

УДК 517.98

ПРИНЦИП ОГРАНИЧЕННОСТИ ДЛЯ РЕШЕТОЧНО НОРМИРОВАННЫХ ПРОСТРАНСТВ

А. Е. Гутман, С. А. Лисовская

Аннотация. Рассматриваются три классических факта теории нормированных пространств: принцип ограниченности, теорема Банаха — Штейнгауза и принцип ограниченности на выпуклом компакте. С помощью методов булевозначного анализа доказываются точные аналоги этих теорем для случая решеточно нормированных пространств.

Ключевые слова: теорема Банаха — Штейнгауза, пространство Банаха — Канторовича, циклически компактное множество, булевозначный анализ.

Академику Ю. Г. Решетняку в связи с его 80-летием

В работе, базирующейся на традиционных определениях, обозначениях и фактах из теории решеточно нормированных пространств [1] и булевозначного анализа [2], мы доказываем точные аналоги трех классических теорем для случая произвольных решеточно нормированных пространств над расширенными пространствами Канторовича, а именно принцип ограниченности (2.4), теорему Банаха — Штейнгауза (2.6) и принцип ограниченности на выпуклом компакте (3.3). Эти теоремы, полученные методом «спуска», усиливают и обобщают аналогичные результаты И. Г. Ганиева и К. К. Кудайбергенова [3], установленные для случая пространств Банаха — Канторовича над решеткой измеримых функций. (Доказательства, приведенные в [3], получены с помощью специфической техники теории измеримых банаховых расслоений с лифтингом и не задействуют методы булевозначного анализа.)

Все векторные пространства по умолчанию предполагаются ненулевыми.

На протяжении всей статьи E — расширенное пространство Канторовича над \mathbb{R} ; E^{++} — множество порядковых единиц в E ; 1_E — некоторый фиксированный элемент E^{++} ; ef — произведение элементов $e, f \in E$, соответствующее той операции умножения, относительно которой E является коммутативной упорядоченной алгеброй с мультипликативной единицей 1_E , причем $(\forall e, f \in E)(ef = 0 \Leftrightarrow e \perp f)$; B — полная булева алгебра всех порядковых проекторов в E ; $\text{Prt}(B)$ — множество всех разбиений единицы в B ; $\mathbb{V}^{(B)}$ — отделимый B -значный универсум; $\llbracket \varphi \rrbracket$ — значение истинности в $\mathbb{V}^{(B)}$ формулы φ языка теории множеств; $\mathbb{V}^{(B)} \vDash [\varphi]$ — синоним равенства $\llbracket \varphi \rrbracket = 1_B$; $\bigsqcup_{i \in I} \pi_i x_i$ — перемешивание семейства $(x_i)_{i \in I} \subset \mathbb{V}^{(B)}$ относительно $(\pi_i)_{i \in I} \in \text{Prt}(B)$; $\text{сус } X$ — циклическая оболочка множества $X \subset \mathbb{V}^{(B)}$; \mathcal{R} — упорядоченное поле вещественных чисел внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, содержащее \mathbb{R}^\wedge в виде подполя.

Работа поддержана Фондом содействия отечественной науке.

Множество всех экстенциональных функций из X в Y , где $X, Y \subset \mathbb{V}^{(B)}$, мы обозначаем символом $\mathcal{E}(X, Y)$. В случае $\mathcal{X}, \mathcal{Y} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathcal{T} \subset \mathcal{E}(\mathcal{X} \downarrow, \mathcal{Y} \downarrow)$ положим $\mathcal{T} \uparrow := \{T \uparrow : T \in \mathcal{T}\} \uparrow$. При этом $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{T} \uparrow \uparrow - \text{некоторое множество функций из } \mathcal{X} \text{ в } \mathcal{Y}]$. Если же $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X} \neq \emptyset \text{ и } \mathbb{T} - \text{некоторое множество функций из } \mathcal{X} \text{ в } \mathcal{Y}]$, то $\mathbb{T} \downarrow \downarrow := \{\tau \downarrow : \tau \in \mathbb{T}\} \subset \mathcal{E}(\mathcal{X} \downarrow, \mathcal{Y} \downarrow)$.

1. Булевозначная реализация mix -полных E -нормированных пространств

Условимся называть (*полным*) E -нормированным пространством векторное пространство X над \mathbb{R} , снабженное нормой $|\cdot| : X \rightarrow E$, относительно которой X является (соответственно o -полным) d -разложимым решеточно нормированным пространством (см. [1, 2.1.1]), удовлетворяющим условию $|X|^{\perp\perp} = E$, где $|X| := \{|x| : x \in X\}$.

Пусть $X := (X, |\cdot|)$ — произвольное E -нормированное пространство.

Будем говорить, что Y является E -нормированным подпространством X , и писать $Y \subset_E X$, если Y — векторное подпространство X и пара $(Y, |\cdot|_Y)$ является E -нормированным пространством. (При этом по умолчанию наделяем Y нормой $|\cdot|_Y$.) Как легко видеть, $Y \subset_E X$ тогда и только тогда, когда Y — векторное подпространство X , $(\forall \pi \in B)(\forall y \in Y)(\pi_x y \in Y)$ и $|Y|^{\perp\perp} = E$. В случае $Y \subset_E X$ будем также говорить, что X является *расширением* Y .

Формулы $x_n \rightarrow x$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = x$ будут использоваться в качестве синонимов порядковой сходимости $|x_n - x| \rightarrow 0$ в E . Говорят, что подмножество $U \subset X$ аппроксимирует элемент $x \in X$, если $\inf\{|u - x| : u \in U\} = 0$. Множество U назовем *всюду плотным* в X , если U аппроксимирует каждый элемент X .

Для удобства будем снабжать индексом X знаки перемешиваний, вычисляемых в пространстве X : $\text{mix}_X \pi_i x_i$. Пусть $U \subset X$. Символом $\text{mix}_X U$ обозначим mix -замыкание (в X) множества U , состоящее из всех элементов $x \in X$, представимых в виде $x = \text{mix}_X \pi_i u_i$, где $(\pi_i)_{i \in I} \in \text{Prt}(B)$, $(u_i)_{i \in I} \subset U$. Множество U назовем mix -замкнутым (в X), если $\text{mix}_X U = U$. Будем говорить, что множество U является mix -полным (в X), если для любых $(\pi_i)_{i \in I} \in \text{Prt}(B)$ и $(u_i)_{i \in I} \subset U$ существует такой элемент $u \in U$, что $u = \text{mix}_X \pi_i u_i$.

