Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2009. Том 50, № 3

УДК 512.55

ОБОБЩЕННЫЕ SV–МОДУЛИ

А. Н. Абызов

Аннотация. Для произвольного квазипроективного правого R-модуля P установлено, что в категории $\sigma(P)$ каждый модуль слабо регулярен тогда и только тогда, когда в категории $\sigma(M/I(M))$ каждый модуль является модулем со свойством подъема, где M — порождающий объект категории $\sigma(P)$. В частности, даются описания колец, над которыми каждый правый модуль слабо регулярен.

Ключевые слова: полуартиново кольцо, слабо регулярный модуль, SV-кольцо, квазипроективный модуль.

Все кольца предполагаются ассоциативными и с единицей, а модули — унитарными. Модуль M называется *слабо регулярным*, если каждый его подмодуль, который не содержится в радикале Джекобсона модуля M, содержит в себе ненулевое прямое слагаемое модуля M. Кольцо R называется *слабо регулярным*, если слабо регулярен модуль R_R.

Через $J(R)$ и $J(M)$ будем соответственно обозначать радикал Джекобсона кольца R и модуля M. Инъективную оболочку модуля M будем обозначать через $E(M)$. Если модуль M обладает композиционным рядом, то число композиционных факторов в композиционном ряде модуля M называется его *длиной* и обозначается через $l(M)$. Модуль, который изоморфен подмодулю гомоморфного образа прямых сумм копий модуля M, называется *M-подпорожденным.* Полную подкатегорию всех правых R-модулей, состоящую из всех M-подпорожденных модулей, будем обозначать через $\sigma(M)$.

Модуль M называется *SV-модулем*, если он является полуартиновым V-модулем. Кольцо R называется *правым SV-кольцом*, если R_R — SV-модуль. Модуль M назовем *обобщенным SV-модулем*, если каждый модуль из категории $\sigma(M)$ является слабо регулярным. Кольцо R называется *обобщенным справа SV-кольцом,* если каждый правый R-модуль слабо регулярен.

Слабо регулярные кольца под названием I_0-колец введены и изучены Никольсоном в работе [1]. Понятие слабо регулярного модуля введено И. И. Сахаевым в начале 90-х гг. прошлого столетия. Проективные слабо регулярные модули подробно изучены в [2]. Основным результатом настоящей работы является теорема 13, в которой характеризуются квазипроективные обобщенные SV-модули. В частности, даются описания обобщенных справа SV-колец.

Рядом Леви модуля M называется возрастающая цепочка

$$0 \subset \operatorname{Soc}_1(M) = \operatorname{Soc}(M) \subset \dots \subset \operatorname{Soc}_\alpha(M) \subset \operatorname{Soc}_{\alpha+1}(M) \subset \dots,$$

где $\operatorname{Soc}_\alpha(M)/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M) = \operatorname{Soc}(M/\operatorname{Soc}_{\alpha-1}(M))$ для каждого непредельного ординального числа α и $\operatorname{Soc}_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} \operatorname{Soc}_\beta(M)$ для каждого предельного ординального числа α. Обозначим через $L(M)$ подмодуль вида $\operatorname{Soc}_\xi(M)$, где ξ —

наименьший ординал, для которого выполнено равенство $\mathrm{Soc}_\xi(M) = \mathrm{Soc}_{\xi+1}(M)$. Модуль M называется *полуартиновым*, если выполнено равенство $M = L(M)$. Кольцо R называется *полуартиновым справа*, если модуль R_R является полуартиновым. Для произвольного кольца R через $L(R)$ и $\mathrm{Soc}(R)$ будем обозначать соответственно идеалы $L(R_R)$ и $\mathrm{Soc}(R_R)$.

