Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 519.172.2

ПРЕДПИСАННАЯ 2–ДИСТАНЦИОННАЯ $(\Delta+2)$–РАСКРАСКА ПЛОСКИХ ГРАФОВ С ОБХВАТОМ 6 И $\Delta \geq 24$

О. В. Бородин, А. О. Иванова

Аннотация. В работе [1] доказано, что каждый плоский граф с обхватом $g \geq 6$ и максимальной степенью $\Delta \geq 8821$ 2-дистанционно $(\Delta+2)$-раскрашиваем. Мы доказываем, что каждый плоский граф с $g \geq 6$ и $\Delta \geq 24$ предписанно 2-дистанционно $(\Delta+2)$-раскрашиваем.

Ключевые слова: плоский граф, 2-дистанционная раскраска, предписанная раскраска.

1. Введение

Одной из наиболее естественных моделей в проблеме распределения радиочастот в сетях мобильного телефонирования является (p,q)-раскраска. Вершины плоского графа (источники) должны быть раскрашены (получить частоты) так, чтобы цвета (целые числа) любых двух вершин, находящихся друг от друга на расстоянии 1, отличались не менее чем на p, а вершин на расстоянии 2 — не менее чем на q. На практике $p \geq q$, поскольку с увеличением расстояния интерференция волн ослабевает. Иногда множество допустимых частот может меняться от одного источника к другому, что соответствует предписанной (p,q)-раскраске.

Случай $p = q = 1$ в теории графов известен как задача 2-дистанционной раскраски плоских графов как в обычном, так и предписанном ее вариантах. Часто результаты по 2-дистанционной раскраске переносятся на произвольную (p,q)-раскраску без большого труда (см., например, [2–4]). Так, в [3, 4] для плоских графов достаточно большого обхвата получены верхняя и нижняя оценки (p,q)-хроматического числа, отличающиеся друг от друга на аддитивную константу, которая не зависит от p. В данной статье мы рассматриваем только случай $p = q = 1$.

Под *графом* мы понимаем неориентированный граф без петель и кратных ребер. Через $V(G)$, $E(G)$, $\Delta(G)$ и $g(G)$ обозначим множества вершин, ребер, максимальную степень и обхват графа G соответственно. (Мы будем опускать аргумент всякий раз, когда граф ясен из контекста.)

Раскраска $\varphi : V(G) \to \{1, 2, \dots, k\}$ графа G называется 2-*дистанционной*, если любые две вершины на расстоянии не менее 2 друг от друга получают разные цвета. Минимальное число цветов в 2-дистанционных раскрасках графа G

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 08–01–00673, 09–01–00244). Работа второго автора также поддержана грантом президента России для молодых ученых МК–2302.2008.1.

называется его 2-*дистанционным хроматическим числом* и обозначается через $\chi_2(G)$.

Если каждая вершина v графа G имеет множество $L(v)$ допустимых цветов, где $|L(v)| \geq k$, мы будем говорить, что $V(G)$ имеет *предписание L мощности k*. Будем говорить, что граф G *предписанно 2-дистанционно k-раскрашиваем*, если любое предписание L мощности k допускает 2-дистанционную раскраску φ такую, что $\varphi(v) \in L(v)$ для всех $v \in V(G)$. Наименьшее k, при котором G предписанно 2-дистанционно k-раскрашиваем, есть *предписанное 2-дистанционное хроматическое число графа G*, обозначаемое через $\chi_2^l(G)$.

В 1977 г. Вегнер [5] (см. также книгу Йенсена и Тофта [6]) высказал следующую гипотезу.

Гипотеза. *Для любого плоского графа выполняются следующие условия:*
$\chi_2 \leq 7$, *если* $\Delta = 3$*;*
$\chi_2 \leq \Delta + 5$, *если* $4 \leq \Delta \leq 7$*;*
$\chi_2 \leq \lfloor \frac{3\Delta}{2} \rfloor + 1$ *в противном случае.*

Были получены следующие верхние оценки: $\lfloor \frac{9\Delta}{5} \rfloor + 2$ при $\Delta \geq 749$ Агнарсоном и Холдорсоном [7, 8] и $\lceil \frac{9\Delta}{5} \rceil + 1$ при $\Delta \geq 47$ О. В. Бородиным, Брусмой, А. Н. Глебовым и Ван-Ден-Хойвелом [2, 9]. Наилучшие из известных верхних оценок при больших Δ принадлежат Молою и Салаватипуру [10, 11]: $\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 78$ при всех Δ и $\lceil \frac{5\Delta}{3} \rceil + 25$ при $\Delta \geq 241$.

