigma_{22}(W) = \varepsilon_{22}(W) + k\varepsilon_{11}(W),$$

$$\sigma_{12}(W) = (1-k)\varepsilon_{12}(W), \quad k = \mathrm{const},\ 0 < k < 1/2.$$

Здесь и далее нижние индексы после запятой обозначают дифференцирование по соответствующей координате.

Будем считать, что на разрезе выполнено условие одностороннего ограничения — условие непроникания [3]:

$$[W^t]\nu_0 \geq |[(\nabla w)^t \nu_0]| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0,$$

где $[u] = u|_{\Gamma_0^+} - u|_{\Gamma_0^-}$ — скачок функции на разрезе Γ_0. Пусть $f = (f_1, f_2, f_3)^t$ — заданный вектор внешней нагрузки, $f_p \in C^1(\overline{\Omega})$, $p = 1, 2, 3$.

Всюду далее, если не оговорено иначе, индексы i, j, k, l принимают значения от 1 до 2. По повторяющимся индексам производится суммирование 1 до 2.

В области Ω_0 сформулируем следующую смешанную краевую задачу — задачу равновесия пластины с трещиной Γ_0:

$$\sigma_{ij,j}(W_0) = f_i, \quad i = 1, 2, \quad \text{п. в. в } \Omega_0, \tag{2}$$

$$\Delta^2 w_0 = f_3 \quad \text{п. в. в } \Omega_0, \tag{3}$$

$$\sigma_{\tau i}(W_0) = 0, \ i = 1, 2, \quad \sigma_\nu(W_0) \le 0, \tag{4}$$

$$t(w_0) = 0, \quad m(w_0)\left[\frac{\partial w_0}{\partial \nu}\right] + \sigma_\nu [W_0]\nu = 0, \tag{5}$$

$$[\sigma_\nu(W_0)] = 0, \quad [m(w_0)] = 0, \quad |m(w_0)| \le -\sigma_\nu(W_0), \tag{6}$$

$$w_{01} = w_{02} = w_0 = \frac{\partial w_0}{\partial n} = 0 \quad \text{п. в. на} \quad \partial\Omega. \tag{7}$$

Здесь $\sigma_\nu(W_0)$, $\sigma_{\tau 1}(W_0)$, $\sigma_{\tau 2}(W_0)$, $t(w_0)$ и $m(w_0)$ задаются следующими формулами:

$$\sigma_\nu(W_0) = \sigma_{ij}(W_0)\nu_j\nu_i, \quad \sigma_{\tau i}(W_0) = \sigma_{ij}(W_0)\nu_j - \sigma_\nu(W_0)\nu_i, \ i = 1, 2,$$

$$t(w_0) = \frac{\partial}{\partial \nu}\Delta w_0 + (1-k)\frac{\partial^3 w_0}{\partial \nu \partial \tau^2}, \quad m(w_0) = k\Delta w_0 + (1-k)\frac{\partial^2 w_0}{\partial \nu^2},$$

где $\tau = (-\nu_2, \nu_1)$ — единичный касательный вектор к Γ_0; n — единичный вектор внешней нормали к Ω. Отметим, что уравнения равновесия (2), (3) выполняются в смысле распределений, а краевые условия (4)–(6) в смысле двойственности пространств $H^{1/2}(\Gamma_0)$, $H^{3/2}(\Gamma_0)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_0)$, $H^{-3/2}(\Gamma_0)$ соответственно.

Кроме того, уравнения и граничные условия (2)–(7) моделируют равновесие пластины, содержащей сквозную нормальную трещину Γ_0, берега которой могут контактировать, находящейся в равновесии под действием внешней силы f и жестко закрепленной на внешней границе $\partial\Omega$. При этом W_0 — это горизонтальные смещения срединной поверхности пластины, w_0 — вертикальные прогибы.

Для того чтобы дать вариационную формулировку задачи (2)–(7), введем следующие функциональные пространства:

$$H^{1,0}(\Omega_0) = \{u \in H^1(\Omega_0) \mid u = 0 \quad \text{п. в. на } \partial\Omega\},$$

$$H^{2,0}(\Omega_0) = \left\{w \in H^2(\Omega_0) \mid w = \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{п. в. на } \partial\Omega\right\},$$

где n — внешняя единичная нормаль к $\partial\Omega$, и обозначим $H(\Omega_0) = H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{2,0}(\Omega_0)$. Стоит отметить, что вектор-функции из пространства $H(\Omega_0)$ могут принимать различные значения на берегах разреза Γ_0^+ и Γ_0^-.

Рассмотрим функционал энергии

$$\Pi(\Omega_0; \chi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)\, d\Omega_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} b(w, w)\, d\Omega_0 - \int\limits_{\Omega_0} f^t \chi\, d\Omega_0,$$

где билинейная форма $b(\cdot, \cdot)$ определяется следующим образом:

$$b(u, v) = u_{,11}v_{,11} + u_{,22}v_{,22} + ku_{,11}v_{,22} + ku_{,22}v_{,11} + 2(1-k)u_{,12}v_{,12}.$$

Определим выпуклое замкнутое множество

$$K_0(\Omega_0) = \{\chi \in H(\Omega_0) \mid [W^t]\nu_0 \geq |[(\nabla w)^t \nu_0]| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0\}.$$

Тогда вариационная задача формулируется как задача минимизации функционала энергии на множестве допустимых смещений, а именно, требуется найти такую функцию $\chi_0 \in K_0(\Omega_0)$, что

$$\Pi(\Omega_0; \chi_0) = \inf_{\chi \in K_0(\Omega_0)} \Pi(\Omega_0; \chi). \tag{8}$$

Известно, что задача (8) имеет единственное решение, которое удовлетворяет вариационному неравенству [3]

$$\int\limits_{\Omega_0} \sigma_{ij}(W_0)\varepsilon_{ij}(W - W_0)\, d\Omega_0 + \int\limits_{\Omega_0} b(w_0, w - w_0)\, d\Omega_0 \geq \int\limits_{\Omega_0} f^t(\chi - \chi_0)\, d\Omega_0 \ \forall \chi \in K_0(\Omega_0). \tag{9}$$

Определим возмущенную область. Для малого параметра $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ рассмотрим возмущение $\Phi_\varepsilon = \big(\Phi_\varepsilon^1(x), \Phi_\varepsilon^2(x)\big)$, которое задается функциями $\Phi^i \in C^1\big(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$ и $\Phi_0(x) = x$.

Зафиксируем ε и применим координатное преобразование

$$y = \Phi_\varepsilon(x) \tag{10}$$

для $x \in \Omega_0$, $x \in \partial\Omega$ и $x \in \Gamma_0$. В результате получим возмущенную область $\Phi_\varepsilon(\Omega)$ и возмущенный разрез $\Gamma_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Gamma_0)$. Определим возмущенную область с разрезом как $\Omega_\varepsilon = \Phi_\varepsilon(\Omega) \setminus \overline{\Gamma}_\varepsilon$.