Для произвольного правого R-модуля M определим по трансфинитной индукции для каждого ординального числа α подмодуль $I_\alpha(M)$ следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $I_\alpha(M) = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $I_{\beta+1}(M)/I_\beta(M)$ — сумма всех локальных M-инъективных правых подмодулей модуля $M/I_\beta(M)$ длины не больше двух, у которых фактор-модуль по радикалу Джекобсона является M-инъективным модулем. Когда α — предельное ординальное число, положим $I_\alpha(M) = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} I_\beta(M)$. Ясно, что для некоторого ординального числа τ имеют место равенства $I_\tau(M) = I_{\tau+1}(M)$ и $I_1(M/I_\tau(M)) = 0$. Далее через $I(M)$ будем обозначать подмодуль $I_\tau(M)$. Для произвольного кольца R через $I(R)$ будем обозначать правый идеал $I(R_R)$, который, как легко заметить, является идеалом.

Для правых R-модулей P, M и $S = \mathrm{End}_R(P)$ абелеву группу $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ можно рассматривать как правый S-модуль, положив $(fs)(m) = f(s(m))$, где $f \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$, $s \in S$ и $m \in M$.

Лемма 1. *Пусть P — конечно порожденный квазипроективный правый R-модуль и $S = \mathrm{End}_R(P)$. Если $M \in \sigma(P)$, то имеют место следующие утверждения:*

(1) *если N — подмодуль модуля M, то существует изоморфизм правых S-модулей $\mathrm{Hom}_R(P, M/N) \cong \mathrm{Hom}_R(P, M)/\mathrm{Hom}_R(P, N)$;*

(2) *если M — простой правый R-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ является либо простым, либо нулевым правым S-модулем;*

(3) *если M — полупростой правый R-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ — полупростой правый S-модуль;*

(4) *если $M = \sum\limits_{i\in I} N_i$ и $\mathrm{Hom}_R(P, M) \neq 0$, то существует $i_0 \in I$ такой, что $\mathrm{Hom}_R(P, N_{i_0}) \neq 0$;*

(5) *если $\phi \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$, то $\phi S = \mathrm{Hom}_R(P, Jm(\phi))$.*

Доказательство. (1) Пусть f — каноническое отображение из M на M/N. Рассмотрим отображение $g : \mathrm{Hom}_R(P, M) \to \mathrm{Hom}_R(P, M/N)$, действующее по правилу $g(\phi) = f\phi$. Ясно, что g — S-гомоморфизм и $\mathrm{Ker}(g) = \mathrm{Hom}_R(P, N)$. Согласно [3, 18.3] P — проективный объект категории $\sigma(P)$. Тогда g — эпиморфизм, что и доказывает наше утверждение.

(2) Расмотрим ненулевой гомоморфизм $\phi \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$. Покажем, что $\phi S = \mathrm{Hom}_R(P, M)$. Пусть $\alpha \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$. Так как ϕ ненулевой, он является эпиморфизмом. Тогда из квазпроективности P следует существование такого гомоморфизма $\beta \in S$, что $\alpha = \phi\beta$.

(3) Пусть $M = \bigoplus\limits_{i\in I} S_i$, где для каждого i модуль S_i прост. Поскольку P является конечно порожденным, то $\mathrm{Hom}_R(P, \bigoplus\limits_{i\in I} S_i) \cong \bigoplus\limits_{i\in I} \mathrm{Hom}_R(P, S_i)$. Тогда полупростота S-модуля $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ следует из предыдущего пункта.

(4) Пусть $\phi \in \mathrm{Hom}_R(P, M)$ — ненулевой гомоморфизм. Рассмотрим естественный эпиморфизм f из $\bigoplus\limits_{i\in I} N_i$ на $\sum\limits_{i\in I} N_i$. Поскольку P — проективный объект

в категории $\sigma(P)$, существует такой гомоморфизм $g : P \to \bigoplus_{i\in I} N_i$, что $\phi = fg$. Тогда g — ненулевой гомоморфизм и, следовательно, существует такой $i_0 \in I$, что $\mathrm{Hom}_R(P, N_{i_0}) \neq 0$;

(5) Утверждение следует из квазипроективности модуля P. $\square$

Следующая лемма непосредственно вытекает из [4, 11.35].