Ясно, что $\chi_2^l(G) \geq \chi_2(G) \geq \Delta(G) + 1$ для любого графа G. В [12, 13] нами получены достаточные условия (в терминах g и Δ) того, что 2-дистанционное хроматическое число плоского графа достигает тривиальной нижней границы $\Delta+1$. В частности, мы устанавливаем, что минимальное g такое, что $\chi_2 = \Delta+1$, если Δ достаточно велико (в зависимости от g), равно 7. Следующая теорема (см. [14]) переносит результаты из [12, 13] на предписанную 2-дистанционную раскраску.

Теорема 1. *Если G — плоский граф, то $\chi_2^l = \Delta+1$ в каждом из следующих случаев:*
(i) $\Delta = 3$, $g \geq 24$*;*
(ii) $\Delta = 4$, $g \geq 15$*;*
(iii) $\Delta = 5$, $g \geq 13$*;*
(iv) $\Delta = 6$, $g \geq 12$*;*
(v) $\Delta \geq 7$, $g \geq 11$*;*
(vi) $\Delta \geq 9$, $g = 10$*;*
(vii) $\Delta \geq 15$, $g \geq 8$*;*
(viii) $\Delta \geq 30$, $g = 7$.
Существуют плоские графы с $g \leq 6$ такие, что $\chi_2^l = \Delta + 2$ для произвольно больших Δ.

О. В. Бородин, А. О. Иванова и Т. К. Неустроева [15, 16] доказали, что $\chi_2 = \Delta + 1$ при всех $\Delta \geq 31$ для плоских графов обхвата 6 при дополнительном условии, что каждое ребро инцидентно вершине степени 2.

Дворжак, Крал, Ниедлы и Шкрековский [1] получили следующий результат.

Теорема 2. *Каждый плоский граф с $\Delta \geq 8821$ и $g \geq 6$ имеет $\chi_2 \leq \Delta + 2$.*

Целью данной статьи является усиление теоремы 2.

Теорема 3. *Каждый плоский граф $\Delta \geq 24$ и $g \geq 6$ имеет $\chi_2^l \leq \Delta + 2$.*

2. Доказательство теоремы 3

Пусть G' — контрпример к теореме 3, и пусть G — граф с наименьшим числом ребер такой, что $\Delta(G) \leq \Delta(G') = \Delta$, $g(G) \geq g(G')$ и $\chi_2^l(G) > \Delta + 2$. Множество графов с этими свойствами непусто, поскольку, например, G' обладает ими всеми. Чтобы доказать теорему 3, мы покажем, что G не существует, что будет противоречить существованию G'.

Без ограничения общности можем считать, что G связен и не содержит висячих ребер. Формулу Эйлера $|V| - |E| + |F| = 2$ перепишем в виде

$$\sum_{v \in V}(2d(v) - 6) + \sum_{f \in F}(r(f) - 6) = -12, \qquad (1)$$

где F — множество граней графа G, $d(v)$ — степень вершины v, а $r(f)$ — ранг грани f.

Через $\mu(v) = 2d(v) - 6$ обозначим *заряд* вершины v графа G, а *заряд* $\mu(f)$ любой грани f положим равным $r(f) - 6$. Заметим, что заряд 2-вершины равен -2, а заряды всех остальных вершин и всех граней неотрицательны.

Чтобы доказать несуществование G, сначала опишем некоторые структурные свойства графа G, а затем, основываясь на них, перераспределим заряды, сохраняя их сумму, так, чтобы все новые заряды были неотрицательными (что даст противоречие с (1)).

Замечание 1. Ввиду минимальности G граф, полученный из G удалением любого ребра uv, имеет предписанную 2-дистанционную $(\Delta+2)$-раскраску. Если удается перекрасить вершины u и v цветами из их предписаний так, чтобы эти цвета отличались от цветов вершин на расстоянии не менее 2 от u и v, то G получает 2-дистанционную $(\Delta + 2)$-раскраску, согласованную с заданным предписанием.

2.1. Структурные свойства графа G. Под *k-цепью* мы понимаем цепь, состоящую в точности из k вершин степени 2.

