Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2009. Том 50, № 2

УДК 512.542

КВАЗИРАСПОЗНАВАЕМОСТЬ $L_{10}(2)$ ПО ГРАФУ ПРОСТЫХ ЧИСЕЛ

Б. Хосрави

Аннотация. Пусть G — конечная группа, $\Gamma(G)$ — граф простых чисел группы G. Доказано, что если G — конечная группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L_{10}(2))$, то $G/O_2(G)$ изоморфна $L_{10}(2)$. Тем самым получен первый пример конечной группы со связным графом простых чисел, являющейся квазираспознаваемой по графу простых чисел. В качестве следствия данного результата дано новое доказательство того, что простая группа $L_{10}(2)$ однозначно определяется множеством порядков ее элементов.

Ключевые слова: граф простых чисел, конечная группа, проективная специальная линейная группа.

1. Введение

Классификация конечных простых групп позволила многим исследователям ставить разнообразные задачи распознаваемости для конечных групп. Пусть G — конечная группа и Ω — множество свойств группы G. Возникает естественный вопрос о числе (с точностью до изоморфизма) конечных групп H таких, что H имеет те же самые свойства из Ω.

Для целого n обозначим через $\pi(n)$ множество всех простых делителей числа n. Пусть G — конечная группа. Множество $\pi(|G|)$ обозначается через $\pi(G)$. Множество порядков элементов группы G обозначается через $\pi_e(G)$. Ясно, что $\pi_e(G)$ замкнуто и частично упорядочено относительно делимости, поэтому оно однозначно определяется подмножеством $\mu(G)$ максимальных элементов.

Граф простых чисел группы G строится следующим образом: *граф простых чисел* $\Gamma(G)$ группы G — это граф с множеством вершин $\pi(G)$, в котором два различных простых числа p и q соединены ребром (обозначается $p \sim q$) тогда и только тогда, когда G содержит элемент порядка pq. Пусть $t(G)$ — число связных компонент графа $\Gamma(G)$, и пусть $\pi_1(G)$, $\pi_2(G)$, $\dots$, $\pi_{t(G)}(G)$ — связные компоненты графа $\Gamma(G)$. Иногда вместо $\pi_i(G)$ будет использоваться обозначение π_i. Если $2 \in \pi(G)$, то всегда предполагается, что $2 \in \pi_1$.

Понятие графа простых чисел возникло при исследовании некоторых когомологических вопросов, связанных с целочисленными представлениями конечных групп. Было показано, что для любой конечной группы G выполнено неравенство $t(G) \leq 6$ [1–3] и диаметр графа $\Gamma(G)$ не превосходит 5 (см. [4]). Хаги в [5] описал все конечные группы G, удовлетворяющие равенству $\Gamma(G) = \Gamma(S)$, где S — спорадическая простая группа. В [6, 7] описаны конечные группы, имеющие такой же граф простых чисел, как у простой CIT-группы или у $PSL(2, q)$,

Работа частично поддержана грантом IPM (N 87200022).

где $q = p^\alpha < 100$. Доказано, что если $q = 3^{2n+1}$ $(n > 0)$, то простая группа $^2G_2(q)$ однозначно определяется своим графом простых чисел [8, 9]. В [10] установлено, что если $p > 11$ — простое число и $p \not\equiv 1 \pmod{12}$, то $PSL(2,p)$ однозначно определяется своим графом простых чисел.

Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой по порядкам элементов*, если каждая конечная группа G со свойством $\pi_e(G) = \pi_e(P)$ имеет композиционный фактор, изоморфный P.

В [8] введено аналогичное понятие для графа простых чисел.

Определение 1.1 [8]. Конечная простая неабелева группа P называется *квазираспознаваемой по графу простых чисел*, если каждая конечная группа G со свойством $\Gamma(G) = \Gamma(P)$ имеет композиционный фактор, изоморфный P.