Лемма 2. *Пусть P — правый R-модуль и кольцо $S = \mathrm{End}_R(P)$ регулярно. Тогда из инъективности правого R-модуля M следует инъективность правого S-модуля $\mathrm{Hom}_R(P, M)$.*

Лемма 3. *Пусть M — слабо регулярный правый R-модуль и N — подмодуль модуля M такой, что $(N + J(M))/J(M)$ — простой подмодуль модуля $M/J(M)$. Тогда модуль N содержит такое локальное прямое слагаемое mR модуля M, что $(N + J(M))/J(M) = (m + J(M))R$.*

Доказательство. Пусть n — элемент подмодуля N такой, что

$$(N + J(M))/J(M) = (n + J(M))R.$$

Из слабой регулярности модуля M следует существование такого циклического подмодуля mR, что $mR \not\subset J(M)$, $mR \subset nR$ и mR — прямое слагаемое модуля M. Тогда

$$(N + J(M))/J(M) = (m + J(M))R \cong mR/(J(M) \cap mR) \cong mR/J(mR),$$

что доказывает локальность модуля mR. $\square$

Лемма 4. *Пусть M — правый R-модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным. Тогда каждый локальный модуль из категории $\sigma(M)$ локальный длины не больше двух.*

Доказательство. Пусть N — локальный модуль из категории $\sigma(M)$. Если N непростой, то из [5, лемма 3.3] следует, что $N \not\subset J(E(N))$, где $E(N)$ — инъективная оболочка модуля N в категории $\sigma(M)$. Тогда из слабой регулярности модуля $E(N)$ получаем равенство $N = E(N)$. Поскольку каждый инъективный неразложимый модуль однороден и по [5, лемма 3.3] $J(N)$ полупрост, то N — локальный модуль длины два. $\square$

Лемма 5. *Если M — полуартинов модуль и в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является слабо регулярным, то каждый неполупростой модуль N из $\sigma(M)$ будет содержать инъективный локальный подмодуль длины не больше двух.*

Доказательство. Поскольку N является неполупростым, то из [5, теорема 3.4] следует, что он будет содержать ненулевой инъективный подмодуль N_0. Так как M — полуартинов модуль, ввиду [6, 3.12] подмодуль N_0 также является полуартиновым и, следовательно, $N_0/J(N_0)$ будет содержать простой подмодуль. Тогда из лемм 3 и 4 вытекает, что модуль N_0 будет содержать прямое слагаемое, которое является инъективным, локальным и длины не больше двух. $\square$

Модуль M называется *полулокальным*, если $M/J(M)$ является полупростым модулем. Говорят, что подмодуль N модуля M *лежит над прямым слагаемым модуля* M, если существуют такие подмодули N_1 и N_2, что $N_1 \oplus N_2 = M$, $N_1 \subset N$ и $N_2 \cap N$ косуществен в N_2. Правый R-модуль M называется *модулем со свойством подъема*, если каждый его подмодуль лежит над прямым слагаемым модуля M. Легко видеть, что каждый модуль со свойством подъема является слабо регулярным.