Лемма 1. *В G нет k-цепи при $k \geq 3$, а концевые вершины 2-цепи имеют степень Δ.*

Доказательство. Предположим, что $v_0v_1v_2v_3$ — цепь, где $d(v_0) \geq 3$, $d(v_1) = d(v_2) = 2$, а $d(v_3) \leq \Delta - 1$. Возьмем предписанную 2-дистанционную $(\Delta + 2)$-раскраску графа $G - v_1v_2$ (существующую по замечанию 1) и покрасим вершины v_1 и v_2 в этом порядке (каждая вершина имеет не более $\Delta + 2$ ограничений на выбор цвета). $\square$

Лемма 2. *В G нет двух вершин, соединенных двумя 2-цепями.*

Доказательство. Пусть вершины u и v соединены двумя разными 2-цепями ux_1x_2v и uy_1y_2v, где $d(x_i) = d(y_i) = 2$ при $1 \leq i \leq 2$, а $d(u) = d(v) = \Delta$. Возьмем раскраску графа $G - x_1x_2$ и обесцветим 2-вершины этих 2-цепей. Каждая из вершин x_1, x_2, y_1 и y_2 имеет Δ ограничений на выбор цвета, следовательно, на каждой из них остается по 2 допустимых цвета. Задача предписанной 2-дистанционной раскраски этих четырех вершин сводится к задаче обычной (не 2-дистанционной) предписанной раскраски 4-цикла, которая, как известно, легко решается. $\square$

Вершина v называется *младшей*, если $3 \leq d(v) \leq 5$, *средней*, если $6 \leq d(v) \leq 11$, и *старшей*, если $d(v) \geq 12$. *Специальной* называется 3-вершина, которая смежна с Δ-вершиной и инцидентна двум 1-цепям, ведущим в младшие или средние вершины.

Лемма 3. *Если* Δ*-вершина* v_3 *имеет двух последовательных специальных соседей* v *и* z*, где* v *окружена* 6*-гранями* $wv_1'v_1vv_2v_2'$*,* $zu_1v_1'v_1vv_3$ *и* $z'u_2v_2'v_2vv_3$*, то хотя бы одна из вершин* v_1'*,* v_2' *не является специальной.*

Доказательство. Предположим противное. Удалим 2-вершину v_1 этой конфигурации, раскрасим полученный граф, затем обесцветим все четыре специальные вершины конфигурации и все 2-вершины графа G, смежные со специальными вершинами. Сначала раскрасим специальные вершины конфигурации следующим образом.

Через L^* обозначим остаточное предписание; можно считать, что $L^*(v_1') = L^*(v) = 3$ и $L^*(v_2') = L^*(z) = 2$. Если $L^*(v_1') \neq L^*(v)$, то сначала мы красим v в цвет из $L^*(v) \setminus L^*(v_1')$; затем можно покрасить z, v_2' и v_1' в указанном порядке.

Допустим, что $L^*(v_1') = L^*(v) = \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Если найдется цвет $\delta \in L^*(v_2') \cap L^*(z)$, то мы красим z и v_2' в δ, и тогда легко покрасить v и v_2'. Поэтому будем считать, что $L^*(v_2') \cap L^*(z) = \varnothing$. Тогда одна из вершин z и v_2', скажем z, имеет в своем предписании цвет $\varepsilon \notin \{\alpha, \beta, \gamma\}$. Покрасим z в ε, а затем красим v_2', v и v_1' в этом порядке.

Наконец, мы красим 2-вершины конфигурации (заметим, что каждая из них смежна с 3-вершиной и еще одной вершиной степени не более 11). $\square$

2.2. Перераспределение зарядов. Мы используем следующие правила перераспределения зарядов.

R0. Каждая 2-вершина, входящая в 1-цепь, получает заряд 1 от каждой смежной ≥ 3-вершины.

R1. Каждая ≥ 7-грань $f = v_1v_2\dots$ отдает заряд:

(i) $\frac{1}{8}$ каждой инцидентной 2-вершине, входящей в 2-цепь;

(ii) $\frac{5}{8}$ каждой инцидентной младшей или средней вершине v_3, если $d(v_2) = d(v_4) = 2$, а v_1 и v_5 старшие;

(iii) $\frac{1}{4}$ каждой инцидентной младшей или средней вершине v_3, если правило R1(ii) не применимо к v_3, $d(v_2) = 2$, а v_4 либо старшая, либо 2-вершина.

R2. Пусть $f = v_1v_2\dots v_6$ — 6-грань;

(a) если $d(v_1) = d(v_4) = \Delta$, $d(v_2) = d(v_3) = 2$, то f отдает заряд $\frac{1}{8}$ каждой из вершин v_2, v_3;

(b) если $d(v_1) = d(v_5) = \Delta$, $d(v_2) = d(v_4) = 2$, а $d(v_3) = 3$, то f отдает $\frac{3}{4}$ вершине v_3;

(c) если $d(v_2) = d(v_4) = 2$, $d(v_6) = \Delta$, вершины v_1 и v_3 специальные, а v_5 — неспециальная младшая или средняя вершина, то f отдает $\frac{1}{8}$ вершине v_1.