Основная теорема. *Простая группа $L_{10}(2)$ квазираспознаваема по графу простых чисел, т. е. если G — конечная группа такая, что $\Gamma(G) = \Gamma(L_{10}(2))$, то $G/O_2(G) \cong L_{10}(2)$.*

Отметим, что квазираспознаваемость по графу простых чисел влечет квазираспознаваемость по порядкам элементов, но обратное, вообще говоря, неверно. Кроме того, устанавливать квазираспознаваемость по графу простых чисел, как правило, сложнее, чем квазираспознаваемость по порядкам элементов, поскольку некоторые из методов в первом случае не работают. В [11] доказано, что простые группы $L_n(2)$ распознаваемы по порядкам элементов. В качестве следствия основной теоремы можно получить новое доказательство того, что $L_{10}(2)$ распознаваема по порядкам элементов.

Все группы в статье конечны, и под простыми группами подразумеваются неабелевы простые группы. Все дальнейшие необъясненные обозначения стандартны и могут быть найдены, например, в [12]. При доказательстве основной теоремы используется классификация конечных простых групп и результаты Вильямса [3], Ийори и Ямаки [1], А. С. Кондратьева [2] о графе простых чисел простых групп.

2. Предварительные результаты

Лемма 2.1 (теорема Жигмонди [13]). *Пусть p — простое число и n — натуральное число. Тогда выполнено одно из следующих утверждений:*

(i) *$p = 2$, $n = 1$ или 6,*

(ii) *p — простое число Мерсенна и $n = 2$,*

(iii) *существует примитивный простой делитель p' для $p^n - 1$, т. е. $p' | (p^n - 1)$, но $p' \nmid (p^m - 1)$, $(1 \leq m < n)$.*

Замечание 2.2. Пусть N — нормальная подгруппа группы G и $p \sim q$ в $\Gamma(G/N)$. Тогда $p \sim q$ в $\Gamma(G)$. Действительно, если $xN \in G/N$ имеет порядок pq, то найдется степень элемента x, которая имеет порядок pq.

Используя [14, табл. 2], получаем следующий результат.

Лемма 2.3. $\mu(L_{10}(2)) = \{16, 120, 168, 248, 252, 315, 372, 381, 420, 434, 465, 508, 510, 511, 651, 889, 1023\}$.

Лемма 2.4 [15]. *Группа $L_{n+1}(q)$, $n \geq 4$, содержит подгруппу Фробениуса с ядром порядка q^n и циклическим дополнением порядка $(q^n - 1)/(n+1, q-1)$.*

Лемма 2.5 [16]. *Пусть G — группа, N — нормальная подгруппа группы G, G/N — группа Фробениуса с ядром K и циклическим дополнением C. Если*

$(|K|, |N|) = 1$ *и* K *не лежит в* $NC_G(N)/N$, *то* $p|C| \in \pi_e(G)$ *для некоторого простого делителя* p *порядка* $|N|$.

Лемма 2.6 [3, следствие]. *Если* G *— разрешимая группа, граф простых чисел которой имеет не менее двух компонент, то* G *— группа Фробениуса или двойная группа Фробениуса и граф простых чисел группы* G *имеет в точности две компоненты, одна из которых состоит из простых делителей нижнего фробениусова дополнения.*

Как следует из леммы 2.6, если G — конечная разрешимая группа, то $t(G) \leq 2$.

Замечание 2.7. Пусть p — простое число и $(a, p) = 1$. Пусть $k \geq 1$ — наименьшее натуральное число такое, что $a^k \equiv 1 \pmod{p}$. Тогда k называется *порядком числа* a *по модулю* p и обозначается через $\mathrm{ord}_p(a)$. Очевидно, что в силу малой теоремы Ферма выполнено условие $\mathrm{ord}_p(a) \mid (p-1)$. Кроме того, если $a^n \equiv 1 \pmod{p}$, то $\mathrm{ord}_p(a) \mid n$.