Теорема 6. *Пусть M — правый R-модуль. Тогда следующие условия равносильны:*

(1) *M полулокальный и каждый модуль в $\sigma(M)$ слабо регулярен;*

(2) *M локально нётеров и каждый модуль в $\sigma(M)$ слабо регулярен;*

(3) *каждый модуль в $\sigma(M)$ является модулем со свойстом подъема.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Покажем, что модуль M локально нётеров. Пусть N — конечно порожденный подмодуль модуля M. Ясно, что модуль $N/(N \cap J(M))$ является полупростым модулем конечной длины. Используя индукцию по длине модуля $N/(N \cap J(M))$, покажем, что N — модуль конечной длины. Если $l(N/(N \cap J(M))) = 1$, то из леммы 3 следует существование такого локального подмодуля N_0 модуля N, что $(N_0 + J(M))/J(M) \cong (N + J(M))/J(M)$ и $M = N_0 \oplus L$, где L — подмодуль M. Тогда $N = N_0 \oplus (N \cap L)$, где $N \cap L \subset J(M)$ и $J(M) \subset \mathrm{Soc}(M)$ согласно [5, лемма 3.3]. Поскольку $N \cap L$ — конечно порожденный полупростой модуль, а по лемме 4 N_0 — локальный модуль конечной длины, то N — модуль конечной длины. Пусть наше утверждение доказано для конечно порожденных подмодулей S модуля M, у которых $l(S/(S \cap J(M))) < n$ и N — конечно порожденный подмодуль модуля M, у которого $l(N/(N \cap J(M))) = n$. Выберем в модуле N такой подмодуль N_0, что $N_0/(N_0 \cap J(M))$ — простой модуль. Из леммы 3 следует существование такого локального подмодуля mR модуля N_0, что $M = mR \oplus L$, где L подмодуль M. Тогда $N = mR \oplus (N \cap L)$ и $l(N/(N \cap J(M))) = 1 + l((N \cap L)/((N \cap L) \cap J(M)))$. Модули mR и $N \cap L$ в силу предположения индукции имеют конечную длину, следовательно, модуль N также имеет конечную длину. Таким образом, модуль M является локально нётеровым.

(2) $\Rightarrow$ (3) Покажем, что каждый модуль в категории $\sigma(M)$ является полуартиновым. Для этого согласно [6, 3.12] достаточно показать полуартиновость модуля M. Пусть M/N — фактор-модуль модуля M и N_0 — ненулевой конечно порожденный подмодуль модуля M/N. Тогда N_0 — нётеров модуль и, следовательно, согласно [7, предложение 10.14] имеем равенство $N_0 = N_1 \oplus \cdots \oplus N_k$, где для каждого i модуль N_i неразложим. Поскольку каждый нерадикальный и неразложимый слабо регулярный модуль, очевидно, локален, из леммы 4 следует, что $\mathrm{Soc}(N_0) \neq 0$. Таким образом, каждый фактор-модуль модуля M имеет ненулевой цоколь, что и доказывает полуартиновость модуля M.

Пусть N — неполупростой модуль из $\sigma(M)$. Обозначим через A множество всех подмодулей N, которые являются локальными инъективными длины не больше двух. Из леммы Цорна следует, что мы можем выбрать максимальное подмножество A_0 множества A со свойством $\sum\limits_{U \in A_0} U = \bigoplus\limits_{U \in A_0} U$. Пусть $N_0 = \bigoplus\limits_{U \in A_0} U$. Поскольку по предположению M локально нётеров, из [3, 27.3] получим равенство $N = N_0 \oplus L$, где L — подмодуль модуля N. Если L — неполупростой модуль, то из леммы 5 вытекает, что L содержит инъективный локальный подмодуль длины не больше двух. Это противоречит выбору модуля N_0. Таким образом, каждый модуль из категории $\sigma(M)$ является прямой суммой локальных модулей длины не больше двух. Тогда согласно [8, теорема 2.4] в категории $\sigma(M)$ каждый модуль является модулем со свойством подъема.

(3) $\Rightarrow$ (1) Импликация непосредственно следует из [8, теорема 2.4]. $\square$

Лемма 7. *Если M — правый R-модуль, то каждый ненулевой фактор-модуль модуля $\bigoplus\limits_{\alpha \in A} I(M_\alpha)$, где $M \cong M_\alpha$ для каждого α, содержит ненулевой* *локальный M-инъективный подмодуль длины не больше двух.*