(d) если $d(v_1) = d(v_5) = \Delta$, $d(v_2) = d(v_4) = 3$, а $d(v_3) = 2$, то f отдает $\frac{3}{8}$ каждой из вершин v_2, v_4;

(e) если $d(v_1) = \Delta$, $d(v_2) = 3$, $d(v_3) = 2$, $d(v_4) = 4$, а v_5 старшая, то f отдает $\frac{3}{8}$ вершине v_4;

(f) если $d(v_2) = d(v_4) = 2$, $d(v_6) = \Delta$, $d(v_3) = 3$, вершина v_1 старшая, а v_5 специальная, то f отдает $\frac{1}{4}$ вершине v_3.

Грани ранга 6, фигурирующие в правиле R2t, будем называть T-*трансмитерами*; мы имеем A-трансмитеры, B-трансмитеры и т. д.

R3. Пусть v — вершина степени Δ. Тогда

(a) v отдает $\frac{7}{4}$ каждой смежной 2-вершине, входящей в инцидентную ей 2-цепь, и специальной вершине, $\frac{3}{2}$ неспециальной младшей или средней соседней вершине; другой нестаршей концевой вершине x каждой инцидентной 1-цепи P

вершина v отдает $\frac{3}{4}$, кроме случая, когда P лежит в границе 6-грани, которая инцидентна 2-цепи, в этом случае v отдает вершине x только $\frac{1}{2}$;

(b) v отдает *вдоль ребра* vw каждой 6-грани $f = vwx\dots$:

(i) $\frac{7}{8}$, если w старшая, и $\frac{1}{8}$, если w младшая или средняя, но не специальная;

(ii) $\frac{3}{8}$, если $d(w) = 2$ и x старшая;

(iii) $\frac{1}{8}$, если $d(w) = 2$ и x младшая или средняя, а f инцидентна 2-цепи.

R4. (i) Если v — старшая вершина такая, что $d(v) < \Delta$, то v отдает $\frac{3}{2}$ каждой младшей или средней смежной с ней вершине и $\frac{1}{2}$ другой не старшей концевой вершине каждой инцидентной 1-цепи.

(ii) Каждая средняя вершина v отдает заряд 1 каждой смежной с ней младшей вершине.

R5. Каждая вершина y степени от 3 до 11 отдает заряд $\frac{1}{4}$ специальной вершине, являющейся концом 1-цепи, инцидентной y, кроме того случая, когда y является специальной.

R6. Каждая 3-вершина v, смежная с младшими вершинами v_1, v_2 и 2-вершиной, получает заряд $\frac{1}{8}$ от каждой из вершин v_1, v_2.

Заметим, что правило R6 корректно: оно не может быть применено к v_1 или v_2 в качестве v согласно замечанию 1 (иначе ребро vv_1 или vv_2 может быть удалено).

2.3. Проверка того, что $\mu^*(v) \geq 0$ для $v \in V(G)$. Через $v_1, \dots, v_{d(v)}$ обозначим смежные с v вершины в циклическом порядке.

Случай 0. $d(v) = 2$. По лемме 1 вершина v принадлежит либо 1-цепи, либо 2-цепи. Во втором случае v получает $\frac{7}{4}$ по R3(a) и $2 \times \frac{1}{8}$ по R1(i) или R2(a). В первом случае v получает 1 от каждой смежной с ней вершины по R0. Следовательно, $\mu^*(v) \geq 2 \times 2 - 6 + 2 = 0$ в обоих случаях.

Случай 1. $d(v) = 3$.

Подслучай 1.1. $d(v_i) \geq 3$, где $1 \leq i \leq 3$. Если v не дает $\frac{1}{8}$ ни одному из своих соседей по R6, то $\mu^*(v) = \mu(v) = 2 \times 3 - 6 = 0$.

Предположим, что v отдает $\frac{1}{8}$ вершине v_1. Заметим, что если $d(v_2) \leq 5$ и $d(v_3) \leq 5$, то ребро vv_1 можно удалить согласно замечанию 1. Итак, допустим, что $d(v_2) \geq 6$; тогда v получает не менее 1 от v_2 по R3(a) или R4, а следовательно, $\mu^*(v) \geq 1 - 2 \times \frac{1}{8} > 0$.