Лемма 2.8 [17, лемма 1.2]. *Пусть* G *— конечная почти простая группа, т. е. существует неабелева простая группа* S *такая, что* $S \leq G \leq \mathrm{Aut}(S)$. *Пусть* p *— нечетное простое число, не смежное с* 2 *в* $\Gamma(G)$. *Тогда* p *не делит порядок группы* G/S.

Лемма 2.9 [17, теорема]. *Пусть* G *— конечная группа, удовлетворяющая следующим двум условиям:*

(a) *в* $\pi(G)$ *существуют три простых числа, попарно не смежных в* $\Gamma(G)$,

(b) *в* $\pi(G)$ *существует простое нечетное число, не смежное в* $\Gamma(G)$ *с числом* 2.

Тогда существует конечная неабелева простая группа S *такая, что* $S \leq \overline{G} = G/k \leq \mathrm{Aut}(S)$ *для максимальной нормальной разрешимой подгруппы* K *группы* G.

3. Доказательство основной теоремы

На протяжении данного пункта G — конечная группа и $\Gamma(G) = \Gamma(L_{10}(2))$. Таким образом, граф простых чисел группы G выглядит следующим образом.

Заметим, что элементы множества $\{17, 31, 73, 127\}$ попарно не смежны в $\Gamma(G)$. Отсюда непосредственно следует, что G неразрешима, поскольку если G — разрешимая группа и H — $\{17, 31, 73, 127\}$-холлова подгруппа группы G, то H разрешима и $t(\Gamma(H)) = 4$, что противоречит лемме 2.6. Пусть N — максимальная нормальная разрешимая подгруппа группы G. Очевидно, что N не равна G. Рассуждение, аналогичное предыдущему, приводит к тому, что пересечение $\pi(N) \cap \{17, 31, 73, 127\}$ имеет не более двух элементов. Если $\{p_1, p_2\} \subseteq \pi(N) \cap \{17, 31, 73, 127\}$, то аналогично предыдущему случаю возьмем холлову $\{p_1, p_2\}$-подгруппу H группы N. Теперь по аргументу Фраттини выполнено равенство $G = NN_G(H)$, так как N — нормальная подгруппа группы G, а H — холлова подгруппа группы N. Пусть $p_3 \in \{17, 31, 73, 127\} \setminus \{p_1, p_2\}$ и, следовательно, $p_3 \in \pi(N_G(H))$. Пусть $x \in N_G(H)$ — элемент порядка p_3. Очевидно, x действует на H без неподвижных точек и $|x| = p_3$. Из теоремы Томпсона [18, теорема 10.2.1] следует, что H нильпотентна и, значит, $p_1 \sim p_2$ в $\Gamma(H)$; противоречие. Следовательно, $\pi(N) \cap \{17, 31, 73, 127\}$ имеет не более одного элемента. Аналогичным образом доказывается, что $\{11, 17, 73, 127\} \cap \pi(N)$ имеет не более одного элемента.

Пусть $\overline{G} = G/N$ и $S = \mathrm{Soc}(\overline{G})$ — цоколь группы $\overline{G}$. Тогда по лемме 2.9 и согласно доказательству леммы 2.9 (см. [17]) группа S — неабелева простая группа такая, что $S \leq G/N \leq \mathrm{Aut}(S)$.

Лемма 3.1. *Простая группа S изоморфна $L_{10}(2)$.*

Доказательство. Как отмечено выше, S — неабелева простая группа такая, что $S \leq G/N \leq \mathrm{Aut}(S)$. Теперь будем использовать классификационную теорему конечных простых групп. Очевидно, что $\pi(S) \subseteq \pi(G)$ и $\pi(G/N) \subseteq \pi(\mathrm{Aut}(S))$. Кроме того, известно, что $\{17, 31, 73, 127\} \cap \pi(\mathrm{Aut}(S))$ и $\{11, 17, 73, 127\} \cap \pi(\mathrm{Aut}(S))$ содержат не менее трех элементов. Если S — спорадическая простая группа, то $\{73, 127\} \cap \pi(\mathrm{Aut}(S)) = \varnothing$; противоречие. Также легко видеть, что S не изоморфна знакопеременной группе. Таким образом, S — простая группа лиева типа.