Будем считать, что для обратного преобразования $x = \Phi_\varepsilon^{-1}(y)$, где $\Phi_\varepsilon^{-1} = \big(\Phi_{\varepsilon 1}^{-1}, \Phi_{\varepsilon 2}^{-1}\big)$, имеют место включения $\Phi_i^{-1} \in C^1\big(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{2,\infty}_{\text{loc}}(\mathbb{R}^2)\big)$.

Предположение 2. *Для каждого* $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ *набор* $\{\Phi_\varepsilon(\Omega), \Phi_\varepsilon(\partial\Omega), \Gamma_\varepsilon\}$ *удовлетворяет условиям предположения* 1.

Аналогично пространству $H(\Omega_0)$ определим пространство $H(\Omega_\varepsilon)$. Согласно взаимной однозначности преобразования (10), строгой положительности его якобиана (будет показано ниже) и предполагаемой гладкости Φ_ε, отображение (10) также задает взаимно однозначное соответствие между пространствами $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$, т. е. если $\chi(x) \in H(\Omega_0)$, то $\chi\big(\Phi_\varepsilon^{-1}(y)\big) \in H(\Omega_\varepsilon)$ и, обратно, если $\chi(y) \in H(\Omega_\varepsilon)$, то $\chi(\Phi_\varepsilon(x)) \in H(\Omega_0)$.

Пусть ν^ε — единичный вектор нормали к возмущенному разрезу Γ_ε. Определим множество допустимых смещений срединной поверхности для возмущенной задачи:

$$K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon) = \{\chi \in H(\Omega_\varepsilon) \mid [W^t]\nu^\varepsilon \geq |[(\nabla w)^t \nu^\varepsilon]| \quad \text{п. в. на } \Gamma_\varepsilon\}.$$

Важно отметить, что, в то время как между пространствами $H(\Omega_0)$ и $H(\Omega_\varepsilon)$ есть взаимно однозначное соответствие при действии отображения (10), множество допустимых смещений $K_0(\Omega_0)$ в общем случае не переходит в множество допустимых смещений $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$. Даже для прямолинейного разреза такого соответствия нет [24]. Это связано, во-первых, с тем, что единичная нормаль ν_0 к Γ_0 не переходит в единичную нормаль ν^ε к Γ_ε, а во-вторых, условие непроникания содержит оператор градиента, который меняет свой вид при действии преобразования координат (10).

Сформулируем теперь в возмущенной области Ω_ε задачу минимизации функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon;\chi)$ на множестве допустимых смещений $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$: найти такую функцию $\chi^\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$, что

$$\Pi(\Omega_\varepsilon;\chi^\varepsilon) = \inf_{\chi\in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)} \Pi(\Omega_\varepsilon;\chi), \tag{11}$$

где

$$\Pi(\Omega_\varepsilon;\chi) = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)\,d\Omega_\varepsilon + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_\varepsilon} b(w,w)\,d\Omega_\varepsilon - \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f^t\chi\,d\Omega_\varepsilon.$$

Задача (11) имеет единственное решение, для которого справедливо вариационное неравенство [3]

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} \sigma_{ij}(W^\varepsilon)\varepsilon_{ij}(W-W^\varepsilon)\,d\Omega_\varepsilon + \int\limits_{\Omega_\varepsilon} b(w^\varepsilon, w-w^\varepsilon)\,d\Omega_\varepsilon \geq \int\limits_{\Omega_\varepsilon} f^t(\chi-\chi^\varepsilon)\,d\Omega_0 \ \forall \chi \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon). \tag{12}$$

3. Вспомогательные утверждения и формулы. Введем обозначение для функциональной матрицы преобразования (10):

$$\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x} = \begin{pmatrix} \Phi^1_{\varepsilon,1} & \Phi^2_{\varepsilon,1} \\ \Phi^1_{\varepsilon,2} & \Phi^2_{\varepsilon,2} \end{pmatrix}.$$

Определим следующие векторы, соответствующие частным производным первого и второго порядков:

$$\frac{\partial}{\partial x} = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}\right)^t, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \left(\frac{\partial^2}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2}, \frac{\partial^2}{\partial x_2^2}\right)^t.$$

Аналогично задаются векторы $\frac{\partial}{\partial y}$ и $\frac{\partial^2}{\partial y^2}$. Определим функциональные матрицы

$$A = \begin{pmatrix} \Phi^1_{\varepsilon,11} & \Phi^2_{\varepsilon,11} \\ \Phi^1_{\varepsilon,12} & \Phi^2_{\varepsilon,12} \\ \Phi^1_{\varepsilon,22} & \Phi^2_{\varepsilon,22} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial^2\Phi_\varepsilon}{\partial x^2} = \begin{pmatrix} (\Phi^1_{\varepsilon,1})^2 & 2\Phi^1_{\varepsilon,1}\Phi^2_{\varepsilon,1} & (\Phi^2_{\varepsilon,1})^2 \\ \Phi^1_{\varepsilon,1}\Phi^1_{\varepsilon,2} & \Phi^1_{\varepsilon,1}\Phi^2_{\varepsilon,2} + \Phi^1_{\varepsilon,2}\Phi^2_{\varepsilon,1} & \Phi^2_{\varepsilon,1}\Phi^2_{\varepsilon,2} \\ (\Phi^1_{\varepsilon,2})^2 & 2\Phi^1_{\varepsilon,2}\Phi^2_{\varepsilon,2} & (\Phi^2_{\varepsilon,2})^2 \end{pmatrix}.$$

Используя введенные выше обозначения, можно преобразование производных записать в матричном виде

$$\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\frac{\partial}{\partial y}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x^2} = \frac{\partial^2\Phi_\varepsilon}{\partial x^2}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A\frac{\partial}{\partial y}. \tag{13}$$

В силу гладкости Φ_ε имеет место разложение по ε

$$\Phi_\varepsilon(x) = x + \varepsilon V(x) + r_1(\varepsilon, x) \quad \text{в } \mathbb{R}^2, \tag{14}$$

где $V = (V_1, V_2) = \frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial\varepsilon}\big|_{\varepsilon=0}$, $r_1(\varepsilon,x) \in C\left(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; \left[W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\right]^2\right)$, и при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{r_1(\varepsilon,x)}{\varepsilon} \to 0 \quad \text{сильно в } \left[W^{2,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\right]^2.$$

Из (14) следует, что якобиан $J_\varepsilon(x)$ преобразования (10) допускает представление

$$J_\varepsilon(x) \equiv \left|\frac{\partial\Phi_\varepsilon}{\partial x}\right| = 1 + \varepsilon \operatorname{div} V + r_2(\varepsilon, x) \quad \text{в } \mathbb{R}^2,$$

где $r_2 \in C\big(-\varepsilon_0, \varepsilon_0; W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)\big)$, и при $\varepsilon \to 0$

$$\frac{r_2(\varepsilon, x)}{\varepsilon} \to 0 \quad \text{сильно в } W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2).$$

Видно, что для малых ε якобиан $J_\varepsilon(x)$ строго положителен.