Подслучай 1.2. $d(v_i) \geq 3$, где $1 \leq i \leq 2$, а $d(v_3) = 2$.

Если v_1 или v_2 является старшей, то v получает $\frac{3}{2}$ от v_1 или v_2 соответственно по R3(a) или R4(i). Поскольку v отдает 1 вершине v_3, не более $\frac{1}{8}$ вершине v_2 (если R6 применимо) и не более $\frac{1}{4}$ другому своему соседу v_3' через v_3 по R5, то $\mu^*(v) \geq \frac{3}{2} - 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{4} > 0$.

Итак, предположим, что $d(v_1) \leq 11$ и $d(v_2) \leq 11$. Заметим, что $d(v_3') = \Delta$ по замечанию 1, примененному к ребру vv_3. Мы видим, что v получает $\frac{3}{4}$ от v_3' по R3(a), поскольку ребро vv_3 не может лежать в общей с 2-цепью 6-грани согласно лемме 2. Так же v получает либо $\frac{1}{8}$ от каждой из v_1, v_2 по R6, либо не менее 1 хотя бы от одной из v_1, v_2 по R4. Следовательно, $\mu^*(v) \geq \frac{3}{4} + 2 \times \frac{1}{8} = 0$.

Подслучай 1.3. $d(v_1) = d(v_2) = 2$, а $d(v_3) \geq 3$. Через v_1' и v_2' обозначим отличные от v соседние с v_1 и v_2 вершины соответственно.

Подподслучай 1.3.1. Если v_3 не является старшей, то $d(v_1') = d(v_2') = \Delta$ по замечанию 1, примененному к ребру vv_1 или vv_2 соответственно. Отсюда следует, что v получает $\frac{3}{4}$ от каждой из v_1' и v_2' по R3(a), поскольку грань $f = v_1vv_2\dots$ не может быть 6-гранью с 2-цепью на границе. Заметим, что v получает $\frac{5}{8}$ по R1(ii), если $r(f) \geq 7$, или $\frac{3}{4}$ по R2(b), если $r(f) = 6$. Наконец, v, возможно, отдает $\frac{1}{8}$ вершине v_3 по R6. Значит, $\mu^*(v) \geq -2\times 1 + 2\times\frac{3}{4} + \frac{5}{8} - \frac{1}{8} = 0$.

Подподслучай 1.3.2. v_3 старшая. Если v_1' является старшей, то v получает $\frac{3}{2}$ от v_3 и не менее $\frac{1}{2}$ от v_1' по R3(a) или R4(i) и отдает $\frac{1}{4}$ вершине v_2' по R5, если v_2' специальная. (Конечно, v отдает заряд 1 каждой из 2-вершин v_1, v_2.)

Если v_2' не является специальной, то $\mu^*(v) \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2\times 1 = 0$. Иначе мы имеем два случая. Пусть $f = v_1vv_2v_2'xy\dots$. Если $d(x) = 2$, то $r(f) \geq 7$, поскольку v_1' старшая, а y — нет, так что $\mu^*(v) \geq \frac{3}{2} + \frac{1}{2} - 2\times 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = 0$ по R1(iii). Второй случай — $d(x) = \Delta$. Если $r(f) \geq 7$, то мы поступаем, как выше. Предположим, что $r(f) = 6$, т. е. $y = v_1'$; тогда остается заметить, что v получает $\frac{1}{4}$ от f по R2(f).

Теперь предположим, что ни v_1', ни v_2' не является старшей, т. е. v специальная. По замечанию 1, примененному к ребрам vv_1 и vv_2, имеем $d(v_3) = \Delta$. Заметим, что v получает $\frac{7}{4}$ от v_3 по R3(a); следовательно, вершине v недостает еще $\frac{1}{4}$.

Если v инцидентна ≥ 7-грани, то v получает $\frac{1}{4}$ от такой грани по R1(iii). Если v_1' или v_2' не специальные, то v получает $\geq \frac{1}{4}$ от такой вершины по R5. Итак, предположим, что обе вершины v_1' и v_2' специальные и v окружена тремя 6-гранями. Положим $f_i = v_3vv_iv_i'w_iz_i$, где $i \in \{1, 2\}$.

Если $d(w_i) = \Delta$ хотя бы при одном значении i, то v получает $\frac{3}{8}$ от f_i по R2(d). Предположим, что $d(w_1) = d(w_2) = 2$; это означает, что ни одна из z_i не является специальной согласно лемме 3, так что v получает $2\times\frac{1}{8}$ от f_1 и f_2 по R2(c).