По лемме 2.8 имеем, что $\{11, 73\} \cap \mathrm{Aut}(S) \subseteq \pi(S)$. Как было указано выше, существует простое число $p \in \{17, 127\}$, являющееся делителем порядка группы $\overline{G}$. Покажем, что $p \in \pi(S)$. В противном случае p делит порядок $\mathrm{Out}(S)$, так как $p \in \pi(\mathrm{Aut}(S))$ и $Z(S) = 1$. Пусть $\varphi \in \mathrm{Out}(S)$ — внешний автоморфизм группы S порядка p. Далее при доказательстве используются обозначения и таблицы из [12, с. XVI]. Для каждой конечной простой группы лиева типа S выполнено $g \mid 3!$. Кроме того, если $S \neq A_n(q)$ и $S \neq {}^2A_n(q)$, то $d \mid 12$. Если $S = A_n(q)$, то $d = (n+1, q-1)$. Если $p \mid d$, то $p \mid (q-1)$ и $p \mid (n+1)$. Следовательно, $q > 17$ и $n \geq 16$. Далее, $(q^t - 1) \mid |S|$ при всех $2 \leq t \leq n+1$, и, значит, $|\pi(S)| \geq 10$ по теореме Жигмонди; противоречие. Аналогичным образом выводится, что случай $S = {}^2A_n(q)$ и $p \mid d$ тоже невозможен. Следовательно, $p \mid f$, где $q = p_0^f$ и p_0 — простое число. Из [12, с. XVI] известно, что $(q-1)$ — делитель числа $|S|$. Кроме того, $\left(p_0^p - 1\right) \mid (q-1)$ и $p \in \{17, 127\}$. Если $p_0 \in \{2, 3, 5, 7, 11, 17, 31, 73, 127\}$, то $p_0^p - 1$ имеет примитивный простой делитель, который не делит $|G|$; противоречие. Значит, $p \in \pi(S)$. Следовательно, $\{11, 17, 73, 127\} \cap \pi(\mathrm{Aut}(S)) \subseteq \pi(S)$, поэтому $\{11, 17, 73, 127\} \cap \pi(S)$ содержит не менее трех элементов.

Теперь необходимо рассмотреть все возможные группы S по отдельности. Для удобства мы опустим подробности доказательства и ограничимся формулировкой некоторых из них.

Шаг 1. Пусть $S \cong A_n(q)$, где $q = p_0^\alpha$. Очевидно, $p_0 \in \pi(G)$. Как указано выше, $\{11, 17, 73, 127\} \cap \pi(S)$ содержит не менее трех элементов. Если $p_0 = 2$, то $q = 2^\alpha$. Известно, что $\mathrm{ord}_{11} 2 = 10$, $\mathrm{ord}_{17} 2 = 8$, $\mathrm{ord}_{31} 2 = 5$, $\mathrm{ord}_{73} 2 = 9$, $\mathrm{ord}_{127} 2 = 7$. Кроме того, $\pi\left(\prod_{i=2}^{10}(2^i - 1)\right) = \{3, 5, 7, 11, 17, 31, 73, 127\}$. Следовательно, по теореме Жигмонди имеем $(2^m - 1) \nmid |S|$ при $m \geq 11$. Также $\pi(S) \cap \{11, 17, 73, 127\}$ содержит не менее трех элементов. Значит,

$$\prod_{i=2}^{n+1}(2^{i\alpha} - 1) = \prod_{i=2}^{n+1}(q^i - 1) \text{ делит } \prod_{i=2}^{10}(2^i - 1).$$