Отметим, что mix -полнота является абсолютным свойством в следующем смысле: если X и \bar{X} — E -нормированные пространства и $U \subset X \subset_E \bar{X}$, то mix -полнота U в X равносильна mix -полноте U в \bar{X} . В случае, когда X является mix -полным в X (а тогда и в любом расширении X), пространство X называется mix -полным E -нормированным пространством. Как известно, всякое полное E -нормированное пространство является mix -полным.

Назовем mix -пополнением пространства X такое mix -полное E -нормированное пространство \bar{X} , что $X \subset_E \bar{X}$ и $\text{mix}_{\bar{X}} X = \bar{X}$. (Ясно, что $X = \bar{X}$ в случае mix -полного пространства X .) Любое E -нормированное пространство имеет mix -пополнение, причем единственное с точностью до изометрии (см. 1.6).

Следующее утверждение вытекает из [4, 1.5.2, 1.5.3].

1.1. Если \bar{X} — mix -пополнение E -нормированного пространства X , то любое всюду плотное подмножество X является всюду плотным в \bar{X} . В частности, X всюду плотно в \bar{X} .

Согласно теореме Гордона [2, 10.3.4, 10.4.1, 10.4.3 (2)] спуск $\mathcal{R}\downarrow$, снабженный спусками линейных операций и отношения порядка, является расширенным пространством Канторовича, линейно и порядково изоморфным E . Для удобства будем считать, что $E = \mathcal{R}\downarrow$, причем $\text{mix}_E \pi_i e_i = \bigsqcup_{i \in I} \pi_i e_i$ для любых $(\pi_i)_{i \in I} \in \text{Prt}(B)$ и $(e_i)_{i \in I} \subset E$. Также будем считать, что $1_E = 1^\wedge$. (В этом случае $\lambda 1_E = \lambda^\wedge$ для всех $\lambda \in \mathbb{R}$ и спуск умножения из \mathcal{R} совпадает с умножением на E , соответствующим выбору 1_E в качестве мультипликативной единицы.) Формально можно начать с рассмотрения произвольной полной булевой алгебры B , после чего ввести $E := \mathcal{R}\downarrow$, $1_E := 1^\wedge$ и затем превратить элементы $b \in B$ в порядковые проекторы на E , для всех $e \in E$ полагая be равным перемешиванию $(e, 0)$ относительно (b, b^\perp) , где b^\perp — дополнение b в B .

Нормированным пространством над подполем $F \subset \mathbb{R}$ назовем векторное пространство над F , снабженное \mathbb{R} -значной нормой, а банаховым пространством над F — полное нормированное пространство над F . Следующее утверждение достаточно очевидно.

1.2. Если $(X, +, \cdot, \|\cdot\|)$ — банахово пространство над подполем $F \subset \mathbb{R}$, то умножение $\cdot : F \times X \rightarrow X$ единственным образом продолжается до $\bar{\cdot} : \mathbb{R} \times X \rightarrow X$ так, что $(X, +, \bar{\cdot}, \|\cdot\|)$ является банаховым пространством над \mathbb{R} .

Пополнением нормированного пространства X над подполем $F \subset \mathbb{R}$ условимся называть банахово пространство над F (или, если угодно, над \mathbb{R} , см. 1.2), содержащее X в виде всюду плотного подпространства (над F). Отметим, что всякое нормированное пространство над F имеет пополнение, причем единственное с точностью до изометрии.

1.3. Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}^\circ$ — векторное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$, то $\mathcal{X}\downarrow$ является векторным пространством над \mathbb{R} относительно спуска сложения и умножения $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, определенного формулой $\mathbb{V}^{(B)} \models [\lambda x = \lambda^\wedge x]$. Условимся по умолчанию снабжать $\mathcal{X}\downarrow$ упомянутыми операциями и тем самым считать $\mathcal{X}\downarrow$ векторным пространством над \mathbb{R} .

Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}^\circ$ — векторное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$ и X — векторное подпространство $\mathcal{X}\downarrow$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models [X\uparrow$ — векторное подпространство $\mathcal{X}^\circ]$. Это обстоятельство позволяет в случае $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}^\circ$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$ по умолчанию считать, что $\mathbb{V}^{(B)} \models [X\uparrow$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$.

Следующий факт вытекает (с учетом 1.2) из [2, 11.3.1, 11.3.2] (см. также [1, 8.3.1, 8.3.2]).

1.4. Теорема. (1) Если $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}$ — банахово пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$, то $\mathcal{X}\downarrow := (\mathcal{X}\downarrow, \|\cdot\|_{\mathcal{X}\downarrow})$ является полным E -нормированным пространством. При этом $\text{mix}_{\mathcal{X}\downarrow} \pi_i x_i = \bigsqcup_{i \in I} \pi_i x_i$ для любых $(x_i)_{i \in I} \subset \mathcal{X}\downarrow$ и $(\pi_i)_{i \in I} \in \text{Prt}(B)$.

(2) Всякое E -нормированное пространство X изометрично некоторому всюду плотному подпространству $\tilde{X} \subset_E \mathcal{X}\downarrow$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}$ — банахово пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$. Такое пространство \mathcal{X} внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ единственно с точностью до изометрии. При этом $\tilde{X} = \mathcal{X}\downarrow$ в случае полного E -нормированного пространства X .

1.5. Теорема. (1) Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}^\circ$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$, то $\mathcal{X}\downarrow := (\mathcal{X}\downarrow, \|\cdot\|_{\mathcal{X}\downarrow})$ является mix -полным E -нормированным пространством. Если, кроме того, $X \subset_E \mathcal{X}\downarrow$, $(x_i)_{i \in I} \subset X$ и $(\pi_i)_{i \in I} \in \text{Prt}(B)$, то существование $\text{mix}_X \pi_i x_i$ равносильно включению $\bigsqcup_{i \in I} \pi_i x_i \in X$; при этом $\text{mix}_X \pi_i x_i = \bigsqcup_{i \in I} \pi_i x_i$.