В свою очередь, функциональные матрицы $\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x}$, A и $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}$ допускают представление

$$\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x} = I + \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + r_3(\varepsilon, x), \quad \|r_3(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]^4} = o(\varepsilon),$$

$$A = \varepsilon \begin{pmatrix} V_{1,11} & V_{2,11} \\ V_{1,12} & V_{2,12} \\ V_{1,22} & V_{2,22} \end{pmatrix} + r_4(\varepsilon, x), \quad \|r_4(\varepsilon, x)\|_{[L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]^6} = o(\varepsilon),$$

$$\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} = I + \varepsilon \begin{pmatrix} 2V_{1,1} & 2V_{2,1} & 0 \\ V_{1,2} & V_{1,1} + V_{2,2} & V_{2,1} \\ 0 & 2V_{1,2} & 2V_{2,2} \end{pmatrix} + r_5(\varepsilon, x), \ \|r_5(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]^9} = o(\varepsilon) \tag{15}$$

п. в. в Ω_0; I — единичная матрица. Определитель матрицы $\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}$ может быть разложен по ε:

$$j_\varepsilon(x) = \left| \frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2} \right| = 1 + 3\varepsilon \operatorname{div} V(x) + r_6(\varepsilon, x), \quad \|r_6(\varepsilon, x)\|_{L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)} = o(\varepsilon) \quad \text{п. в. в } \Omega_0.$$

Для достаточно малых ε определитель $j_\varepsilon(x)$ строго положителен, следовательно, существует обратная функциональная матрица $\psi = \big(\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}\big)^{-1}$. В силу (13) и того, что $J_\varepsilon(x) > 0$, $j_\varepsilon(x) > 0$, мы можем выписать обратное преобразование производных в следующем матричном виде:

$$\frac{\partial}{\partial y} = \Psi \frac{\partial}{\partial x}, \quad \frac{\partial^2}{\partial y^2} = \psi \frac{\partial^2}{\partial x^2} + a \frac{\partial}{\partial x}, \tag{16}$$

где $\Psi = \big(\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x}\big)^{-1}$, $a = -\big(\frac{\partial^2 \Phi_\varepsilon}{\partial x^2}\big)^{-1} A \big(\frac{\partial \Phi_\varepsilon}{\partial x}\big)^{-1}$. Ввиду формул (15) справедливо разложение по ε матриц Ψ, a и ψ:

$$\begin{gathered} \Psi = I - \varepsilon \frac{\partial V}{\partial x} + r_7(\varepsilon, x), \quad \|r_7(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]} = o(\varepsilon), \\ a = -\varepsilon \bar{a}(V) + r_8(\varepsilon, x), \quad \|r_8(\varepsilon, x)\|_{[L^\infty_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]^6} = o(\varepsilon), \\ \psi = I - \varepsilon \bar{\psi}(V) + r_9(\varepsilon, x), \quad \|r_9(\varepsilon, x)\|_{[W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]^9} = o(\varepsilon) \end{gathered} \tag{17}$$

п. в. в Ω_0, где

$$\bar{a}(V) = \begin{pmatrix} V_{1,11} & V_{2,11} \\ V_{1,12} & V_{2,12} \\ V_{1,22} & V_{2,22} \end{pmatrix}, \quad \bar{\psi}(V) = \begin{pmatrix} 2V_{1,1} & 2V_{2,1} & 0 \\ V_{1,2} & V_{1,1} + V_{2,2} & V_{2,1} \\ 0 & 2V_{1,2} & 2V_{2,2} \end{pmatrix}.$$

Определим невырожденную постоянную матрицу

$$K = \begin{pmatrix} 1 & 0 & k \\ 0 & 2(1-k) & 0 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда билинейную форму $b(u,v)$ можно переписать в матричном виде

$$b(u,v) = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^t K \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}.$$

Применяя обратное преобразование к области Ω_ε, получим, что разрез Γ_ε перейдет в разрез Γ_0, при этом вектор нормали ν^ε перейдет в новый вектор ν_ε, определенный на Γ_0, который, вообще говоря, не совпадает с вектором нормали ν_0 к Γ_0.

При этом множество $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ перейдет взаимно однозначно в новое множество, которое будем обозначать через $K_\varepsilon(\Omega_0)$,

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{\chi \in H(\Omega_0) \mid [W^t]\nu_\varepsilon \geq |[(\nabla w)^t \Psi^t \nu_\varepsilon]| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0\}.$$

Применим координатное преобразование (10) к функциям и интегралам, входящим в вариационное неравенство (12). Получим следующее вариационное неравенство:

$$\int_{\Omega_0} J_\varepsilon c_{ijkl} E_{kl}(\Psi; W_\varepsilon) E_{ij}(\Psi; W - W_\varepsilon)\, d\Omega_0$$
$$+ \int_{\Omega_0} J_\varepsilon \left(\psi \frac{\partial^2 w_\varepsilon}{\partial x^2} + a\frac{\partial w_\varepsilon}{\partial x}\right)^t K \left(\psi \frac{\partial^2 (w - w_\varepsilon)}{\partial x^2} + a \frac{\partial (w - w_\varepsilon)}{\partial x}\right) d\Omega_0$$
$$\geq \int_{\Omega_0} J_\varepsilon f_\varepsilon^t (\chi - \chi_\varepsilon)\, d\Omega_0 \quad \forall \chi \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad (18)$$

где $\chi_\varepsilon(x) = \chi^\varepsilon(\Phi_\varepsilon(x))$, т. е. функция $\chi_\varepsilon(x) \in K_\varepsilon(\Omega_0)$, записанная в невозмущенных координатах, является решением $\chi^\varepsilon(y) \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ возмущенной задачи (11). Аналогично для f имеем $f_\varepsilon(x) = f(\Phi_\varepsilon(x))$, $x \in \Omega_0$; $E_{ij}(\Psi; W)$ — трансформированный тензор деформаций,

$$E_{ij}(\Psi; W) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u_i}{\partial x_k}\Psi_{kj} + \frac{\partial u_j}{\partial x_k}\Psi_{ki}\right).$$

Здесь $\{c_{ijkl}\}$ — тензор коэффициентов упругости такой, что $c_{1111} = c_{2222} = 1$, $c_{1122} = c_{2211} = k$, $c_{1212} = c_{1221} = c_{2112} = c_{2121} = 1/2(1-k)$, а остальные коэффициенты равны нулю.

Таким образом, справедлива следующая

Теорема 1. *При достаточно малых ε решение $\chi^\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ возмущенной задачи* (12), *отображенное на исходную область Ω_0 с помощью обратного преобразования к* (10), *является единственным решением $\chi_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ вариационного неравенства* (18).