Из теоремы Жигмонди следует, что $\alpha(n+1) \leq 10$. Если $\alpha = 1$, то $n \leq 9$. Кроме того, по крайней мере три из чисел $2^7 - 1$, $2^8 - 1$, $2^9 - 1$ и $2^{10} - 1$ делят $\prod_{i=2}^{n+1}(2^i - 1)$. Следовательно, $8 \leq n \leq 9$, и, значит, $S \cong L_9(2)$ или $S \cong L_{10}(2)$. Если $\alpha \geq 2$, то $n \leq 4$. Тогда $2^7 - 1$ и $2^9 - 1$ не могут делить $\prod_{i=2}^{n+1}(2^{i\alpha} - 1)$; противоречие. Таким образом, $S \cong L_9(2)$ или $S \cong L_{10}(2)$.

Если $S \cong L_9(2)$, то $11 \in \pi(N)$, поскольку 11 не делит $|\operatorname{Aut}(S)|$. По лемме 2.4 группа $S \cong L_9(2)$ содержит подгруппу Фробениуса KC, в которой ядро K — элементарная абелева 2-группа порядка 2^8 и дополнение C — циклическая группа порядка $2^8 - 1$. Значит, G/N содержит подгруппу Фробениуса T/N, изоморфную KC. Пусть $\widehat{G} = G/O_{11'}(N)$. Очевидно, $O_{11}(\widehat{G}) \neq 1$. Следовательно, T/N действует на $O_{11}(\widehat{G})$ точно, и ее ядро порядка 2^8 действует на $O_{11}(\widehat{G})$ без неподвижных точек. Применяя лемму 2.5, получаем, что в G есть элемент порядка $11(2^8-1)$, что невозможно, так как $11 \nsim 17$ в $\Gamma(G)$.

Далее, 13 делит (3^3-1) и (5^4-1); 19 делит (7^3-1) и (11^3-1). Затем $307 \mid (17^3-1)$, $331 \mid (31^3-1)$, $37 \mid (73^2-1)$ и $5419 \mid (127^3-1)$. Отсюда следует, что $p_0 \notin \pi(G) \setminus \{2\}$.

Шаг 2. Пусть $S \cong {}^2A_n(q)$, где $q = p_0^\alpha$ и $n \geq 2$. Очевидно, что любой примитивный простой делитель числа $x^{2n}-1$ делит x^n+1. Если $p_0 = 2$, то при $k \geq 10$ число $2^k - 1$ не делит $|S|$. Следовательно, $(2^t+1) \nmid |S|$ при $t \geq 5$. Значит, $\{11, 73, 127\} \subseteq \pi(N)$, что невозможно. Если $p_0 = 3$, то $\operatorname{ord}_{17} 3 = 16$, что легко приводит к противоречию. Аналогичные рассуждения показывают, что остальные случаи тоже невозможны.

Шаг 3. Пусть $S \cong B_n(q)$ или $C_n(q)$, где $q = p_0^\alpha$ и $n \geq 2$. Рассуждая аналогично предыдущим шагам, выводим, что случай $q \neq 2$ невозможен. Если $q = 2^\alpha$, то $\prod\limits_{i=1}^{n}(q^{2i}-1) \mid \prod\limits_{i=1}^{10}(2^i-1)$, так как $(2^{11}-1) \nmid |S|$. Значит, 2^5-1, 2^7-1 и 2^9-1 не делят порядок группы S; противоречие.

Остальные шаги выполняются аналогичным образом, и мы опускаем детали доказательства для краткости. □

Лемма 3.2. *N является 2-группой.*

Доказательство. В противном случае найдется простое число $p > 2$ такое, что $O^p(N) \neq N$, поскольку N разрешима. Тогда $N/O^p(N)$ — нетривиальная p-группа. Пусть $\widehat{N} = N/O^p(N)$ и $\widehat{G} = G/O^p(N)$, $O^p(N)$ — характеристическая подгруппа в N и $N \lhd G$. Если обозначить подгруппу Фраттини группы $\widehat{N}$ через $\Phi(\widehat{N})$, то $\widehat{N}/\Phi(\widehat{N})$ — элементарная абелева p-группа и

$$\frac{G}{N} \cong \frac{\widehat{G}}{\widehat{N}} \cong \frac{\widehat{G}/\Phi(\widehat{N})}{\widehat{N}/\Phi(\widehat{N})}.$$