(2) Всякое E -нормированное пространство X изометрично некоторому подпространству $\tilde{X} \subset_E \mathcal{X} \downarrow$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X} - \text{нормированное пространство над } \mathbb{R}^\wedge]$ и $\mathcal{X} = \tilde{X} \uparrow$. Такое пространство \mathcal{X} внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ единственно с точностью до изометрии. При этом $\mathcal{X} \downarrow$ является mix -пополнением \tilde{X} . В частности, если $X - \text{mix-полное } E\text{-нормированное пространство}$, то $\tilde{X} = \mathcal{X} \downarrow$.

◁ (1) Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{Y} - \text{пополнение } \mathcal{X}]$. В частности, $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X} - \text{векторное подпространство банахова пространства } \mathcal{Y} \text{ над } \mathbb{R}^\wedge]$. Тогда $\mathcal{X} \downarrow$ является mix -полным E -нормированным подпространством $\mathcal{Y} \downarrow$. Действительно, замкнутость $\mathcal{X} \downarrow$ относительно линейных операций достаточно очевидна, условие $(\forall \pi \in B)(\forall x \in \mathcal{X} \downarrow)(\pi_{\mathcal{X} \downarrow} x \in \mathcal{X} \downarrow)$ и mix -полнота $\mathcal{X} \downarrow$ вытекают из равенства $\text{suc } \mathcal{X} \downarrow = \mathcal{X} \downarrow$, а соотношение $|\mathcal{X} \downarrow|^{\perp\perp} = E$ обеспечивается неявным предположением $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X} \neq \{0\}]$. Наконец, если $X \subset_E \mathcal{X} \downarrow$, $(x_i)_{i \in I} \subset X$ и $(\pi_i)_{i \in I} \in \text{Prt}(B)$, то $x := \bigsqcup_{i \in I} \pi_i x_i = \text{mix}_{\mathcal{X} \downarrow} \pi_i x_i$, причем как существование $\text{mix}_{\mathcal{X} \downarrow} \pi_i x_i$, так и включение $x \in X$ влекут равенство $x = \text{mix}_X \pi_i x_i$.

(2) Согласно 1.4 (2) всякое E -нормированное пространство X изометрично некоторому подпространству $\tilde{X} \subset_E \mathcal{Y} \downarrow$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{Y} - \text{банахово пространство над } \mathbb{R}^\wedge]$. Положим $\mathcal{X} := \tilde{X} \uparrow$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X} - \text{нормированное пространство над } \mathbb{R}^\wedge]$ (см. 1.3). Согласно (1) спуск $\mathcal{X} \downarrow$ является mix -полным E -нормированным пространством, причем $\tilde{X} \subset_E \mathcal{X} \downarrow = \tilde{X} \uparrow \downarrow = \text{suc } \tilde{X} = \text{mix}_{\mathcal{X} \downarrow} \tilde{X}$.

Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X} \text{ и } \mathcal{Y} - \text{нормированные пространства над } \mathbb{R}^\wedge]$, $X \subset_E \mathcal{X} \downarrow$, $Y \subset_E \mathcal{Y} \downarrow$, $\mathcal{X} = X \uparrow$, $\mathcal{Y} = Y \uparrow$ и $f - \text{изометрия } X \text{ на } Y$, то, как легко видеть, $f \in \mathcal{E}(X, Y)$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [f \uparrow - \text{изометрия } \mathcal{X} \text{ на } \mathcal{Y}]$. ▷

В дальнейшем при рассмотрении какого-либо нормированного пространства \mathcal{X} над \mathbb{R}^\wedge внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ условимся снабжать $\mathcal{X} \downarrow$ спусками линейных операций и нормой $|\cdot| := \|\cdot\|_{\mathcal{X} \downarrow}$ и тем самым считать $\mathcal{X} \downarrow$ (mix -полным) E -нормированным пространством.

1.6. Следствие. Любое E -нормированное пространство имеет mix -пополнение. Если Y и $Z - \text{mix-пополнения } E\text{-нормированного пространства } X$, то пространства Y и Z изометричны, причем существует такая изометрия $f : Y \rightarrow Z$, что $f(x) = x$ для всех $x \in X$.

◁ Существование mix -пополнения вытекает из 1.5 (2). Пусть Y и $Z - \text{mix-пополнения } X$. Для $y \in Y$ положим $f(y) := \text{mix}_{i \in I} \pi_i x_i$, где $(\pi_i)_{i \in I} \in \text{Prt}(B)$ и $(x_i)_{i \in I} \subset X$ таковы, что $y = \text{mix}_Y \pi_i x_i$. Элементарные выкладки показывают, что такое определение функции $f : Y \rightarrow Z$ корректно, откуда сразу следует равенство $f(x) = x$ для всех $x \in X$. Проверка того факта, что f является изометрией Y на Z , также не составляет труда. ▷

1.7. Теорема. Пусть $\mathcal{X} \in \mathbb{V}^{(B)}$, $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X} - \text{нормированное пространство над } \mathbb{R}^\wedge]$, и пусть $X - \text{всюду плотное } E\text{-нормированное подпространство } \mathcal{X} \downarrow$. Тогда следующие свойства подмножества $U \subset X$ равносильны:

- (a) U всюду плотно в X ;
- (b) U всюду плотно в $\mathcal{X} \downarrow$;
- (c) $\mathbb{V}^{(B)} \models [U \uparrow \text{ всюду плотно в } X \uparrow]$;
- (d) $\mathbb{V}^{(B)} \models [U \uparrow \text{ всюду плотно в } \mathcal{X}]$.

◁ Импликация (a)⇒(b) вытекает из [4, 1.5.2].