Подставим полученные выше разложения в (18). В результате получим

$$\int_{\Omega_0} J_\varepsilon c_{ijkl} E_{kl}(\Psi; U) E_{ij}(\Psi; W)\, d\Omega_0$$
$$= \int_{\Omega_0} (\sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W) + \varepsilon A_1(V; U, W))\, d\Omega_0 + o(\varepsilon) R_1(U, W), \quad (19)$$

$$\int\limits_{\Omega_0} J_\varepsilon \left(\psi \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + a\frac{\partial u}{\partial x}\right)^t K \left(\psi \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + a\frac{\partial v}{\partial x}\right) d\Omega_0$$
$$= \int\limits_{\Omega_0} (b(u,v) + \varepsilon A_2(V;u,v))\, d\Omega_0 + o(\varepsilon) R_2(u,v), \quad (20)$$

$$\int\limits_{\Omega_0} J_\varepsilon (f^\varepsilon)^t \chi \, d\Omega_0 = \int\limits_{\Omega_0} (f^t\chi + \varepsilon \operatorname{div}(Vf_i)w_i + \varepsilon \operatorname{div}(Vf_3)w)\, d\Omega_0 + o(\varepsilon)R_3(\chi), \quad (21)$$

где

$$A_1(V;U,W) = \operatorname{div} V \sigma_{ij}(U)\varepsilon_{ij}(W) - \sigma_{ij}(U)E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; W\right) - \sigma_{ij}(W)E_{ij}\left(\frac{\partial V}{\partial x}; U\right), \quad (22)$$

$$A_2(V;u,v) = b(u,v)\operatorname{div} V - \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^t \left(K\bar{\psi}(V) + \bar{\psi}^t(V)K\right)\frac{\partial^2 v}{\partial x^2}$$
$$- \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)^t K\bar{a}(V)\frac{\partial v}{\partial x} - \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^t \bar{a}^t(V)K\frac{\partial^2 v}{\partial x^2},$$

а R_1, R_2, R_3 — некоторые ограниченные полилинейные формы.

Подставим в неравенство (18) тестовые функции $\chi = 0$ и $\chi = 2\chi_\varepsilon$. Используя формулы (19)–(22), получим равномерную по ε оценку

$$\|\chi_\varepsilon\|_{H(\Omega_0)} \le c. \quad (23)$$

Рассмотрим разрез Γ_0. При действии преобразования (10) Γ_0 перейдет в кривую Γ_ε, которая будет задаваться уравнением

$$\overline{\Upsilon}(y) = \Upsilon\big(\Phi_\varepsilon^{-1}(y)\big) = 0, \quad y \in \Gamma_\varepsilon.$$

При этом единичную нормаль ν^ε к Γ_ε можно определить по формуле

$$\nu^\varepsilon = \frac{\nabla_y \overline{\Upsilon}}{|\nabla_y \overline{\Upsilon}|}.$$

Используя формулу (16), получим, что преобразованный вектор ν_ε единичной нормали ν^ε, определенный уже на Γ_0, будет иметь вид

$$\nu_\varepsilon = \frac{\Psi \nabla_x \Upsilon}{|\Psi \nabla_x \Upsilon|}.$$

В силу того, что отображение (10) невырожденное, его якобиан отличен от нуля, кривая Γ_0 регулярная, имеем $|\nabla_x \Upsilon| \neq 0$ и $|\Psi\nabla_x\Upsilon| \neq 0$. Кроме того, $\nabla_x\Upsilon = \nu_0|\nabla_x\Upsilon|$, и поэтому множество $K_\varepsilon(\Omega_0)$ можно определить в эквивалентном виде:

$$K_\varepsilon(\Omega_0) = \{\chi \in H(\Omega_0) \mid [W^t]\Psi\nu_0 \ge |[(\nabla w)^t \Psi^t \Psi \nu_0]| \text{ п. в. на } \Gamma_0\}.$$

Рассмотрим теперь произвольную функцию $\chi = (W, w)$, принадлежащую множеству $K_\varepsilon(\Omega_0)$. Она удовлетворяют условию

$$[W^t]\Psi\nu_0 \ge |[(\nabla w)^t \Psi^t \Psi \nu_0]| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0. \quad (24)$$

Подставим разложение (17) матрицы Ψ в (24). В результате получим

$$[W^t]\nu_0 - \varepsilon[W^t]\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0 \\ \geq \left|\left[(\nabla w)^t\nu_0 - \varepsilon(\nabla w)^t\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0\right]\right| \quad (25)$$

п. в. на Γ_0, где

$$r_{10}(\varepsilon) = \varepsilon^2\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t\frac{\partial V}{\partial x} - \varepsilon(r_7(\varepsilon))^t\frac{\partial V}{\partial x} - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t r_7(\varepsilon) + r_7(\varepsilon) + (r_7(\varepsilon))^t + (r_7(\varepsilon))^t r_7(\varepsilon),$$

$$\|r_{10}(\varepsilon)\|_{[W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)]^4} = o(\varepsilon).$$

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 1. *Пусть* $\chi_0 \in K_0(\Omega_0)$ *— решение невозмущенной задачи* (9), $\chi_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ *— решение задачи* (18). *Тогда существуют функции* λ^1_ε *и* λ^2_ε *такие, что*

$$\left\|\lambda^i_\varepsilon\right\|_{H(\Omega_0)} \leq c, \quad i = 1, 2, \tag{26}$$

где c *не зависит от* ε. *При этом справедливы следующие включения:*

$$\chi^1_\varepsilon = \chi_0 + \varepsilon\lambda^1_\varepsilon \in K_\varepsilon(\Omega_0), \quad \chi^2_\varepsilon = \chi_\varepsilon - \varepsilon\lambda^2_\varepsilon \in K_0(\Omega_0).$$

Доказательство. Для того чтобы построить последовательность λ^1_ε, рассмотрим в Ω_0 матричное уравнение

$$U^t B_1 = b^t_1, \tag{27}$$

$$B_1 = I - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right), \quad b^t_1 = W^t_0\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right),$$

где $\chi_0 = (W_0, w_0)^t$ — решение невозмущенной задачи (8).

Элементы матрицы B_1 принадлежат пространству $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, а вектор b_1 — пространству $H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$. Кроме того, для всех достаточно малых ε определитель $|B_1|$ матрицы B_1 отличен от нуля в Ω_0. Следовательно, уравнение (27) имеет единственное решение для почти всех $x \in \Omega_0$. Пусть U^1_ε является решением данного уравнения. Покажем, что $U^1_\varepsilon \in H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$. Действительно, элементы матрицы B_1 принадлежат $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, поэтому они принадлежат пространству $C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ [32]. Отсюда следует, что $|B_1| \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Из того, что $|B_1|(x)$ не обращается в нуль при всех $x \in \Omega_0$, заключаем, что $1/|B_1| \in C^{0,1}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$, поэтому $1/|B_1| \in W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$ [32]. Следовательно, элементы обратной матрицы B^{-1}_1 принадлежат пространству $W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$. Вектор-функция b_1 из пространства $H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$, поэтому решение U^1_ε системы (27) тоже будет из $H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0)$.

