Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2009. Том 50, № 6

УДК 517.53

КРИТЕРИЙ СЛАБОЙ ОБРАТИМОСТИ В ВЕСОВЫХ L^p–ПРОСТРАНСТВАХ ГОЛОМОРФНЫХ В ШАРЕ ФУНКЦИЙ

Ф. А. Шамоян

Аннотация. Получено необходимое и достаточное условие на весовую функцию, при котором каждая голоморфная в единичном шаре функция из весового L^p-пространства, не имеющая нулей, слабо обратима в соответствующем пространстве L^q при всех $q < p$.

Ключевые слова: слабая обратимость, циклические элементы, голоморфная функция, пространство Бергмана, оператор сдвига, весовая полиномиальная аппроксимация.

Введение

Пусть $B = B_n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| < 1\}$ — единичный шар в n-мерном комплексном пространстве $\mathbf{C}^n$, $S = S_n = \{z \in \mathbf{C}^n : |z| = 1\}$ — единичная сфера, $H(B)$ — множество всех голоморфных в B функций с топологией равномерной сходимости на компактных подмножествах B. Предположим далее, что X — подпространство пространства $H(B)$, в котором множество всех многочленов P от $z_1, z_2, \dots, z_n$ всюду плотно, при этом операторы

$$\delta_z(f) = f(z), \quad S_j f(z) = z_j f(z_1, z_2, \dots z_n),\ j = \overline{1, n},\ z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in B,$$

непрерывны в X.

Определение. Функция $f \in X$, $f(z) \neq 0$, $z \in B$, называется *слабо обратимой в пространстве* X, если существует последовательность многочленов $\{P_m\}$, $P_m \in P$, $m = 1, 2, \dots$, такая, что $\lim\limits_{m \to +\infty} P_m f = 1$, причем сходимость имеет место в топологии пространства X.

Описание слабо обратимых элементов в конкретных функциональных пространствах тесно связано с широким кругом (иногда определяющих) задач нескольких дисциплин: от теории дифференциальных операторов и их обобщений до абстрактного гармонического анализа (см. [1–3]). В одномерном случае изучение слабо обратимых элементов начато в работе М. В. Келдыша [4] и продолжено затем многими математиками (см. [5–11]). В многомерном случае в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций слабая обратимость ограниченных аналитических функций исследована в работах автора [12, 13].

В данной статье найдена полная характеризация тех весов, при которых каждая функция, голоморфная в B, не имеющая нулей и принадлежащая L^p-весовому пространству, слабо обратима в $L^{p'}$ при всех $0 < p' < p$.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–97517).

§ 1. Формулировка основного результата статьи и доказательства вспомогательных утверждений

Пусть φ — положительная монотонно растущая непрерывная функция на $R_+ = (0, +\infty)$. Условимся говорить, что функция φ *весовая*, если $\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{\varphi(x)}{\ln x} = +\infty$. Символами $d\nu$ и $d\sigma$ обозначим нормированные меры Лебега соответственно на B и S. Положим

$$A^p(\varphi) = \left\{ f \in H(B) : \|f\|_{A^p(\varphi)} = \left(\int\limits_B |f(\zeta)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

$0 < p < +\infty$.

Теорема. *Пусть φ — весовая функция из $C^{(2)}(R_+)$ такая, что*

$$\frac{\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} \downarrow 0, \quad x \to +\infty, \tag{1}$$

существует предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\varphi'(x)x}{\varphi(x)} = \alpha_\varphi, \quad 0 \le \alpha_\varphi \le +\infty, \tag{2}$$

и

$$\int\limits_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty. \tag{3}$$

Тогда если $f \in A^p(\varphi)$, $f(z) \ne 0$, $z \in B$, $1 < p < +\infty$, то f слабо обратима в пространстве $A^{p'}(\varphi)$ при всех $0 < p' < p < +\infty$.

Обратно, если интеграл (3) сходится, то можно построить ограниченную голоморфную в B функцию F, $F(z) \ne 0$, $z \in B$, слабо необратимую в пространстве $A^p(\varphi)$ при всех $p : 0 < p < +\infty$.