(b)⇒(d). Из [4, 1.5.5, 1.5.6] следует, что множество U всюду плотно в $\mathcal{X}\downarrow$ тогда и только тогда, когда $(\forall x \in \mathcal{X}\downarrow)(\forall e \in E^{++})(\exists u \in \text{mix}_{x\downarrow} U) |x - u| \leq e$. С учетом 1.5 (1) последнее утверждение равносильно $(\forall x \in \mathcal{X}\downarrow)(\forall e \in E^{++})(\exists u \in \text{сус } U) \mathbb{V}^{(B)} \models [|x - u| \leq e]$, что в силу равенств $(\text{сус } U)\uparrow = (U\uparrow\downarrow)\uparrow = U\uparrow$ означает $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall x \in \mathcal{X})(\forall e \in \mathcal{R}^{++})(\exists u \in U\uparrow) \|x - u\| \leq e]$.

Импликация (d)⇒(c) очевидна.

(c)⇒(a). Из (c) следует $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall x \in X\uparrow)(\forall e \in \mathcal{R}^{++})(\exists u \in U\uparrow) \|x - u\| \leq e]$ или, что то же самое, $(\forall x \in X\uparrow\downarrow)(\forall e \in E^{++})(\exists u \in \text{сус } U) |x - u| \leq e$. Согласно [4, 1.5.5, 1.5.6] и 1.5 (1) последнее означает, что множество U всюду плотно в $X\uparrow\downarrow$, а значит, и в X . ▷

Следующее утверждение вытекает из [2, 10.3.8, 10.3.9].

1.8. Теорема. Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X} - \text{нормированное пространство над } \mathbb{R}^\wedge]$.

(1) Если $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{X}\downarrow$ и $x \in \mathcal{X}\downarrow$, то $\mathbb{V}^{(B)} \models [s\uparrow : \mathbb{N}^\wedge \rightarrow \mathcal{X}^\uparrow]$ и сходимость $s(n) \rightarrow x$ в $\mathcal{X}\downarrow$ равносильна $\mathbb{V}^{(B)} \models [s\uparrow(n) \rightarrow x]$.

(2) Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\sigma : \mathbb{N}^\wedge \rightarrow \mathcal{X}^\uparrow]$ и $x \in \mathcal{X}^\uparrow$, то $\sigma\downarrow : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{X}\downarrow$ и сходимость $\sigma\downarrow(n) \rightarrow x$ в $\mathcal{X}\downarrow$ равносильна $\mathbb{V}^{(B)} \models [\sigma(n) \rightarrow x]$.

2. Принцип ограниченности и теорема Банаха — Штейнгауза для E -нормированных пространств

Пусть X и Y — E -нормированные пространства. Линейный оператор $T : X \rightarrow Y$ называется *ограниченным*, если существует такой элемент $c \in E^+$, что $|Tx| \leq c|x|$ для всех $x \in X$. Множество всех ограниченных линейных операторов из X в Y условимся обозначать символом $\mathcal{L}(X, Y)$. Для $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ полагают $|T| := \inf\{c \in E^+ : (\forall x \in X) |Tx| \leq c|x|\}$. Как легко видеть, $|Tx| \leq |T||x|$ для всех $x \in X$.

Если X и Y — нормированные пространства над подполем $F \subset \mathbb{R}$, то символом $\mathcal{L}(X, Y)$ обозначается множество всех ограниченных линейных (точнее, F -линейных) операторов из X в Y , а норма $\|T\| \in \mathbb{R}$ оператора $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ определяется традиционной формулой $\inf\{c \in \mathbb{R}^+ : (\forall x \in X) \|Tx\| \leq c\|x\|\}$.

Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}, \mathcal{Y} - \text{нормированные пространства над } \mathbb{R}^\wedge \text{ и } \tau \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})]$, то записи $\mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$ и $\|\tau\|$ будут символизировать те элементы $L \in \mathbb{V}^{(B)}$ и $e \in E$, для которых $\mathbb{V}^{(B)} \models [L = \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [e = \|\tau\|]$.

2.1. Теорема. Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}, \mathcal{Y} - \text{нормированные пространства над } \mathbb{R}^\wedge]$, $X \subseteq_E \mathcal{X}\downarrow$, $Y \subseteq_E \mathcal{Y}\downarrow$. Учитывая 1.3, будем рассматривать $X\uparrow$ и $Y\uparrow$ как нормированные подпространства \mathcal{X} и \mathcal{Y} над \mathbb{R}^\wedge внутри $\mathbb{V}^{(B)}$.

(1) Если $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, то $T \in \mathcal{L}(X\uparrow, Y\uparrow)$, $\mathbb{V}^{(B)} \models [T\uparrow \in \mathcal{L}(X\uparrow, Y\uparrow)]$ и $|T| = \|T\uparrow\|$.

(2) Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})]$, то $\tau\downarrow \in \mathcal{L}(\mathcal{X}\downarrow, \mathcal{Y}\downarrow)$ и $|\tau\downarrow| = \|\tau\|$.

(3) Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\tau \in \mathcal{L}(X\uparrow, Y\uparrow)]$, то $\tau\downarrow|_X \in \mathcal{L}(X, Y\uparrow\downarrow)$ и $|\tau\downarrow|_X = \|\tau\|$.

(4) Для любого оператора $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ существует единственный элемент $\tau \in \mathbb{V}^{(B)}$ такой, что $\mathbb{V}^{(B)} \models [\tau \in \mathcal{L}(X\uparrow, Y\uparrow)]$ и $\tau\downarrow|_X = T$. При этом $\tau = T\uparrow$, $|T| = \|\tau\|$.

◁ Достаточно привлечь [1, 8.3.3] и воспользоваться внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ тем фактом, что любой оператор $\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$, действующий в нормированных пространствах \mathcal{X} и \mathcal{Y} над \mathbb{R}^\wedge , имеет единственное продолжение $\bar{\tau} \in \mathcal{L}(\bar{\mathcal{X}}, \bar{\mathcal{Y}})$, $\|\bar{\tau}\| = \|\tau\|$, где $\bar{\mathcal{X}}$ и $\bar{\mathcal{Y}}$ — пополнения \mathcal{X} и \mathcal{Y} . ▷

2.2. Лемма. Пусть \bar{X} и \bar{Y} — mix -пополнения E -нормированных пространств X и Y . Тогда любой оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ имеет единственное продолжение $\bar{T} \in \mathcal{L}(\bar{X}, \bar{Y})$; при этом $|T| = |\bar{T}|$.