Далее, функция w_0 нормальных прогибов срединной поверхности невозмущенной пластины принадлежит пространству $H^{2,0}(\Omega_0)$. Следовательно, справедливы следующие включения:

$$w^\pm_0 \in H^{3/2}(\Gamma_0), \quad (\nabla w_0)^\pm \in \{H^{1/2}(\Gamma_0)\}^2, \quad [w_0] \in H^{3/2}_{00}(\Gamma_0), \quad [\nabla w_0] \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_0).$$

Последнее включение означает, что для любой гладкой замкнутой кривой Σ, лежащей целиком в Ω и содержащей Γ_0, функция $[\nabla w_0]$, продолженная нулем на $\overline{\Sigma}\backslash\Gamma_0$, принадлежит пространству $H^{1/2}(\Sigma)$. В силу того, что $\frac{\partial V}{\partial x}$, $r_{10} \in \left[W^{1,\infty}_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)\right]^4$, имеем

$$\begin{aligned} b_2^t &= (\nabla w_0)^t\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \in \left\{H^{1/2}\left(\Gamma_0^{\pm}\right)\right\}^2, \\ \left[b_2^t\right] &= ([\nabla w_0])^t\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \in \left\{H^{1/2}_{00}(\Gamma_0)\right\}^2. \end{aligned} \tag{28}$$

Теперь на берегах Γ_0^+ и Γ_0^- разреза Γ_0 рассмотрим матричные уравнения

$$(U^{\pm})^t B_2 = b_2^t, \tag{29}$$

$$B_2 = \left(I - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right).$$

Очевидно, что для достаточно малых ε существуют единственные решения уравнения (29). Обозначим их через U_ε^+ и U_ε^-. Проводя для уравнений (29) рассуждения такие же, как и для (27), в силу (28) и гладкости нормали ν_0, придем к выводу, что справедливы включения

$$\left(U_\varepsilon^{\pm}\right)^t\nu_0 \in H^{1/2}\left(\Gamma_0^{\pm}\right), \quad \left(U_\varepsilon^+ - U_\varepsilon^-\right)^t\nu_0 \in H^{1/2}_{00}(\Gamma_0).$$

Следовательно, существует [3] такая функция $p_\varepsilon^1 \in H^{2,0}(\Omega_0)$, что

$$p_\varepsilon^1 = w_0^{\pm}, \quad \left(\nabla p_\varepsilon^1\right)^t\nu_0 = \left(U_\varepsilon^{\pm}\right)^t\nu_0 \quad \text{п. в. на } \Gamma_0^{\pm}.$$

В этом случае говорят, что существует оператор поднятия, строящий продолжение функций, определенных на границе, в область Ω_0. Такой оператор поднятия определяется неоднозначно, но известно, что он линейный и ограниченный [3, 33].

Из (29) следует, что для функции p_ε^1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} \left[\nabla p_\varepsilon^1\right]&\left(I - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right)\nu_0 \\ &= ([\nabla w_0])^t\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0. \end{aligned} \tag{30}$$

Положим $\lambda_\varepsilon^1 = \left(U_\varepsilon^1, p_\varepsilon^1\right)$ и покажем, что $\chi_\varepsilon^1 = \left(W_\varepsilon^1, w_\varepsilon^1\right) = \chi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1$ принадлежит множеству $K_\varepsilon(\Omega_0)$. Для этого достаточно проверить, что χ_ε^1 удовлетворяет условию (25). Учитывая, что U_ε^1 является решением уравнения (27), ∇p_ε^1 на $\Gamma_0^{\pm}$ удовлетворяет (28), а функция $\chi_0 = (W_0, w_0)$ принадлежит множеству $K_0(\Omega_0)$, будем иметь следующую цепочку равенств и неравенств:

$$\begin{aligned} &\left[\left(W_\varepsilon^1\right)^t\right]\nu_0 - \varepsilon\left[\left(W_\varepsilon^1\right)^t\right]\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{r_7)(\varepsilon}{\varepsilon}\right)\nu_0 \\ &= \left[W_0^t\right]\nu_0 + \varepsilon\left[\left(U_\varepsilon^1\right)^t\right]\nu_0 - \varepsilon\left[W_0^t\right]\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0 - \varepsilon^2\left[\left(U_\varepsilon^1\right)^t\right]\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0 \\ &= \left[W_0^t\right]\nu_0 + \varepsilon\left[\left(U_\varepsilon^1\right)^t\right]\left(I - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right) - \varepsilon^2\left[W_0^t\right]\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right) \end{aligned}$$

$$\equiv \big[W_0^t\big]\nu_0 \geq \big|\big[(\nabla w_0)^t \nu_0\big]\big|$$

$$\equiv \left|([\nabla w_0])^t \nu_0 + \varepsilon\big(\big[\nabla p_\varepsilon^1\big]\big)^t \left(I - \varepsilon\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\right)\nu_0 \right.$$

$$\left. - ([\nabla w_0])^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0\right|$$

$$\equiv \left|\big(\big[\nabla\big(w_0^t + \varepsilon p_\varepsilon^1\big)\big]\big)^t \nu_0 - \varepsilon\big(\big[\nabla\big(w_0 + \varepsilon p_\varepsilon^1\big)\big]\big)^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0\right|$$

$$= \left|\big[\big(\nabla w_\varepsilon^1\big)^t\big]\nu_0 - \varepsilon\big[\big(\nabla w_\varepsilon^1\big)^t\big]\left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0\right|.$$

Это значит, что $\chi_\varepsilon^1 = \chi_0 + \varepsilon\lambda_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ для всех достаточно малых ε.

Построим теперь последовательность λ_ε^2. Рассмотрим следующие функции:

$$\psi_\varepsilon^\pm = (\nabla w_\varepsilon)^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right),$$

определенные на $\Gamma_0^\pm$ соответственно.

Третья компонента w_ε вектор-функции χ_ε — решения задачи (18) — принадлежит пространству $H^{2,0}(\Omega_0)$. Поэтому справедливы следующие включения:

$$w_\varepsilon^\pm \in H^{3/2}(\Gamma_0),\ (\nabla w_\varepsilon)^\pm \in \{H^{1/2}(\Gamma_0)\}^2,\ [w_\varepsilon] \in H_{00}^{3/2}(\Gamma_0),\ [\nabla w_\varepsilon] \in \big\{H_{00}^{1/2}(\Gamma_0)\big\}^2.$$

В силу гладкости V и нормали ν_0 имеют место следующие включения:

$$\psi_\varepsilon^\pm \nu_0 \in H^{1/2}(\Gamma_0), \quad (\psi^+ - \psi^-)\nu_0 \in H_{00}^{1/2}(\Gamma_0).$$

Тогда существует $p_\varepsilon^2 \in H^{2,0}(\Omega_0)$ такая, что

$$\big(p_\varepsilon^2\big)^\pm = w_\varepsilon^\pm, \quad \big(\nabla p_\varepsilon^2\big)^\pm \nu_0 = (\nabla w_\varepsilon)^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0 \tag{31}$$

п. в. на $\Gamma_0^\pm$.