Замечание 1. Теорема является новой даже в одномерном случае. Так, для единичного круга Н. К. Никольским в [7] установлен аналог основной теоремы при дополнительном условии: *существует $\varepsilon > 0$ такое, что $\int\limits_{B_1} \frac{|f(\zeta)|^p}{m_f^\varepsilon(|\zeta|)} d\nu(\zeta) < +\infty$, где $m_f(r) = \min\limits_{|z|=r} |f(z)|$*, $0 < r < 1$.

Близкие результаты для областей Каратеодори в $\mathbf{C} = \mathbf{C}^1$ получены Хедбергом в [9], где предполагалась суммируемость $|f|^{-\varepsilon}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Из теоремы следует, что в случае расходимости интеграла (3) эти дополнительные условия являются лишними.

Замечание 2. Условие $p' < p$ нельзя отбросить даже в одномерном случае. Как установлено в работах [10, 14], для произвольного $0 < p < +\infty$ можно построить функцию $f \in A^p(\varphi)$ такую, что $\frac{1}{f} \in A^p(\varphi)$; в то же время f слабо необратима в пространстве $A^p(\varphi)$. Отметим также, что условия $\varphi \in C^{(2)}(R_+)$ и (1) можно заменить условием $\varphi \in C^{(2)}(a, +\infty)$ и выполнением (1) только на $(a, +\infty)$ при некотором $a > 0$.

Доказательство основного результата опирается на несколько вспомогательных утверждений, представляющих, на наш взгляд, самостоятельный интерес. В следующей лемме дается оценка сверху функции из класса $A^p(\varphi)$.

Лемма 1. *Пусть $f \in A^p(\varphi)$, $f(z) \neq 0$, $z \in B$, $0 < p < +\infty$, φ удовлетворяет условиям теоремы. Тогда справедлива оценка*

$$\ln|f(z)| \leq \frac{1}{p}\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right) + \frac{2n}{p}\ln\left(\frac{\varphi'\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}{(1-|z|)^2}\right) + c(f,n), \quad z \in B.$$

Доказательство. Здесь и в дальнейшем $c(\dots)$ — положительные числа, зависящие только от $(\dots)$, значение которых не играет никакой роли.

Пусть $z \in B$, $0 < \varepsilon < 1$, $B_\varepsilon(z)$ — шар с центром в точке z радиуса $\varepsilon(1-|z|)$. Ввиду субгармоничности функции $|f|^p$ имеем

$$|f(z)|^p \leq \frac{c(f,n)}{\varepsilon^{2n}(1-|z|)^{2n}} \int\limits_{B_\varepsilon(z)} |f(z)|^p \, d\nu(\zeta).$$

Поскольку при $\zeta \in B_\varepsilon(z)$ справедлива оценка

$$(1-\varepsilon)(1-|z|) \leq (1-|\zeta|) \leq (1+\varepsilon)(1-|z|),$$

то

$$|f(z)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)(1-|z|)}\right)\right)$$
$$\leq \frac{c(f,n)}{\varepsilon^{2n}(1-|z|)^{2n}} \int\limits_{B_\varepsilon(z)} |f(\zeta)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{(1-|\zeta|)}\right)\right) d\nu(\zeta) \leq \frac{c(f,n)}{\varepsilon^{2n}(1-|z|)^{2n}} \|f\|^p_{A^p(\varphi)}.$$

Отсюда получаем

$$\ln|f(z)| \leq \frac{2n}{p}\left(\ln\frac{1}{\varepsilon} + \ln\frac{1}{1-|z|}\right) + \frac{1}{p}\varphi\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)(1-|z|)}\right) + c_1(n,f). \tag{4}$$

Теперь положим $\varepsilon = \frac{1-|z|}{\varphi'\left(\frac{1}{1-|z|}\right)+(1-|z|)}$, $z \in B$. Тогда

$$\frac{1}{(1-\varepsilon)(1-|z|)} = \frac{1}{1-|z|} + \frac{1}{\varphi'\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}, \quad \frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-|z|)} = \frac{1}{\varphi'\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}.$$

Применяя формулу о конечных приращениях Лагранжа, получим

$$\varphi\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)(1-|z|)}\right) = \varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right) + \varphi'\left(\frac{1}{1-|z|} + \xi\right)\frac{\varepsilon}{(1-\varepsilon)(1-|z|)},$$