◁ Благодаря 1.5 (2) можно считать, что $X \subset_E \bar{X} = \mathcal{X}\downarrow$ и $Y \subset_E \bar{Y} = \mathcal{Y}\downarrow$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}$ и \mathcal{Y} — нормированные пространства над $\mathbb{R}^\wedge]$, $\mathcal{X} = X\uparrow$ и $\mathcal{Y} = Y\uparrow$. Согласно 2.1 (1) всякий оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$ экстенционален. Положим $\bar{T} := T\uparrow\downarrow : X\uparrow\downarrow \rightarrow Y\uparrow\downarrow$. Из 2.1 следует, что $\bar{T} \in \mathcal{L}(\bar{X}, \bar{Y})$, $\bar{T}|_X = T$ и $|T| = |\bar{T}|$. Утверждение о единственности \bar{T} вытекает из 2.1 (4). ▷

2.3. Следующее косметическое обобщение принципа ограниченности легко вывести из классической формулировки этого принципа [5, 7.2.5].

Пусть X и Y — нормированные пространства над некоторым подполем поля \mathbb{R} , причем X является полным, и пусть $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Если $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|Tx\| < \infty$ для всех $x \in X$, то $\sup_{T \in \mathcal{T}} \|T\| < \infty$.

2.4. Теорема. Пусть X и Y — E -нормированные пространства, причем X является полным, и пусть $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$. Если для каждого элемента $x \in X$ множество $\{|Tx| : T \in \mathcal{T}\}$ порядково ограничено, то множество $\{|T| : T \in \mathcal{T}\}$ порядково ограничено.

◁ Пусть \bar{Y} — mix -пополнение пространства Y (см. 1.6). Тогда подмножество $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$ является также подмножеством $\mathcal{L}(X, \bar{Y})$, причем нормы любого оператора $T \in \mathcal{T}$, вычисленные в $\mathcal{L}(X, Y)$ и $\mathcal{L}(X, \bar{Y})$, совпадают.

Согласно 1.4 (2) и 1.5 (2) можно считать, что $X = \mathcal{X}\downarrow$ и $\bar{Y} = \mathcal{Y}\downarrow$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}$ — банахово пространство над \mathbb{R}^\wedge , \mathcal{Y} — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$. Пусть $(\forall x \in X)(\exists e \in E)(\forall T \in \mathcal{T}) |Tx| \leq e$ (согласно условию теоремы). Тогда с учетом соотношения $\mathbb{V}^{(B)} \models [|Tx| = \|T\uparrow x\|]$ имеем

$$(\forall x \in \mathcal{X}\downarrow)(\exists e \in E)(\forall \tau \in \{T\uparrow : T \in \mathcal{T}\}) \mathbb{V}^{(B)} \models [\|\tau x\| \leq e].$$

Используя равенство $\mathcal{T}\uparrow\uparrow = \{T\uparrow : T \in \mathcal{T}\}\uparrow$, получаем

$$\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall x \in \mathcal{X})(\exists e \in E)(\forall \tau \in \mathcal{T}\uparrow\uparrow) \|\tau x\| \leq e].$$

Кроме того, из 2.1 следует $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{T}\uparrow\uparrow \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})]$. Применяя утверждение 2.3 внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, последовательно выводим $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\exists e \in E)(\forall \tau \in \mathcal{T}\uparrow\uparrow) \|\tau\| \leq e]$; $(\exists e \in E)(\forall \tau \in \{T\uparrow : T \in \mathcal{T}\}) \mathbb{V}^{(B)} \models [\|\tau\| \leq e]$; $(\exists e \in E)(\forall T \in \mathcal{T}) \|T\uparrow\| \leq e$. Остается заметить, что $|T| = \|T\uparrow\|$ согласно 2.1 (1). ▷

2.5. Следующее обобщение теоремы Банаха — Штейнгауза легко выводится из классической версии этой теоремы [5, 7.2.9].

Пусть X и Y — нормированные пространства над некоторым подполем поля \mathbb{R} , причем Y является полным, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, U — всюду плотное подмножество X , для каждого элемента $u \in U$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n u \in Y$ и имеется такое число $c \in \mathbb{R}^+$, что $\|T_n\| \leq c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такой оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, что $\|T\| \leq c$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = Tx$ для всех $x \in X$.

2.6. Теорема. Пусть X и Y — E -нормированные пространства, причем Y является полным, $(T_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, U — всюду плотное подмножество X , для каждого элемента $u \in U$ существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n u \in Y$ и имеется такой элемент $c \in E^+$, что $|T_n| \leq c$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Тогда существует такой оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, что $|T| \leq c$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} T_n x = Tx$ для всех $x \in X$.

◁ Предварительно докажем сформулированное утверждение для случая, когда пространство X является mix -полным.

Учитывая 1.4(2) и 1.5(2), можем считать, что $X = \mathcal{X}\downarrow$ и $Y = \mathcal{Y}\downarrow$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}$ и \mathcal{Y} — нормированные пространства над \mathbb{R}^\wedge , причем \mathcal{Y} полно].

Положим $s(n) := T_n\uparrow$ для $n \in \mathbb{N}$. Из 2.1 следует, что $s : \mathbb{N} \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\downarrow$ и $\mathcal{L}(X, Y) = \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\downarrow\downarrow$, а значит, $\mathbb{V}^{(B)} \models [s\uparrow : \mathbb{N}^\wedge \rightarrow \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [s\uparrow(n^\wedge) = T_n\uparrow]$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Согласно 1.7 имеем $\mathbb{V}^{(B)} \models [U\uparrow$ всюду плотно в $\mathcal{X}]$. Кроме того, $\|T_n\uparrow\| = |T_n| \leq c$ для всех $n \in \mathbb{N}$ (см. 2.1(1)), тем самым $(\forall n \in \mathbb{N}) \mathbb{V}^{(B)} \models [\|s\uparrow(n^\wedge)\| \leq c]$, т.е. $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall n \in \mathbb{N}^\wedge) \|s\uparrow(n)\| \leq c]$. Наконец, по условию теоремы имеем $(\forall u \in U)(\exists y \in Y) s(n)u \rightarrow y$, откуда с учетом 1.8(1) следует, что $(\forall u \in U)(\exists y \in Y) \mathbb{V}^{(B)} \models [s\uparrow(n)u \rightarrow y]$, т.е. $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall u \in U\uparrow)(\exists y \in \mathcal{Y}) s\uparrow(n)u \rightarrow y]$.