Положим $\lambda_\varepsilon^2 = \big(U_\varepsilon^2, p_\varepsilon^2\big)$, где

$$\big(U_\varepsilon^2\big)^t = W_\varepsilon^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right). \tag{32}$$

Покажем, что функция $\chi_\varepsilon^2 = \chi_\varepsilon - \varepsilon\lambda_\varepsilon^2$ принадлежит $K_0(\Omega_0)$. Очевидно, что $\chi_\varepsilon^2 = \big(W_\varepsilon^2, w_\varepsilon^2\big) \in H(\Omega_0)$, поэтому достаточно проверить условие на Γ_0:

$$\big[W_\varepsilon^{2t}\big]\nu_0 \geq \big|\big[\big(\nabla w_\varepsilon^2\big)^t \nu_0\big]\big| \quad \text{п. в. на} \quad \Gamma_0.$$

Имеем

$$\big[W_\varepsilon^{2t}\big]\nu_0 = \big[W_\varepsilon^t\big]\nu_0 - \varepsilon\big[U_\varepsilon^{2t}\big]\nu_0 = \big[W_\varepsilon^t\big]\nu_0 - \varepsilon\big[W_\varepsilon^t\big]\left(\frac{\partial V}{\partial x} - \frac{r_7(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0$$

$$\geq \left|\left[(\nabla w_\varepsilon)^t \nu_0 - \varepsilon(\nabla w_\varepsilon)^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t + \frac{r_{10}(\varepsilon)}{\varepsilon}\right)\nu_0\right]\right|$$

$$= \big|\big[(\nabla w_\varepsilon)^t \nu_0 - \varepsilon\big(\nabla p_\varepsilon^2\big)^t \nu_0\big]\big| = \big|\big[\big(\nabla w_\varepsilon^2\big)^t \nu_0\big]\big| \quad \text{п. в. на } \Gamma_0,$$

откуда вытекает, что $\chi_\varepsilon^2 = \chi_\varepsilon - \varepsilon\lambda_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0)$.

Оценки (26) следуют из неравенства (23) и непрерывности линейного оператора поднятия. Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть χ_ε — решение задачи* (18), χ_0 — *решение задачи* (9). *Тогда*

$$\|\chi_\varepsilon - \chi_0\|_{H(\Omega_0)} \le c\varepsilon, \tag{33}$$

где константа c не зависит от ε.

Доказательство. В силу леммы 1 мы можем подставить функции $\chi_\varepsilon^2 \in K_0(\Omega_0)$ и $\chi_\varepsilon^1 \in K_\varepsilon(\Omega_0)$ в вариационные неравенства (9) и (18) соответственно в качестве пробных. После сложения полученных неравенств, использования разложений (19)–(22) и применения неравенства Корна [34] получим оценку (33). Теорема доказана.

Лемма 2. *Существует вектор-функция $\lambda_0 = (\widetilde{W}_0, \widetilde{w}_0) \in H(\Omega_0)$ такая, что*

$$\lambda_\varepsilon^1 \to \lambda_0 \text{ сильно в } H(\Omega_0), \quad \lambda_\varepsilon^2 \to \lambda_0 \text{ сильно в } H(\Omega_0).$$

При этом на разрезе Γ_0 вектор-функция λ_0 удовлетворяет следующим условиям:

$$\begin{gathered}\widetilde{W}_0 = \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t W_0 \quad \text{п. в. на } \Gamma_0^\pm,\\ (\nabla \widetilde{w}_0)^t \nu_0 = (\nabla w_0)^t \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t\right)\nu_0 \quad \text{п. в. на } \Gamma_0^\pm.\end{gathered} \tag{34}$$

Доказательство. Рассмотрим построенные в лемме 1 функции U_ε^1 и U_ε^2. В силу сильной сходимости (33) можно перейти к пределу в (27) и (32) при $\varepsilon \to 0$. Тогда получим, что при $\varepsilon \to 0$

$$U_\varepsilon^1 \to \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t W_0 \quad \text{в } H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0),$$

$$U_\varepsilon^2 \to \left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t W_0 \quad \text{в } H^{1,0}(\Omega_0) \times H^{1,0}(\Omega_0).$$

Затем рассмотрим построенные в лемме 1 последовательности p_ε^1 и p_ε^2. Ввиду сильной сходимости невозмущенной последовательности решений χ_ε к решению χ_0 и непрерывности вложения пространства $H^{2,0}(\Omega)$ в $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0^\pm) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^\pm)$ получаем, что следы p_ε^1 и p_ε^2 сходятся сильно к w_0 в $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0^\pm)$, а $(\nabla p_\varepsilon^1)\nu_0$ и $(\nabla p_\varepsilon^2)\nu_0$ — к $(\nabla w_0)^t\big(\frac{\partial V}{\partial x} + \big(\frac{\partial V}{\partial x}\big)^t\big)\nu_0$ в $H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^\pm)$ (следует из (29) и (31)).

Далее, так как оператор поднятия, действующий из $H^{\frac{3}{2}}(\Gamma_0^\pm \cup \partial\Omega) \times H^{\frac{1}{2}}(\Gamma_0^\pm \cup \partial\Omega)$ в $H^{2,0}(\Omega_0)$, линеен и непрерывен, последовательности p_ε^1 и p_ε^2 сходятся в $H^{2,0}(\Omega_0)$ и при $\varepsilon \to 0$

$$\left\|p_\varepsilon^1 - p_\varepsilon^2\right\|_{H(\Omega_0)} \to 0.$$

Значит, последовательности λ_ε^1 и λ_ε^2 сходятся к одному и тому же пределу λ_0, для которого справедливы равенства (34). Теорема доказана.

4. Производная функционала энергии. Введем обозначение

$$\alpha(\varepsilon) = \frac{\Pi(\Omega_\varepsilon; \chi^\varepsilon) - \Pi(\Omega_0; \chi_0)}{\varepsilon},$$

где χ_0 и χ^ε — решения задач (9) и (11) соответственно. Цель этого пункта — вычислить предел функции $\alpha(\varepsilon)$ при $\varepsilon \to 0$, который определяет производную функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon; \chi^\varepsilon)$ по параметру возмущения области.

Рассмотрим функционал $\Pi(\Omega_\varepsilon;\chi)$ потенциальной энергии тела, занимающего возмущенную область Ω_ε. Применим преобразование координат (10) к интегралам, входящим в $\Pi(\Omega_\varepsilon;\chi)$. В результате получим новый функционал $\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi)$, который, используя формулы (19)–(22), можно записать в виде

$$\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi)=\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}\sigma_{ij}(W)\varepsilon_{ij}(W)\,d\Omega_0+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}b(w,w)\,d\Omega_0-\int\limits_{\Omega_0}f^t\chi\,d\Omega_0$$
$$+\frac{1}{2}\varepsilon\int\limits_{\Omega_0}(A_1(V;W,W)+A_2(V;w,w))\,d\Omega_0$$
$$-\varepsilon\int\limits_{\Omega_0}(\operatorname{div}(Vf_i)w_i+\operatorname{div}(Vf_3)w_3)\,d\Omega_0+o(\varepsilon)R_4(\chi),$$

где R_4 — некоторая ограниченная форма. Так как множество $K_\varepsilon(\Omega_\varepsilon)$ отображается на $K_\varepsilon(\Omega_0)$ взаимно однозначно, имеем

$$\Pi(\Omega_\varepsilon;\chi^\varepsilon)=\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi_\varepsilon) \tag{35}$$

для всех достаточно малых $\varepsilon>0$.