где $0 \leq \xi \leq \frac{1}{\varphi'\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}$. Докажем, что второе слагаемое в последнем равенстве стремится к единице при $|z| \to 1-0$. Для этого положим $x = \frac{1}{1-|z|}$, $\gamma(t) = \frac{1}{\varphi'(t)}$, $t \in R_+$, и снова применим формулу Лагранжа:

$$\frac{\varphi'(x+\xi)}{\varphi'(x)} = \frac{\gamma(x)}{\gamma(x+\xi)} = \frac{1}{1+\frac{\gamma'(x+\bar{\xi})\xi}{\gamma(x)}}, \quad \text{где } 0 \leq \bar{\xi} \leq \xi \leq \frac{1}{\varphi'(x)},$$

но поскольку

$$\frac{\gamma'(x+\bar{\xi})\xi}{\gamma(x)} = -\frac{\varphi''(x+\bar{\xi})}{\varphi'^2(x+\bar{\xi})}\xi\varphi'(x),$$

учитывая условие $\xi\varphi'(x) \leq 1$ и условие (1), имеем $\frac{\gamma'(x+\bar{\xi})\xi}{\gamma(x)} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Таким образом, окончательно получаем

$$\varphi\left(\frac{1}{(1-\varepsilon)(1-|z|)}\right)=\varphi\left(\frac{1}{(1-|z|)}\right)+\alpha(|z|), \tag{4$'$}$$

где $\alpha(|z|)\to 1$ при $|z|\to 1-0$. Следовательно, ввиду неравенства (4)

$$\ln|f(z)|\le\frac{1}{p}\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)+\frac{2n}{p}\ln\left(\varphi'\left(\frac{1}{1-|z|}\right)+(1-|z|)\right)\\
+\frac{2n}{p}\ln\frac{1}{(1-|z|)^2}+c(f,p,n),$$

т. е.

$$\ln|f(z)|\le\frac{1}{p}\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)+\frac{2n}{p}\ln\left(\frac{\varphi'\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}{(1-|z|)^2}\right)+c(f,p,n). \tag{5}$$

Лемма доказана.

В дальнейшем при доказательстве теоремы существенную роль играет представление функции $f\in H(B)$ (см. [15, с. 27]) в виде ряда по однородным многочленам:

$$f(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}f_k(z),\quad z\in B, \tag{6}$$

где $f_k(z_1,z_2,\dots,z_n)$ — однородные многочлены степени k от $z_1,z_2,\dots,z_n$. Подробнее со свойствами разложения (6) и радиальных производных

$$R(f)(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}kf_k(z),\quad \widetilde{R}_m(f)(z)=\sum_{k=1}^{+\infty}(k+1)f_k(z)$$

можно познакомиться в [15, 16].

Введем понятие среза функции: пусть $f\in H(B)$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)\ne 0$, $z'=\left(\frac{z_1}{|z|},\frac{z_2}{|z|},\dots,\frac{z_n}{|z|}\right)$. Тогда при фиксированном $z\in B$ нетрудно заметить, что функция $f_z(\zeta)=f(\zeta z')$ голоморфна в единичном круге B_1, при этом $f(z)=f_z(|z|)$. Функция $f_z(\zeta)$ называется *срезом* функции f.

Введем также понятие дифференциального оператора D: если $\psi\in H(B_1)$, то $D\psi(z)=z\psi'(z)$, $z\in B_1$. Учитывая определения операторов R, $\widetilde{R}$, нетрудно заметить равенства (см. [16])

$$R^m(f)(z)=(D^mf_{z'})(\zeta)|_{\zeta=|z|},\quad \widetilde{R}^m(f)=\sum_{k=0}^{m}C_m^kR^m(f)(z),\quad z\in B, \tag{7}$$

где C_m^k, $0\le k\le m$, $m\in Z_+$, — биномиальные коэффициенты. Таким образом, для оценки функций $R^m(f)$, $\widetilde{R}^m(f)$ достаточно получить соответствующие оценки только для $D^mf_{z'}(\zeta)$, $\zeta\in B_1$, $z'=\left(\frac{z_1}{|z|},\frac{z_2}{|z|},\dots,\frac{z_n}{|z|}\right)$, $z=(z_1,z_2,\dots,z_n)\in B$. Более подробно см. [16].