Применяя 2.5 внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, получаем $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\exists \tau) \tau \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y}), \|\tau\| \leq c, (\forall x \in \mathcal{X}) s\uparrow(n)x \rightarrow \tau x]$, а значит, найдется такой элемент $\tau \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})\downarrow$, что $\|\tau\| \leq c$ и $(\forall x \in X) \mathbb{V}^{(B)} \models [s\uparrow(n)x \rightarrow \tau x]$. Положим $T := \tau\downarrow$. Тогда с учетом 1.8(1) и 2.1(2) имеем $T \in \mathcal{L}(X, Y)$, $|T| \leq c$ и $(\forall x \in X) T_n x \rightarrow T x$.

Пусть теперь X — произвольное (не обязательно mix -полное) E -нормированное пространство и пусть \bar{X} — mix -пополнение X (см. 1.6). Поскольку пространство Y является полным, оно mix -полно и поэтому совпадает со своим mix -пополнением. Согласно 2.2 для каждого $n \in \mathbb{N}$ существует (единственное) продолжение $\bar{T}_n \in \mathcal{L}(\bar{X}, Y)$ оператора $T_n \in \mathcal{L}(X, Y)$, причем $|\bar{T}_n| = |T_n| \leq c$. Кроме того, будучи всюду плотным в X , множество U всюду плотно в \bar{X} (см. 1.1). Наконец, для каждого элемента $u \in U$ имеем $(\forall n \in \mathbb{N}) \bar{T}_n u = T_n u$, а значит, существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{T}_n u = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n u \in Y$.

Таким образом, условия доказываемой теоремы выполняются для \bar{X} , Y , $(\bar{T}_n)_{n \in \mathbb{N}}$, U и c , причем пространство \bar{X} является mix -полным. Следовательно, существует такой оператор $\bar{T} \in \mathcal{L}(\bar{X}, Y)$, что $|\bar{T}| \leq c$ и $\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{T}_n x = \bar{T} x$ для всех $x \in \bar{X}$. Полагая $T := \bar{T}|_X$, получаем искомый оператор $T \in \mathcal{L}(X, Y)$. ▷

3. Принцип ограниченности на выпуклом mix -компактном множестве

Пусть X — E -нормированное пространство, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ и $x \in X$. Будем говорить, что *последовательность* $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ *аппроксимирует* x , если для любого $k \in \mathbb{N}$ множество $\{x_n : n \geq k\}$ аппроксимирует x , т.е. $(\forall k \in \mathbb{N}) \inf_{n \geq k} |x_n - x| = 0$.

Множество $K \subset X$ назовем *mix -компактным*, если K является mix -полным и для любой последовательности $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset K$ существует элемент $x \in K$ такой, что $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ аппроксимирует x . (Ясно, что в случае $E = \mathbb{R}$ mix -компактность равносильна компактности в топологии нормы.)

3.1. Как легко видеть, mix -компактность является абсолютным свойством в следующем смысле.

Если X и \bar{X} — E -нормированные пространства и $K \subset X \subset_E \bar{X}$, то mix -компактность K в X равносильна mix -компактности K в \bar{X} .

3.2. Теорема. Пусть $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$.

(1) Подмножество $K \subset \mathcal{X}\downarrow$ mix -компактно тогда и только тогда, когда K является mix -полным и $\mathbb{V}^{(B)} \models [K\uparrow$ — компактное подмножество \mathcal{X}].

(2) $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{K}$ — компактное подмножество \mathcal{X}] тогда и только тогда, когда $\mathcal{K}\downarrow$ — mix -компактное подмножество $\mathcal{X}\downarrow$.

◁ (1) Компактность множества $K \uparrow$ внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ равносильна соотношению $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall \sigma : \mathbb{N}^\wedge \rightarrow K \uparrow)(\exists x \in K \uparrow)(\forall k \in \mathbb{N}^\wedge) \inf \{\|\sigma(n) - x\| : n \geq k\} = 0]$, которое с учетом [2, 5.7.8] и равенства $\text{сус } K = K$ (см. 1.5 (1)) переписывается в виде $(\forall s : \mathbb{N} \rightarrow K)(\exists x \in K)(\forall k \in \mathbb{N}) \varphi$, где $\varphi := (\mathbb{V}^{(B)} \models [\inf \{\|s \uparrow(n) - x\| : n \geq k\} = 0])$, причем $\varphi \Leftrightarrow \mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall e \in \mathcal{R}^+)((\forall n \geq k^\wedge)(e \leq \|s \uparrow(n) - x\|) \Rightarrow e = 0)] \Leftrightarrow (\forall e \in E^+)((\forall n \geq k)(e \leq \|s(n) - x\|) \Rightarrow e = 0) \Leftrightarrow \inf \{\|s(n) - x\| : n \geq k\} = 0$.

(2) Положим $K := \mathcal{K} \downarrow$. Если $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{K} - \text{компактное подмножество } \mathcal{X}]$, то, учитывая очевидную mix -полноту множества K и применяя (1), заключаем, что K является mix -компактным подмножеством $\mathcal{X} \downarrow$. Если же $K - \text{mix}$ -компактное подмножество $\mathcal{X} \downarrow$, то с учетом равенства $K \uparrow = \mathcal{K}$ имеем $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{K} - \text{компактное подмножество } \mathcal{X}]$ согласно (1). ▷

Пусть X — нормированное пространство над \mathbb{R} , и пусть F — подполе \mathbb{R} . Множество $U \subset X$ назовем F -выпуклым, если $(1 - \lambda)u + \lambda v \in U$ для всех $u, v \in U$ и $\lambda \in [0, 1]_F$, где $[0, 1]_F := F \cap [0, 1]$. Выпуклыми подмножествами X , как обычно, считаются \mathbb{R} -выпуклые множества. Как легко видеть, если множество $U \subset X$ замкнуто и F -выпукло, то U — выпуклое подмножество X .