Итак, в силу (35) и леммы 1

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\chi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\chi_0)}{\varepsilon}=\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\chi_0)}{\varepsilon}\le\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi_0+\varepsilon\lambda_\varepsilon^1)-\Pi(\Omega_0;\chi_0)}{\varepsilon}.$$

Отсюда следует, что выполнено неравенство

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\alpha(\varepsilon)\le\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{\Pi_\varepsilon\big(\Omega_0;\chi_0+\varepsilon\lambda_\varepsilon^1\big)-\Pi(\Omega_0;\chi_0)}{\varepsilon}. \tag{36}$$

Найдем предел, стоящий в правой части (36). В силу теоремы 2, лемм 2 и 3 и ограниченности формы R_4 получаем

$$\limsup_{\varepsilon\to0}\frac{\Pi_\varepsilon\big(\Omega_0;\chi_0+\varepsilon\lambda_\varepsilon^1\big)-\Pi(\Omega_0;\chi_0)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{\Pi_\varepsilon\big(\Omega_0;\chi_0+\varepsilon\lambda_\varepsilon^1\big)-\Pi(\Omega_0;\chi_0)}{\varepsilon}$$
$$=\int\limits_{\Omega_0}\sigma_{ij}(W_0)\varepsilon_{ij}(\widetilde{W}_0)d\Omega_0+\int\limits_{\Omega_0}b(w_0,\widetilde{w}_0)\,d\Omega_0-\int\limits_{\Omega_0}\lambda_0^tf\,d\Omega_0$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}A_1(V;W_0,W_0)\,d\Omega_0+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}A_2(V;w_0,w_0)\,d\Omega_0$$
$$-\int\limits_{\Omega_0}(\operatorname{div}(Vf_i)w_{0i}+\operatorname{div}(Vf_3)w_0)\,d\Omega_0.$$

С другой стороны, справедливы следующие соотношения:

$$\frac{\Pi(\Omega_\varepsilon;\chi^\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\chi_0)}{\varepsilon}=\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi_\varepsilon)-\Pi(\Omega_0;\chi_0)}{\varepsilon}\ge\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi_\varepsilon)-\Pi\big(\Omega_0;\chi_\varepsilon-\varepsilon\lambda_\varepsilon^2\big)}{\varepsilon},$$

поэтому выполнено неравенство

$$\liminf_{\varepsilon\to0}\alpha(\varepsilon)\ge\liminf_{\varepsilon\to0}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi_\varepsilon)-\Pi\big(\Omega_0;\chi_\varepsilon-\varepsilon\lambda_\varepsilon^2\big)}{\varepsilon}.$$

Принимая во внимание теорему 2, леммы 2 и 3 и ограниченность формы R_4, находим, что

$$\liminf_{\varepsilon\to 0}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi_\varepsilon)-\Pi\big(\Omega_0;\chi_\varepsilon-\varepsilon\lambda_\varepsilon^2\big)}{\varepsilon}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\Pi_\varepsilon(\Omega_0;\chi_\varepsilon)-\Pi\big(\Omega_0;\chi_\varepsilon-\varepsilon\lambda_\varepsilon^2\big)}{\varepsilon}$$
$$=\int\limits_{\Omega_0}\sigma_{ij}(W_0)\varepsilon_{ij}(\widetilde{W}_0)\,d\Omega_0+\int\limits_{\Omega_0}b(w_0,\widetilde{w}_0)\,d\Omega_0-\int\limits_{\Omega_0}\lambda_0^t f\,d\Omega_0$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}A_1(V;W_0,W_0)\,d\Omega_0+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}A_2(V;w_0,w_0)\,d\Omega_0$$
$$-\int\limits_{\Omega_0}(\operatorname{div}(Vf_i)w_{0i}+\operatorname{div}(Vf_3)w_0)\,d\Omega_0.$$

В силу вышесказанного справедлива

Теорема 3. *Для любого возмущения $\Phi\in C^1(-\varepsilon_0,\varepsilon_0;W^{2,\infty}(\mathbb{R}^N))$ существует первая производная функционала энергии $\Pi(\Omega_\varepsilon;\chi^\varepsilon)$ по параметру возмущения ε при $\varepsilon=0$, которая задается формулой*

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon;U^\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0}=\int\limits_{\Omega_0}\sigma_{ij}(W_0)\varepsilon_{ij}(\widetilde{W}_0)\,d\Omega_0+\int\limits_{\Omega_0}b(w_0,\widetilde{w}_0)\,d\Omega_0$$
$$-\int\limits_{\Omega_0}\lambda_0^t f\,d\Omega_0+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}A_1(V;W_0,W_0)\,d\Omega_0+\frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0}A_2(V;w_0,w_0)\,d\Omega_0$$
$$-\int\limits_{\Omega_0}(\operatorname{div}(Vf_i)w_{0i}+\operatorname{div}(Vf_3)w_0)\,d\Omega_0. \quad (37)$$

где χ_0 — решение невозмущенной задачи (8).

Замечание. В формулу (37) входит функция $\lambda_0=(\widetilde{W}_0,\widetilde{w}_0)$, которая строится неединственным способом, так как оператор поднятия неединствен. Тем не менее формула для производной функционала не зависит от функции λ_0, так как предел функции $\alpha(\varepsilon)$ существует при $\varepsilon\to 0$ и, следовательно, он может быть только единственным. Ниже покажем, что производная (37) зависит только от решения χ_0 и скорости V.

Обозначим первые три слагаемые в формуле (34) через $\Delta(\chi_0)$, т. е.

$$\Delta(\chi_0)=\int\limits_{\Omega_0}\sigma_{ij}(W_0)\varepsilon_{ij}(\widetilde{W}_0)\,d\Omega_0+\int\limits_{\Omega_0}b(w_0,\widetilde{w}_0)\,d\Omega_0-\int\limits_{\Omega_0}\lambda_0^t f\,d\Omega_0.$$

Применим обобщенную формулу Грина [3]. В результате получим

$$\Delta(\chi_0)=-\int\limits_{\Omega_0}(\sigma_{ij,j}(W_0)+f_i)\widetilde{w}_{0i}\,d\Omega_0-\big\langle\sigma_\nu(W_0),\big[\widetilde{W}_0^t\big]\nu_0\big\rangle_{\Gamma_0}-\langle\sigma_{\tau i}(W_0),[\widetilde{w}_{0\tau i}]\rangle_{\Gamma_0}$$
$$+\int\limits_{\Omega_0}(\Delta^2 w_0-f_3)\widetilde{w}_{03}\,d\Omega_0-\langle m(w_0),[(\nabla\widetilde{w}_0)^t\nu_0]\rangle_{\Gamma_0}+\langle t(w_0),[\widetilde{w}_0]\rangle_{\Gamma_0}.$$

В силу уравнений равновесия (2), (3), краевых условий (4)–(7) и леммы 2 имеем

$$\Delta(\chi_0)=-\left\langle\sigma_\nu(W_0),\big[W_0^t\big]\frac{\partial V}{\partial x}\nu_0\right\rangle_{\Gamma_0}-\left\langle m(w_0),[(\nabla w_0)^t]\left(\frac{\partial V}{\partial x}+\left(\frac{\partial V}{\partial x}\right)^t\right)\nu_0\right\rangle_{\Gamma_0}.$$

Таким образом, формулу (37) можно переписать в виде

$$\frac{d\Pi(\Omega_\varepsilon; U^\varepsilon)}{d\varepsilon}\bigg|_{\varepsilon=0} = \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} A_1(V; W_0, W_0)\, d\Omega_0 + \frac{1}{2}\int\limits_{\Omega_0} A_2(V; w_0, w_0)\, d\Omega_0$$
$$- \int\limits_{\Omega_0} (\operatorname{div}(V f_i) w_{0i} + \operatorname{div}(V f_3) w_0)\, d\Omega_0$$
$$- \left\langle \sigma_\nu(W_0), [W_0^t] \frac{\partial V}{\partial x} \nu_0 \right\rangle_{\Gamma_0} - \left\langle m(w_0), [(\nabla w_0)^t] \left(\frac{\partial V}{\partial x} + \left(\frac{\partial V}{\partial x} \right)^t \right) \nu_0 \right\rangle_{\Gamma_0}.$$

Видно, что она зависит лишь от решения невозмущенной задачи $\chi_0 = (W_0, w_0)$, скорости V и внешней силы f.