Доказательство. Пусть $L = \big(\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)\big)/N$ — ненулевой фактор-модуль модуля $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)$ и φ — канонический гомоморфизм из $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)$ в L. Тогда существует такой индекс α_0, что $\varphi i_{\alpha_0}(I(M_{\alpha_0})) \neq 0$, где i_{α_0} — каноническое вложение модуля $I(M_{\alpha_0})$ в модуль $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)$. Пусть γ — наименьшее ординальное число, для которого имеет место неравенство $\varphi i_{\alpha_0}(I_\gamma(M_{\alpha_0})) \neq 0$. Ясно, что γ — непредельное ординальное число. Тогда модуль L содержит ненулевой гомоморфный образ модуля $I_\gamma(M_\alpha)/I_{\gamma-1}(M_\alpha)$ и, следовательно, L содержит локальный M-инъективный подмодуль длины не больше двух. $\square$

Теорема 8. *Если M — полуартинов правый R-модуль, являющийся порождающим объектом категории $\sigma(M)$, то следующие условия равносильны:*

(1) *каждый модуль категории $\sigma(M)$ является слабо регулярным;*

(2) *каждый модуль в $\sigma(M/I(M))$ является модулем со свойством подъема;*

(3) *каждый модуль из $\sigma(M/I(M))$ является прямой суммой модулей длины не больше двух.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Если модуль $(M/I(M))/J((M/I(M)))$ содержит ненулевой M-инъективный подмодуль, то он, очевидно, будет содержать и простой M-инъективный подмодуль. Тогда из лемм 4 и 5 следует, что модуль $M/I(M)$ содержит M-инъективный локальный подмодуль длины не больше двух, у которого фактор-модуль по радикалу Джекобсона является M-инъективным модулем. Поскольку $I_1(M/I(M)) = 0$, получаем противоречие. Таким образом, $(M/I(M))/J((M/I(M)))$ не содержит ненулевых M-инъективных подмодулей и, следовательно, согласно [5, теорема 3.4] является полупростым модулем. Тогда $M/I(M)$ является полулокальным модулем и импликация следует из теоремы 6.

Равносильность пп. (2) и (3) вытекает из [8, теорема 2.4].

(3) $\Rightarrow$ (1) Покажем, что каждый локальный модуль N длины два из категории $\sigma(M/I(M))$ является инъективным в $\sigma(M)$. Пусть $E(N)$ — инъективная оболочка модуля N в категории $\sigma(M)$ и φ — эпиморфизм из $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ в $E(N)$, где для каждого α имеет место изоморфизм $M \cong M_\alpha$. Если $\varphi\big(\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)\big) = 0$, то $E(N)$ — объект категории $\sigma(M/I(M))$. Тогда по [8, теорема 2.4] $E(N)$ — модуль со свойством подъема, и поскольку $N \not\subset J(E(N))$, получаем равенство $E(N) = N$. В случае, когда $\varphi\big(\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha)\big) \neq 0$, из леммы 7 следует, что $E(N)$ содержит M-инъективный локальный подмодуль длины не больше двух, что, очевидно, влечет равенство $E(N) = N$.

Рассмотрим произвольный неполупростой модуль N из категории $\sigma(M)$. Из условия теоремы получаем существование эпиморфизма φ из $\bigoplus_{\alpha\in A} M_\alpha$ в N, где для каждого α имеет место изоморфизм $M \cong M_\alpha$. Если $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha) \subset \operatorname{Ker}\varphi$, то N будет неполупростым объектом категории $\sigma(M/I(M))$ и, следовательно, будет содержать в себе ненулевой инъективный подмодуль. Пусть $\bigoplus_{\alpha\in A} I(M_\alpha) \not\subset \operatorname{Ker}\varphi$. Тогда из леммы 7 следует, что N содержит ненулевой локальный M-инъективный подмодуль. Таким образом, приведенные выше рассуждения показывают, что в произвольном неполупростом модуле N содержится ненулевой инъективный подмодуль. Тогда импликация следует из [5, теорема 3.4]. $\square$