Следующая теорема является аналогом классического принципа ограниченности на выпуклом компакте (ср. [6, 2.9]).

3.3. Теорема. Пусть X и Y — E -нормированные пространства, пусть $\mathcal{T} \subset \mathcal{L}(X, Y)$, и пусть K — выпуклое mix -компактное подмножество X . Если множество $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{T}\}$ порядково ограничено для каждого элемента $x \in K$, то множество $\{\|Tx\| : T \in \mathcal{T}, x \in K\}$ порядково ограничено.

◁ Принимая во внимание 1.4 (2) и 1.2, можно считать, что X и Y — всюду плотные E -нормированные подпространства спусков $\mathcal{X} \downarrow$ и $\mathcal{Y} \downarrow$ соответственно, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}$ и $\mathcal{Y} - \text{ банаховы пространства над } \mathcal{R}]$. Из 1.7 следует, что $\mathbb{V}^{(B)} \models [X \uparrow \text{ всюду плотно в } \mathcal{X}]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [Y \uparrow \text{ всюду плотно в } \mathcal{Y}]$. Пусть $\mathcal{K} := K \uparrow$.

Согласно 3.2 (1) имеем $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{K} - \text{компактное подмножество } \mathcal{X}^*]$.

По условию теоремы $(\forall x, y \in K)(\forall \lambda \in [0, 1]_{\mathbb{R}})(\exists z \in K) z = (1^\wedge - \lambda^\wedge)x + \lambda^\wedge y$. Заметим, что $\mathbb{V}^{(B)} \models [([0, 1]_{\mathbb{R}})^\wedge = [0^\wedge, 1^\wedge]_{\mathbb{R}^\wedge}]$ в силу ограниченности формулы $\varphi(S, 0, 1, \mathbb{R})$, определяющей равенство $S = [0, 1]_{\mathbb{R}}$ (см. [2, 4.2.9]). Следовательно,

$$\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall x, y \in \mathcal{K})(\forall \lambda \in [0^\wedge, 1^\wedge]_{\mathbb{R}^\wedge})(\exists z \in \mathcal{K}) z = (1^\wedge - \lambda)x + \lambda y],$$

т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{K} - \mathbb{R}^\wedge\text{-выпуклое подмножество } \mathcal{X}^*]$. Поскольку $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{K}$ замкнуто в $\mathcal{X}^*]$, заключаем, что $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{K} - \text{выпуклое подмножество } \mathcal{X}^*]$.

По условию теоремы имеем $(\forall x \in K)(\exists e \in E)(\forall T \in \mathcal{T}) \|Tx\| \leq e$, а значит,

$$(\forall x \in K)(\exists e \in E)(\forall \tau \in \{T \uparrow : T \in \mathcal{T}\}) \mathbb{V}^{(B)} \models [\|\tau x\| \leq e]$$

или, что то же самое, $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall x \in \mathcal{K})(\exists e \in \mathcal{R})(\forall \tau \in \mathcal{T} \uparrow \uparrow) \|\tau x\| \leq e]$. Согласно 2.1 $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{T} \uparrow \uparrow \subset \mathcal{L}(X \uparrow, Y \uparrow)]$. Поскольку $\mathbb{V}^{(B)} \models [X \uparrow \text{ всюду плотно в } \mathcal{X}^*]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{Y} - \text{ банахово пространство}]$, внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ каждый ограниченный оператор $\tau \in \mathcal{L}(X \uparrow, Y \uparrow)$ имеет единственное продолжение $\bar{\tau} \in \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})$. Пусть $\bar{\mathcal{T}}$ такой элемент $\mathbb{V}^{(B)}$, что $\mathbb{V}^{(B)} \models [\bar{\mathcal{T}} = \{\bar{\tau} : \tau \in \mathcal{T} \uparrow \uparrow\}]$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models [\bar{\mathcal{T}} \subset \mathcal{L}(\mathcal{X}, \mathcal{Y})]$ и $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\forall x \in \mathcal{K})(\exists e \in \mathcal{R})(\forall \tau \in \bar{\mathcal{T}}) \|\tau x\| \leq e]$.

Таким образом, $\mathcal{X}, \mathcal{Y}, \bar{\mathcal{T}}$ и \mathcal{K} удовлетворяют внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ условиям принципа ограниченности на выпуклом компакте (см. [6, 2.9]). Используя этот принцип внутри $\mathbb{V}^{(B)}$, заключаем, что $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\exists e \in \mathcal{R})(\forall \tau \in \bar{\mathcal{T}})(\forall x \in \mathcal{K}) \|\tau x\| \leq e]$. Поскольку $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{K} \subset X \uparrow]$, последнее соотношение справедливо и для $\mathcal{T} \uparrow \uparrow$,

т. е. $\mathbb{V}^{(B)} \models [(\exists e \in \mathcal{R})(\forall \tau \in \mathcal{T}\uparrow)(\forall x \in \mathcal{X}) \|\tau x\| \leq e]$, откуда следует, что $(\exists e \in E)(\forall \tau \in \{T\uparrow : T \in \mathcal{T}\})(\forall x \in K) \mathbb{V}^{(B)} \models [\|\tau x\| \leq e]$ или, что то же самое, $(\exists e \in E)(\forall T \in \mathcal{T})(\forall x \in K) [Tx] \leq e$. \triangleright

В завершение покажем (см. 3.4), что понятие циклически компактного подмножества B -циклического банахова пространства (см. [1, 7.3.1, 7.3.3, 8.5.1]) является в определенном смысле частным случаем понятия mix -компактного подмножества E -нормированного пространства.

Для удобства предварительно напомним соответствующие определения.

Согласно [1, 8.3.5] под B -циклическим банаховым пространством можно понимать E -нормированное подпространство $X := \{x \in \bar{X} : (\exists \lambda \in \mathbb{R}^+) |x| \leq \lambda 1_E\}$ какого-либо полного E -нормированного пространства \bar{X} , снабженное \mathbb{R} -значной нормой $\|x\| := \inf \{\lambda \in \mathbb{R}^+ : |x| \leq \lambda 1_E\}$.