Подслучай 1.4. $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 2$. Как в подподслучае 1.3.1, мы видим, что v получает $\frac{3}{4}$ вдоль каждой инцидентной 1-цепи по R3(a). Кроме того, v получает не менее $3\times\frac{5}{8}$ по R1(ii) или R2(b). Значит, $\mu^*(v) \geq 3\times\frac{3}{4} + 3\times\frac{5}{8} - 3\times 1 > 0$.

Случай 2. $4 \leq d(v) \leq 5$. Напомним, что v отдает заряд 1 каждой смежной 2-вершине и может отдавать $\frac{1}{8}$ и $\frac{1}{4}$ по R6 и R5 соответственно. С другой стороны, v получает $\frac{3}{2}$ от каждого старшего соседа по R3(a) или R4(i).

Подслучай 2.1. $d(v) = 4$. Теперь начальный заряд вершины v равен 2. Если v смежна самое большее с одной 2-вершиной, то $\mu^*(v) > 2 - 1 - 4\times\frac{1}{4} = 0$.

Предположим, что $d(v_1) = d(v_2) = 2$, $d(v_3) \geq 3$, а $d(v_4) \geq 3$. Если v не участвует в R5 и R6, то доказывать нечего. Допустим, что v отдает $\frac{1}{8}$ вершине v_3 по R6; тогда v_4 старшая согласно замечанию 1, примененному к ребру vv_3, а это означает, что $\mu^*(v) \geq 2 + \frac{3}{2} - 2\times 1 - \frac{1}{8} - 2\times\frac{1}{4} > 0$.

Допустим, что v отдает $\frac{1}{4}$ вершине v_2' по R5; тогда либо v_4, либо v_3 имеет степень не менее 6 согласно замечанию 1, примененному к ребру vv_2. Ввиду R4 получаем $\mu^*(v) \geq 2 + 1 - 2\times 1 - 3\times\frac{1}{4} > 0$.

Теперь предположим, что $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = 2$ и $d(v_4) \geq 3$. Если v_4 не является старшей, то по замечанию 1 получаем, что каждая 1-цепь соединяет v со старшей вершиной, которая посылает не менее $\frac{1}{2}$ вершине v по R4(i) или R3(a), откуда $\mu^*(v) \geq 2 + 3\times\frac{1}{2} - 3\times 1 - \frac{1}{8} > 0$.

Остается предположить, что v_4 старшая. Теперь v получает $\frac{3}{2}$ от v_4 по R4(i) или R3(a) и, возможно, отправляет $\frac{1}{4}$ вдоль 1-цепей специальным вершинам по R5. Если v посылает $\frac{1}{4}$ не более чем дважды, имеем $\mu^*(v) \geq 2 + \frac{3}{2} - 3\times 1 -$

$2 \times \frac{1}{4} = 0$. Осталось рассмотреть случай, когда v соединяется 1-цепями с тремя специальными вершинами.

Достаточно показать, что v получает не менее $\frac{1}{4}$ от окружающих граней. Если v инцидентна хотя бы одной $\geq$ 7-грани, достаточно применить правило R1(iii). Предположим противное. Пусть $f_i = v_4vv_iv_i'w_iz_i$, где $i \in \{1,3\}$. Если $d(w_i) = \Delta$ для не менее чем одного значения i, то v получает $\frac{3}{8}$ от f_i по R2(e). Итак, предположим, что $d(w_1) = d(w_3) = 2$; это означает, что v инцидентна (вдоль ребра vv_2) с гранью ранга не менее 8; противоречие.

Наконец, предположим, что $d(v_1) = d(v_2) = d(v_3) = d(v_4) = 2$. Тогда каждая 1-цепь соединяет v со старшей вершиной, так что $\mu^*(v) \geq 2 + 4 \times \frac{1}{2} - 4 \times 1 = 0$.

Подслучай 2.2. $d(v) = 5$. Начальный заряд вершины v равен 4. Если v смежна с не более чем тремя 2-вершинами, то $\mu^*(v) \geq 4 - 3 \times 1 - 3 \times \frac{1}{4} - 2 \times \frac{1}{8} = 0$.

Допустим, что $d(v_5) \geq 3$, а все остальные соседи вершины v суть 2-вершины. Если v_5 старшая, то $\mu^*(v) \geq 4 + \frac{3}{2} - 4 \times 1 - 4 \times \frac{1}{4} > 0$. Остается предположить, что $d(v_5) \leq 11$; тогда согласно замечанию 1 получаем, что 1-цепь при v соединяет v со старшей вершиной, так что $\mu^*(v) \geq 4 + 4 \times \frac{1}{2} - 4 \times 1 - \frac{1}{8} > 0$.