В заключение стоит отметить, что если решение задачи равновесия χ_0 таково, что берега разреза не контактируют между собой, то формула (37) совпадает с аналогичной формулой для пластины с трещиной, на берегах которой заданы классические краевые условия с $\sigma_\nu(W_0) = 0$ и $m(w_0) = 0$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Партон В. З., Морозов Е. М.* Механика упруго-пластического разрушения. М.: Наука, 1974.
2. *Черепанов Г. П.* Механика хрупкого разрушения. М.: Наука, 1974.
3. *Khludnev A. M., Kovtunenko V. A.* Analysis of cracks in solids. Southampton; Boston: WIT-Press, 2000.
4. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* Modelling and control in solid mechanics. Basel; Boston; Berlin: Birkhäuser, 1997.
5. *Кравчук А. С.* Вариационные и квазивариационные неравенства в механике. М.: МГАПИ, 1997.
6. *Kovtunenko V. A.* Shape sensitivity of a plane crack front // Math. Meth. Appl. Sci. 2003. V. 26, N 5. P. 359–374.
7. *Ohtsuka K.* Mathematics of brittle fracture // Theoretical studies on fracture mechanics in Japan. 1997. P. 99–172.
8. *Мазья В. Г., Назаров С. А.* Асимптотика интегралов энергии при малых возмущениях границы вблизи угловых и конических точек // Тр. Моск. мат. о-ва. 1987. Т. 50. С. 79–129.
9. *Баничук Н. В.* Определение формы криволинейной трещины методом малого параметра // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. 1970. № 2. С. 130–137.
10. *Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.* Плоская задача о криволинейных трещинах в упругом теле // Изв. АН СССР. Сер. Механика твердого тела. 1970. № 3. С. 69–82.
11. *Гольдштейн Р. В., Салганик Р. Л.* Хрупкое разрушение тел с произвольными трещинами // Успехи механики деформируемых сред. М.: Наука, 1975. С. 156–171.
12. *Cotterell B., Rice J. R.* Slightly curved or kinked cracks // Internat. J. Fracture. 1980. V. 16, N 2. P. 155–169.
13. *Amestoy M., Leblond J. B.* Crack paths in plane situations. II: Detailed form of the expansion of the stress intensity factors // Internat. J. Solids Structures. 1992. V. 29, N 4. P. 465–501.
14. *Leblond J. B.* Crack paths in three-dimensional elastic solids. I: Two-term expansion of the stress intensity factors – application to cracks path stability in hydraulic fracturing // Internat. J. Solids Structures. 1999. V. 36, N 1. P. 79–103.
15. *Leguillon D.* Asymptotic and numerical analysis of a crack branching in non isotropic materials // European J. Mech. A Solids. 1993. V. 12, N 1. P. 33–51.
16. *Gao H., Chiu Ch.* Slightly curved or kinked cracks in anisotropic elastic solids // Internat. J. Solids Structures. 1992. V. 29, N 8. P. 947–972.
17. *Martin P. A.* Perturbed cracks in two-dimensions: An integral-equation approach // Internat. J. Fracture. 2000. V. 104, N 4. P. 317–327.
18. *Мовчан А. Б., Назаров С. А., Полякова О. Р.* Приращение коэффициентов интенсивности напряжений при удлинении криволинейной трещины // Механика твердого тела. 1992. № 1. С. 84–93.

19. *Назаров С. А.* Коэффициенты интенсивности напряжений и условия девиации трещины в хрупком анизотропном теле // Прикл. механика и техн. физика. 2005. Т. 46, № 3. С. 98–107.

20. *Назаров С. А., Шпековиус-Нойгербауер М.* Применение энергетического критерия разрушения для определения формы слабоискривленной трещины // Прикл. механика и тех. физика. 2006. Т. 47, № 5. С. 119–130.

21. *Khludnev A. M., Sokolowski J.* The Griffith formula and the Rice–Cherepanov integral for crack problems with unilateral conditions in nonsmooth domains // Eur. J. Appl. Math. 1999. V. 10, N 4. P. 379–394.

22. *Ковтуненко В. А.* Инвариантные интегралы энергии для нелинейной задачи о трещине с возможным контактом берегов // Прикл. математика и механика. 2003. Т. 67, № 1. С. 109–123.

23. *Соколовский Я., Хлуднев А. М.* О дифференцировании функционалов энергии в теории трещин с возможным контактом берегов // Докл. РАН. 2000. Т. 374, № 6. С. 776–779.

24. *Рудой Е. М.* Формула Гриффитса для пластины с трещиной // Сиб. журн. индустр. математики. 2002. Т. 5, № 3. С. 155–161.

25. *Kovtunenko V. A.* Shape sensitivity of curvilinear cracks on interface to non-linear perturbations // Z. Angew. Math. Phys. 2003. V. 54, N 4. P. 410–423.

26. *Kovtunenko V. A.* Sensitivity of interfacial cracks to non-linear crack front perturbations // Z. Angew. Math. Mech. 2002. V. 82, N 6. P. 387–398.

27. *Khludnev A. M., Ohtsuka K., Sokolowski J.* On derivative of energy functional for elastic bodies with cracks and unilateral conditions // Quart. Appl. Math. 2002. V. 60, N 2. P. 99–109.

28. *Рудой Е. М.* Инвариантные интегралы для задачи равновесия пластины с трещиной // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 2. С. 466–477.

29. *Рудой Е. М.* Дифференцирование функционалов энергии в двумерной теории упругости для тел, содержащих криволинейные трещины // Прикл. механика и техн. физика. 2004. Т. 45, № 6. С. 83–94.

30. *Kovtunenko V. A.* Primal-dual methods of shape sensitivity analysis for curvilinear cracks with nonpenetration // IMA J. Appl. Math. 2006. V. 71, N 5. P. 635–657.

31. *Рудой Е. М.* Дифференцирование функционалов энергии в задаче о криволинейной трещине с возможным контактом берегов // Механика твердого тела. 2007. № 6. С. 113–127.

32. *Эванс Л. К., Гариепи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. Новосибирск: Научная книга, 2002.

33. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. М.: Мир, 1971.

34. *Дюво Г., Лионс Ж.-Л.* Неравенства в механике и физике. М.: Наука, 1980.

Статья поступила 13 октября 2007 г., окончательный вариант — 18 марта 2008 г.

Рудой Евгений Михайлович
Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,
пр. Академика М. А. Лаврентьева, 15, Новосибирск 630090
rem@hydro.nsc.ru