Обозначим через $\text{Pr}_\mathbb{N}(B)$ множество всех последовательностей $\nu : \mathbb{N} \rightarrow B$, являющихся разбиениями единицы булевой алгебры B . Для $\nu_1, \nu_2 \in \text{Pr}_\mathbb{N}(B)$ формула $\nu_1 \ll \nu_2$ служит сокращением следующего утверждения: если $m, n \in \mathbb{N}$ и $\nu_1(m) \wedge \nu_2(n) \neq 0_B$, то $m < n$.

Пусть X — B -циклическое банахово пространство.

Для mix -полного подмножества $K \subset X$, последовательности $s : \mathbb{N} \rightarrow K$ и разбиения $\nu \in \text{Pr}_\mathbb{N}(B)$ полагают $s_\nu := \text{mix}_{n \in \mathbb{N}} \nu(n)s(n)$. Циклической подпоследовательностью последовательности $s : \mathbb{N} \rightarrow K$ называется всякая последовательность вида $(s_{\nu_k})_{k \in \mathbb{N}}$, где $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{Pr}_\mathbb{N}(B)$ и $(\forall k \in \mathbb{N}) \nu_k \ll \nu_{k+1}$.

Подмножество $K \subset X$ называется циклически компактным (см. [1, 8.5.1]), если K является mix -полным и любая последовательность элементов K имеет циклическую подпоследовательность, сходящуюся по норме $\|\cdot\|$ к некоторому элементу K .

3.4. Теорема. Пусть X — B -циклическое банахово пространство. Подмножество $K \subset X$ является циклически компактным тогда и только тогда, когда K mix -компактно.

\triangleleft (\Rightarrow) Пусть K — циклически компактное подмножество X . Рассмотрим произвольную последовательность $s : \mathbb{N} \rightarrow K$. По определению циклической компактности найдутся последовательность $(\nu_k)_{k \in \mathbb{N}} \subset \text{Pr}_\mathbb{N}(B)$ и элемент $x \in K$ такие, что $(\forall k \in \mathbb{N}) (\nu_k \ll \nu_{k+1})$ и $\|s_{\nu_k} - x\| \rightarrow 0$. Прямой анализ этих соотношений показывает, что $\inf \{|\varkappa - x| : \varkappa \in \text{mix}_X \{s(n) : n \geq k\}\} = 0$ для всех $k \in \mathbb{N}$, а значит, последовательность s аппроксимирует элемент $x \in K$, поскольку в случае $\varkappa = \text{mix}_{n \geq k} \pi_n s(n)$, где $(\pi_n)_{n \geq k} \in \text{Pr}(B)$, имеем

$$\pi_m (\inf_{n \geq k} |s(n) - x|) \leq \pi_m |s(m) - x| = |\pi_m s(m) - \pi_m x| = \pi_m |\varkappa - x| \leq |\varkappa - x|$$

для всех $m \geq k$ и, следовательно,

$$\inf_{n \geq k} |s(n) - x| = \sup_{m \geq k} \pi_m (\inf_{n \geq k} |s(n) - x|) \leq |\varkappa - x|.$$

(\Leftarrow) Пусть теперь K — mix -компактное подмножество X , и пусть $s : \mathbb{N} \rightarrow K$. Благодаря 1.5 (2) можно считать, что $X \subset_E \mathcal{X}^\downarrow$, где $\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{X}^\downarrow$ — нормированное пространство над $\mathbb{R}^\wedge]$. Положим $\sigma := s^\uparrow$. Тогда $\mathbb{V}^{(B)} \models [\sigma : \mathbb{N}^\wedge \rightarrow K^\uparrow]$. Кроме того, из 3.1 и 3.2 (1) следует, что $\mathbb{V}^{(B)} \models [K^\uparrow$ — компактное подмножество $\mathcal{X}^\downarrow]$. Применив внутри $\mathbb{V}^{(B)}$ классический критерий компактности, рассмотрим такие элементы $x \in K$ и $\mathcal{N} \in \mathbb{V}^{(B)}$, что

$$\mathbb{V}^{(B)} \models [\mathcal{N} : \mathbb{N}^\wedge \rightarrow \mathbb{N}^\wedge, \mathcal{N}(k) < \mathcal{N}(k+1), \|\sigma(\mathcal{N}(k)) - x\| \leq \frac{1}{k} \text{ для всех } k \in \mathbb{N}^\wedge].$$

Положим $\nu_k(n) := \llbracket \mathcal{N}(k^\wedge) = n^\wedge \rrbracket$ для всех $k, n \in \mathbb{N}$. Элементарная проверка показывает, что $\nu_k \in \text{Prt}_{\mathbb{N}}(B)$ и $(\forall k \in \mathbb{N}) \nu_k \ll \nu_{k+1}$. Кроме того, для всех $k \in \mathbb{N}$ имеем $\mathbb{V}^{(B)} \models [s_{\nu_k} = \sigma(\mathcal{N}(k^\wedge))]$ и, следовательно, $\|s_{\nu_k} - x\| \leq \frac{1}{k}$. \triangleright

ЛИТЕРАТУРА

1. Кусраев А. Г. Мажорируемые операторы. М.: Наука, 2003.
2. Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С. Введение в булевозначный анализ. М.: Наука, 2005.
3. Ганиев И. Г., Кудайбергенев К. К. Принцип равномерной ограниченности Банаха — Штейнгауза для операторов в пространствах Банаха — Канторовича над L^0 // *Мат. тр.* 2006. Т. 9, № 1. С. 21–33.
4. Гутман А. Е. Банаховы расслоения в теории решеточно нормированных пространств // *Линейные операторы, согласованные с порядком*. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 1995. С. 63–211.
5. Кутателадзе С. С. Основы функционального анализа. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2006.
6. Рудин У. Функциональный анализ. М.: Мир, 1977.

Статья поступила 2 июня 2009 г.

Гутман Александр Ефимович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
gutman@math.nsc.ru

Лисовская Светлана Алексеевна
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
lisovskaya_sveta@ngs.ru