Лемма 9. *Пусть P — конечно порожденный квазипроективный обобщенный правый SV-модуль над кольцом R, $S = \mathrm{End}_R(P)$ — регулярное кольцо и $M \in \sigma(P)$. Тогда правый S-модуль $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ является либо полупростым, либо содержит в себе ненулевой инъективный подмодуль.*

Доказательство. Допустим, что правый S-модуль $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ не содержит ненулевых инъективных подмодулей. Определим в модуле M по трансфинитной индукции для каждого ординального числа α подмодуль M_α следующим образом. При $\alpha = 0$ положим $M_\alpha = 0$. Если $\alpha = \beta + 1$, то $M_{\beta+1}/M_\beta$ — сумма всех P-инъективных подмодулей модуля M/M_β. Когда α — предельное ординальное число, положим $M_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} M_\beta$. Обозначим через M_0 объединение всех таких модулей. Покажем с помощью трансфинитной индукции, что для каждого ординального числа α имеет место равенство $\mathrm{Hom}_R(P, M_\alpha) = 0$. Если $\alpha = 0$, то утверждение тривиально. Пусть α — некоторое ординальное число и для каждого $\beta < \alpha$ имеет место равенство $\mathrm{Hom}_R(P, M_\beta) = 0$. Если α — предельное ординальное число, то равенство $\mathrm{Hom}_R(P, M_\alpha) = 0$ тривиально. Предположим, что α — непредельное ординальное число и $\alpha = \alpha_0 + 1$. По предположению индукции $\mathrm{Hom}_R(P, M_{\alpha_0}) = 0$. Тогда по лемме 1

$$\mathrm{Hom}_R(P, M_\alpha/M_{\alpha_0}) \cong \mathrm{Hom}_R(P, M_\alpha)/\,\mathrm{Hom}_R(P, M_{\alpha_0}) \cong \mathrm{Hom}_R(P, M_\alpha).$$

Если $\mathrm{Hom}_R(P, M_\alpha) \neq 0$, то по лемме 1 в модуле M_α/M_{α_0} найдется такой P-инъективный подмодуль L, что $\mathrm{Hom}_R(P, L) \neq 0$. Поскольку по лемме 2 $\mathrm{Hom}_R(P, L)$ — инъективный S-модуль, то $\mathrm{Hom}_R(P, M_\alpha)$ и, следовательно, $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ будут содержать в себе ненулевые P-инъективные подмодули, что противоречит исходному предположению. Таким образом, для каждого ординального числа α имеет место равенство $\mathrm{Hom}_R(P, M_\alpha) = 0$, и, следовательно, $\mathrm{Hom}_R(P, M_0) = 0$. Поскольку M/M_0 не содержит P-инъективных подмодулей, из [5, теорема 3.4] следует, что M/M_0 полупрост. Тогда по лемме 1 $\mathrm{Hom}_R(P, M/M_0)$ — полупростой модуль, и поскольку $\mathrm{Hom}_R(P, M/M_0) \cong \mathrm{Hom}_R(P, M)$, модуль $\mathrm{Hom}_R(P, M)$ также полупростой. $\square$

Лемма 10. *Пусть P — конечно порожденный квазипроективный правый R-модуль, $S = \mathrm{End}_R(P)$ — регулярное кольцо и N — циклический правый S-модуль. Тогда существует такой правый R-модуль M, что $M \in \sigma(P)$ и $N \cong \mathrm{Hom}_R(P, M)$.*

Доказательство. Из [3, 25.5] следует, что гомоморфизм правых S-модулей $\phi : N \bigotimes\limits_S S \to \mathrm{Hom}_R\big(P, N \bigotimes\limits_S P\big)$, при котором $n \otimes s \to [p \to n \otimes s(p)]$, является мономорфизмом. Очевидно, что $N \bigotimes\limits_S P \in \sigma(P)$. Таким образом, без ограничения общности мы можем считать, что модуль N является подмодулем модуля $\mathrm{Hom}_R\big(P, N \bigotimes\limits_S P\big)$. Поскольку N — циклический модуль, то для некоторого $\phi \in \mathrm{Hom}_R\big(P, N \bigotimes\limits_S P\big)$ имеем $N = \phi S$. Тогда из леммы 1 вытекает, что $N = \mathrm{Hom}_R(P, Jm(\phi))$. $\square$