Наконец, если v смежна только с 2-вершинами, то $\mu^*(v) \geq 4 + 5 \times \frac{1}{2} - 5 \times 1 > 0$.

Случай 3. $6 \leq d(v) \leq 11$. Если $d(v_1) \geq 12$, то

$$\mu^*(v) \geq 2d(v) - 6 + \frac{3}{2} - (d(v) - 1) \times \frac{5}{4} = \frac{3d(v) - 13}{4} > 0.$$

Если v смежна с не более чем одной нестаршей вершиной, то $\mu^*(v) \geq 2d(v) - 6 - d(v) \times 1 \geq 0$, поскольку каждая 1-цепь соединяет v со старшей вершиной согласно замечанию 1. Остается предположить, что v смежна с не менее чем двумя младшими или средними вершинами; в этом случае

$$\mu^*(v) \geq 2d(v) - 6 - (d(v) - 2) \times \frac{5}{4} - 2 \times \frac{1}{8} = \frac{3d(v) - 15}{4} > 0$$

по R0, R4(ii), R5 и R6.

Случай 4. $12 \geq d(v) \geq \Delta - 1$. Заметим, что v не инцидентна 2-цепям по лемме 1 и не смежна со специальными вершинами по замечанию 1. Теперь v посылает самое большее $\frac{1}{2} + 1$ вдоль каждой инцидентной ей 1-цепи по R0 и R4(i) и не более $\frac{3}{2}$ — каждой смежной $\geq$ 3-вершине по R4(i); это означает, что

$$\mu^*(v) = 2d(v) - 6 - d(v) \times \frac{3}{2} = \frac{d(v) - 12}{2} \geq 0.$$

Случай 5. $d(v) = \Delta$. Вершина v отправляет $\frac{7}{4}$ вдоль каждой инцидентной ей 2-цепи по R3(a). Вдоль каждой инцидентной 1-цепи P вершина v посылает либо $1 + \frac{3}{4}$ по R0 и R3(a), либо $\leq 1 + \frac{1}{2} + +2 \times \frac{1}{8}$ по R0, R3(a) и R3(b)(iii), если P ведет в младшую или среднюю вершину; иначе v посылает $1 + 2 \times \frac{3}{8}$ по R0 и R3(b)(ii).

Предположим, что v смежна с $\geq$ 3-вершиной w. Если w специальная, то v отдает $\frac{7}{4}$ вершине w по R3(a). В противном случае v отдает либо $\frac{3}{2} + 2 \times \frac{1}{8}$ вершине w по R3(a) и граням, инцидентным ребру vw согласно R3(b)(i), если w не является старшей, либо $2 \times \frac{7}{8}$ по R3(b)(i) в случае, когда w старшая.

Итак, v посылает не более $\frac{7}{4}$ вдоль каждого инцидентного ей ребра, значит,

$$\mu^*(v) = 2d(v) - 6 - d(v) \times \frac{7}{4} = \frac{d(v) - 24}{4} \geq 0.$$

2.4. Проверка того, что $\mu^*(f) \geq 0$ для $f \in F(G)$. Предположим, что $r(f) = 6$; если f не является трансмитером, то $\mu^*(f) = r(f) - 6 = 0$. Если f есть A-трансмитер, то она получает не менее $\frac{1}{8}$ по R3(b) от каждой концевой вершины 2-цепи, инцидентной f (по лемме 2 и в силу того, что f не инцидентна специальным вершинам); таким образом, $\mu^*(f) \geq 0 - 2 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{1}{8} = 0$.

Если f является B-трансмитером, то она дважды получает $\frac{3}{8}$ по R3b(ii) и отдает $\frac{3}{4}$ по R2(b). Точно так же C-трансмитер проводит $\frac{1}{8}$ от неспециальной вершины v_5 к специальной вершине v_1 (см. R2(c) и R3(b)(i)), D-трансмитер дважды получает и отдает по $\frac{3}{8}$ согласно R2(b)(ii), а E-трансмитер делает то же самое лишь один раз. Наконец, F-трансмитер получает $\frac{7}{8}$ согласно R2(b)(i) и отдает заряд $\frac{1}{4}$.