Следовательно, без потери общности можно считать, что N — элементарная абелева p-группа. Пусть $C = C_G(N)$. Заметим, что C — нормальная подгруппа группы G. Значит, CN — нормальная подгруппа группы G. Покажем, что $C \leq N$. Если $C \nleq N$, то CN/N содержит подгруппу, изоморфную $L_{10}(2)$, так как $\operatorname{Soc}(G/N) \cong L_{10}(2)$. Числа 11 и 73 делят $|L_{10}(2)|$ и, значит, 11×73 делит $|CN/N| = |C/(C \cap N)|$, потому $C_G(N)$ содержит элементы порядка 11 и 73. По предположению p делит $|N|$, поэтому в G есть элементы порядка $11p$ и $73p$. Следовательно, $p \sim 11$ и $p \sim 73$, что невозможно, так как 73 смежно только с одной вершиной, это вершина 7, но $7 \nsim 11$. Таким образом, можно считать, что $C \leq N$ и $L_{10}(2)$ точно действует на N.

По предположению $L_{10}(2) \leq G/N$, а $L_{10}(2)$ содержит подгруппу Фробениуса KF, в которой ядро K — элементарная абелева 2-группа порядка 2^9 и дополнение F — циклическая группа порядка $2^9 - 1$. Значит, G/N содержит подгруппу Фробениуса T/N вида $2^9 : (2^9-1)$. По лемме 2.5 получаем, что $511p = (2^9-1)p \in \pi_e(G)$. Граф простых чисел группы G показывает, что

$p = 7$ или $p = 73$, поскольку 73 смежно только с одной вершиной, а именно с 7. Также известно, что $L_n(2) \hookrightarrow L_{n+1}(2)$, поэтому $L_9(2) \leq G/N$. Схожим образом $L_9(2)$ содержит подгруппу Фробениуса KF, в которой ядро K является элементарной абелевой 2-группой порядка 2^8 и дополнение F — циклическая группа порядка $2^8 - 1$. Следовательно, G/N содержит подгруппу Фробениуса T/N вида $2^8 : (2^8 - 1)$. Аналогично предыдущему случаю получаем, что $255p = (2^8 - 1)p \in \pi_e(G)$ и, значит, $p = 2, 3, 5, 17$; противоречие. Таким образом, N является 2-группой. $\square$

Лемма 3.3. $\Gamma(L_{10}(2))$ *не равен* $\Gamma(\mathrm{Aut}(L_{10}(2)))$.

Доказательство. Если σ — графовый автоморфизм порядка 2 группы $L_{10}(2)$, то, используя теорему 19.9 из [19], получаем, что

$$C_{L_{10}(2)}(\sigma) \cong PSp(10, 2)$$

и, значит, $|C_{L_{10}(2)}(\sigma)| = 2^{25}(2^{10} - 1) \cdots (2^4 - 1)(2^2 - 1)$. Следовательно, $2 \times 11 \in \pi_e(\mathrm{Aut}(L_{10}(2)))$. Таким образом, $2 \sim 11$ в $\Gamma(\mathrm{Aut}(L_{10}(2)))$, но известно, что $2 \nsim 11$ в $\Gamma(L_{10}(2))$. $\square$

Как следует из всего предшествующего, $L_{10}(2) \leq G/O_2(G) \leq \mathrm{Aut}(L_{10}(2))$. Так как $|\mathrm{Out}(L_{10}(2))| = 2$, то $G/O_2(G) \cong L_{10}(2)$ или $G/O_2(G) \cong \mathrm{Aut}(L_{10}(2))$. Теперь из леммы 3.3 следует, что $G/O_2(G) \cong L_{10}(2)$. Таким образом, доказательство основной теоремы завершено.