Лемма 11. *Пусть P — конечно порожденный квазипроективный обобщенный правый SV-модуль над кольцом R и $S = \mathrm{End}_R(P)$ — регулярное кольцо. Тогда S — обобщенное справа SV-кольцо.*

Доказательство. В силу [5, теорема 3.4] достаточно показать, что каждый циклический неполупростой правый S-модуль содержит ненулевой инъективный подмодуль. Пусть N — циклический неполупростой правый S-модуль.

Из леммы 10 следует, что для некторого $M \in \sigma(P)$ имеет место изоморфизм $N \cong \mathrm{Hom}_R(P, M)$. Тогда согласно лемме 9 N содержит в себе ненулевой инъективный подмодуль. $\square$

Теорема 12. *Если P — квазипроективный обобщенный SV-модуль, то P — полуартинов модуль.*

Доказательство. Предположим, что $P \neq L(P)$. Обозначим через M фактор-модуль $P/L(P)$, который согласно [3, 18.2] является квазипроективным. Из [5, лемма 3.3] следует, что $J(M) = 0$. Поскольку M неполупростой, согласно [5, теорема 3.4] M содержит ненулевой циклический квазипроективный P-инъективный подмодуль mR, где $m \in M$. Из [3, 22.1, 22.2] следует, что $\mathrm{End}_R(mR)$ является регулярным кольцом. По лемме 11 и [5, теорема 3.7] $\mathrm{End}_R(mR)$ — правое SV-кольцо. Тогда $\mathrm{End}_R(mR)$ содержит примитивный идемпонтент e и emR является простым модулем, что противоречит равенству $\mathrm{Soc}(M) = 0$. $\square$

Теорема 13. *Для квазипроективного правого R-модуля P следующие условия равносильны:*

(1) *P — обобщенный SV-модуль;*

(2) *если M — порождающий объект категории $\sigma(P)$, то в категории $\sigma(M/I(M))$ каждый модуль является модулем со свойством подъема.*

Доказательство. Равносильность пп. (1) и (2) непосредственно вытекает из теорем 8 и 12. $\square$

Следующее утверждение вытекает из предыдущей теоремы и [8, следствие 2.5].

Следствие 14. *Для кольца R следующие условия равносильны:*

(1) *R — обобщенное справа SV-кольцо;*

(2) *$R/I(R)$ артиново полуцепное и $J^2(R/I(R)) = 0$;*

(3) *каждый правый модуль над кольцом $R/I(R)$ является модулем со свойством подъема.*

Следствие 15 [9]. *Для квазипроективного правого R-модуля P следующие условия равносильны:*

(1) *P — SV-модуль;*

(2) *каждый ненулевой модуль в категории $\sigma(P)$ содержит ненулевой P-инъективный подмодуль.*

Доказательство. (1) $\Rightarrow$ (2) Согласно [6, 3.12] каждый модуль в категории $\sigma(P)$ полуартинов. Тогда импликация следует из того факта, что каждый ненулевой модуль в $\sigma(P)$ содержит простой P-инъективный подмодуль.

(2) $\Rightarrow$ (1) Легко видеть, что P — обобщенный SV-модуль и, следовательно, согласно теореме 12 он полуартинов. Из условия пункта непосредственно вытекает, что каждый простой модуль в $\sigma(P)$ является P-инъективным, т. е. P — V-модуль. $\square$

Примерами обобщенных SV-колец являются правые SV-кольца и артиновы полуцепные кольца, у которых квадрат радикала Джекобсона равен нулю. Приведем пример обобщенного SV-кольца, который отличен от упомянутых выше примеров.