Пусть теперь $r(f) \geq 7$. Чтобы оценить суммарный расход грани f по правилу R1, распределим заряды, отдаваемые гранью f вершинам, между инцидентными ребрами, лежащими в границе f, следующим образом:

(i) вклад $2 \times \frac{1}{8}$, предназначенный для 2-вершин, входящих в 2-цепь, распределим по $\frac{1}{12}$ по ее трем ребрам;

(ii) $\frac{5}{8}$ — по $\frac{5}{32}$ по четырем ребрам, ближайшим к получателю этих $\frac{5}{8}$;

(iii) $\frac{1}{4}$ — по $\frac{1}{8}$ по двум инцидентным получателю этой $\frac{1}{4}$ ребрам.

Ясно, что в результате указанного перераспределения каждое ребро в границе грани f получает не более одной порции заряда от f. Если $r(f) \geq 8$, то

$$\mu^*(f) > r(f) - 6 - r(f) \times \frac{1}{4} = \frac{3(r(f) - 8)}{4} \geq 0.$$

Предположим, что $r(f) = 7$. Если f не делает ни одной передачи в $\frac{5}{8}$, то $\mu^*(f) \geq 1 - 7 \times \frac{1}{8} > 0$; в противном случае $\mu^*(f) \geq 1 - \frac{5}{8} - \frac{1}{4} > 0$.

Это завершает доказательство теоремы 3.

Авторы благодарят А. Н. Глебова за тщательную проверку доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Dvorak Z., Kral' D., Nejedly P., Skrekovski R.* Coloring squares of planar graphs with girth six // Europ. J. Comb. 2008. V. 29, N 4. P. 838–849.
2. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.* Минимальная степень и хроматическое число квадрата плоского графа // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 4. С. 9–33.
3. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* (p,q)-Раскраска разреженных плоских графов // Мат. заметки ЯГУ. 2006. Т. 13, № 2. С. 3–9.
4. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Предписанная (p,q)-раскраска разреженных плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. 2006. Т. 3. С. 355–361. (http://semr.math.nsc.ru)
5. *Wegner G.* Graphs with given diameter and a coloring problem. Technical report. Univ. of Dortmund, Germany, 1977.
6. *Jensen T., Toft B.* Graph coloring problems. New York: John Willey & Sons, 1995.
7. *Agnarsson G., Halldorsson M. M.* Coloring powers of planar graphs // Proc. SODA'00, SIAM press. 2000. P. 654–662.
8. *Agnarsson G., Halldorsson M. M.* Coloring powers of planar graphs // SIAM J. Discrete Math. 2003. V. 16, N 4. P. 651–662.
9. *Бородин О. В., Брусма Х., Глебов А. Н., Ван-Ден-Хойвел Я.* Строение плоских триангуляций в терминах пучков и звезд // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2001. Т. 8, № 2. С. 15–39.
10. *Molloy M., Salavatipour M. R.* Frequency channel assignment on planar networks // Algorithms–ESA 2002. Berlin: Springer-Verl., 2002. P. 736–747. (Lecture Notes Comput. Sci.; 2461).

11. *Molloy M., Salavatipour M. R.* A bound on the chromatic number of the square of a planar graph // J. Comb. Theory, Ser. B. 2005. V. 94. P. 189–213.

12. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* 2-Дистанционная раскраска разреженных плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. 2004. Т. 1. С. 76–90. (http://semr.math.nsc.ru)

13. *Бородин О. В., Глебов А. Н., Иванова А. О., Неустроева Т. К., Ташкинов В. А.* Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов // Сиб. электрон. мат. изв. 2004. Т. 1. С. 129–141. (http://semr.math.nsc.ru).

14. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Предписанная 2-дистанционная $(\Delta+1)$-раскрашиваемость плоских графов с заданным обхватом // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2007. Т. 14, № 3. С. 13–30.

15. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Достаточные условия 2-дистанционной $(\Delta+1)$-раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Дискрет. анализ и исслед. операций. 2005. Т. 12, № 3. С. 32–47.

16. *Бородин О. В., Иванова А. О., Неустроева Т. К.* Достаточные условия минимальной 2-дистанционной раскрашиваемости плоских графов с обхватом 6 // Сиб. электрон. мат. изв. 2006. Т. 3. С. 441–458. (http://semr.math.nsc.ru).

Статья поступила 11 августа 2008 г.

Бородин Олег Вениаминович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
brdnoleg@math.nsc.ru

Иванова Анна Олеговна
Институт математики при Якутском гос. университете,
ул. Кулаковского, 48, Якутск 677891
shmgnanna@mail.ru