Выражаю искреннюю благодарность рецензенту за ценные замечания, позволившие исправить и значительно сократить некоторые доказательства, а также Институту исследований по теоретической физике и математике (IPM) за финансовую поддержку. Работа посвящена моим родителям, профессору Амиру Хосрави и Сорайе Хосрави, с благодарностью за их бесконечную любовь и поддержку.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Iiyori N., Yamaki H.* Prime graph components of the simple groups of Lie type over the field of even characteristic // J. Algebra. 1993. V. 155, N 2. P. 335–343.
2. *Кондратьев А. С.* О компонентах графа простых чисел конечных простых групп // Мат. сб. 1989. Т. 180, № 6. С. 787–797.
3. *Williams J. S.* Prime graph components of finite groups // J. Algebra. 1981. V. 69, N 2. P. 487–513.
4. *Lucido M. S.* The diameter of the prime graph of a finite group // J. Group Theory. 1999. V. 2, N 2. P. 157–172.
5. *Hagie M.* The prime graph of a sporadic simple group // Comm. Algebra. 2003. V. 31, N 9. P. 4405–4424.
6. *Khosravi B., Khosravi B., Khosravi B.* Groups with the same prime graph as a CIT simple group // Houston J. Math. 2007. V. 33, N 4. P. 967–977.
7. *Khosravi B., Salehi Amiri S.* On the prime graph of $L_2(q)$ where $q = p^\alpha < 100$ // Quasigroups Related Systems. 2006. V. 14, N 2. P. 179–190.
8. *Хосрави А., Хосрави Б.* Квазираспознавание простой группы ${}^2G_2(q)$ по графу простых чисел // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 3. С. 707–716.
9. *Заварницин А. В.* Распознавание конечных групп по графу простых чисел // Алгебра и логика. 2006. Т. 43, № 4. С. 390–408.
10. *Khosravi B., Khosravi B., Khosravi B.* On the prime graph of $PSL(2, p)$ where $p > 3$ is a prime number // Acta. Math. Hungarica. 2007. V. 116, N 4. P. 295–307.
11. *Заварницин А. В., Мазуров В. Д.* Порядки элементов в накрытиях конечных простых линейных и унитарных групп и распознаваемость $L_n(2)$ по спектру // Докл. РАН. 2006. Т. 409, № 6. С. 736–739.

12. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* Atlas of finite groups. Oxford: Oxford Univ. Press, 1985.

13. *Zsigmondy K.* Zur Theorie der Potenzreste // Monatsh. Math. Phys. 1892. Bd 3. S. 265–284.

14. *Moghaddamfar A. R.* On spectrum of linear groups over the binary field and recognizability of $L_{12}(2)$ // Int. J. Algebra Comput. 2006. V. 16, N 2. P. 341–349.

15. *Заварницин А. В.* Порядки элементов в накрытиях групп $L_n(q)$ и распознаваемость знакопеременной группы A_{16}. Новосибирск: НИИ дискретной математики и информатики, 2000. 13 с. (Препринт № 48).

16. *Мазуров В. Д.* Характеризация конечных групп множествами порядков их элементов // Алгебра и логика. 1997. Т. 36, № 1. С. 37–53.

17. *Васильев А. В.* О связи между строением конечной группы и свойствами ее графа простых чисел // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 511–522.

18. *Gorenstein D.* Finite groups. New York: Harper and Row, 1968.

19. *Aschbacher M., Seitz G. M.* Involutions in Chevalley groups over fields of even order // Nagoya Math. J. 1976. V. 63. P. 1–91.

Статья поступила 3 октября 2007 г.

Behrooz Khosravi (Хосрави Бехруз)
Dept. of Pure Math., Faculty of Math. and Computer Sci.,
Amirkabir University of Technology (Tehran Polytechnic),
424, Hafez Ave., Tehran 15914, IRAN,
khosravibbb@yahoo.com