Пример 16. Пусть R — классически полупростое кольцо, R_0 — подкольцо кольца R, которое является артиновым полуцепным, и $J^2(R_0) = 0$. Рассмотрим кольцо $S = \prod\limits_{i\geq 1} R_i$, где $R_i = R$ для каждого i. Выделим в кольце S подкольцо $T = \{a \in S \mid \exists N \forall i, j > N : a_i = a_j \& a_i \in R_0\}$. Тогда из [5, лемма 1.2] непосредственно следует, что $\operatorname{Soc}(T) = I_1(T) = \bigoplus\limits_{i\geq 1} R_i$.

Пусть N — инъективный правый $T/\operatorname{Soc}(T)$-модуль, который естественным образом можно рассматривать как правый T-модуль. Рассмотрим вложение $N \subset E(N)$, где $E(N)$ — инъективная оболочка правого T-модуля N. Если $E(N)\operatorname{Soc}(T) \neq 0$, то для некоторого примитивного идемпотента e из $\operatorname{Soc}(T)$ имеем $E(N)e \neq 0$. Поскольку N существен в $E(N)$ и e — центральный идемпотент кольца T, то $Ne \neq 0$, а это противоречит равенству $N\operatorname{Soc}(T) = 0$. Полученное противоречие показывает, что $E(N)\operatorname{Soc}(T) = 0$ и, следовательно, $E(N)$ мы можем рассматривать как модуль над кольцом $T/\operatorname{Soc}(T)$. Поскольку N — инъективный правый $T/\operatorname{Soc}(T)$-модуль, имеем равенство $N = E(N)$.

Таким образом, каждый модуль, инъективный над кольцом $T/\operatorname{Soc}(T)$, инъективен и над кольцом T. В частности, $I_2(T)/I_1(T) = I_1(T/\operatorname{Soc}(T)_{T/\operatorname{Soc}(T)})$, и, значит, $I(T) = I_2(T) = \{a \in S \mid \exists N \forall i, j > N : a_i = a_j \& a_i \in I_1(R_0)\}$ и $T/I(T) \cong R_0/I(R_0)$. Тогда из следствия 14 следует, что кольцо S является обобщенным SV-кольцом. Отметим, что случай, когда $R = M_2(P)$, а R_0 — кольцо верхних треугольных матриц второго порядка над некоторым полем P, рассматривался в работе [10] как пример полуартинового нерегулярного кольца, у которого радикал Джекобсона равен нулю.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Nicholson W. K.* I-rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 207. P. 361–373.
2. *Hamza H.* I_0-rings and I_0-modules // Okayama Univ. 1998. V. 40, N 1. P. 91–97.
3. *Wisbauer R.* Foundations of module and ring theory. Philadelphia: Gordon and Breach, 1991.
4. *Фейс К.* Алгебра: кольца, модули и категории. М.: Мир, 1977. Т. 1.
5. *Абызов А. Н.* Слабо регулярные кольца над нормальными кольцами // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 721–738.
6. *Dung N. V., Huynh D. V., Smith P. F., Wisbauer R.* Extending modules. London: Pitman, 1994.
7. *Anderson F. W., Fuller K. R.* Rings and categories of modules. New York: Spriger-Verl., 1991.
8. *Oshiro K., Wisbauer R.* Modules with every subgenerated module lifting // Osaka J. Math. 1995. V. 32. P. 513–519.
9. *Dung N. V., Smith P. F.* On semiartinian V-modules // J. Pure Appl. Algebra. 1992. V. 82, N 1. P. 27–37.
10. *Baccella G.* Semi-Artinian V-rings and semi-Artinian Von Neumann regular rings // J. Algebra. 1995. V. 173, N 3. P. 587–612.

Статья поступила 2 апреля 2008 г.

Абызов Адель Наилевич
НИИММ им. Н. Г. Чеботарева, отдел алгебры и математической логики,
ул. Профессора Нужина, 17, Казань 420008
aabyzov@ksu.ru