Лемма 2. *Пусть $f\in A^p(\varphi)$, $f(z)\ne 0$, $z\in B$, φ удовлетворяет условиям теоремы, $0<p<+\infty$, $\psi(z)=\ln f(z)$, где выбрана главная ветвь логарифма. Тогда справедлива оценка*

$$|R^m\psi(z)|\le c(m,n,f)\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\left(\frac{\varphi'\left(\frac{1}{1-|z|}\right)}{(1-|z|)^2}\right)^{m+1},\quad z\in B,\ m\in Z_+.$$

Аналогичная оценка справедлива и для $\widetilde{R}^m(\psi)$, $m \in Z_+$.

Доказательство. Зафиксируем точку $z \in B$ и положим $g(\zeta) = \psi_{z'}(\zeta)$, $\zeta \in B_1$, $z' = \frac{z}{|z|} \in S$. Учитывая вышеуказанные замечания, для доказательства леммы 2 достаточно получить соответствующую оценку функции $D^m g(\zeta)$, $\zeta \in B_1$, и следовательно, оценку для $g^{(m)}(\zeta)$, $\zeta \in B_1$, $m \in Z_+$. Используя формулу Шварца, имеем

$$g(\zeta) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{|w|=\rho} \frac{w+\zeta}{w-\zeta} \operatorname{Re} g(w) \frac{dw}{iw} + i \operatorname{Im} g(0), \quad |\zeta| < \rho < 1.$$

Отсюда получаем

$$|g^{(m)}(\zeta)| \le \frac{m!}{2\pi(\rho - |\zeta|)^{m+1}} \int\limits_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{Re} g(\rho e^{i\theta})| \, d\theta, \quad 0 \le |\zeta| < \rho < 1. \tag{8}$$

Для оценки интеграла используем лемму 1, согласно которой

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} g(\zeta) &= \operatorname{Re} \psi_{z'}(\zeta) = \operatorname{Re} \ln f_{z'}(\zeta) = \ln |f_{z'}(\zeta)| \\ &\le \frac{1}{p} \varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right) + \frac{2n}{p} \ln\left(\frac{\varphi'\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)}{(1-|\zeta|)^2}\right) + c(f,n) \stackrel{\text{def}}{=} \widetilde{\varphi}\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right) + c(f,n), \quad \zeta \in B_1. \end{aligned} \tag{8$'$}$$

Учитывая, что $|\operatorname{Re} g| = (\operatorname{Re} g)^+ + (\operatorname{Re} g)^-$, где $a^+ \stackrel{\text{def}}{=} \max(a,0)$, $a^- \stackrel{\text{def}}{=} \max(-a,0)$, $a \in R$, и теорему о среднем, имеем

$$\frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{Re} g(\rho e^{i\varphi}))^+ \, d\varphi = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{Re} g(\rho e^{i\varphi}))^- \, d\varphi + \operatorname{Re} g(0).$$

Используя (8$'$), получаем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{Re} g(\rho e^{i\varphi}))^- d\varphi &= \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\pi}^{\pi} (\operatorname{Re} g(\rho e^{i\varphi}))^+ \, d\varphi - \operatorname{Re} g(0) \\ &\le \widetilde{\varphi}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) - \ln|f(0)| \le \widetilde{\varphi}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) + c_1(f), \quad 0 < \rho < 1. \end{aligned}$$

Но $|\operatorname{Re} g| = (\operatorname{Re} g)^+ + (\operatorname{Re} g)^-$, следовательно,

$$\int\limits_{-\pi}^{\pi} |\operatorname{Re} g(\rho e^{i\varphi})| \, d\varphi \le 2\left(\widetilde{\varphi}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) + c_1(f)\right).$$

Снова учитывая оценку (8), приходим к неравенству

$$|g^{(m)}(\zeta)| \le \frac{c(m,f)}{(\rho - |\zeta|)^{m+1}} \widetilde{\varphi}\left(\frac{1}{1-\rho}\right), \quad 0 \le |\zeta| < \rho < 1.$$

Определим ρ из равенства

$$\frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-|\zeta|} + \frac{1}{\varphi'\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)}.$$

Отсюда нетрудно заметить, что

$$\rho - |\zeta| = \frac{(1-|\zeta|)^2}{\varphi'\big(\frac{1}{1-|\zeta|}\big) + (1-|\zeta|)}.$$

Поэтому

$$\frac{1}{(\rho-|\zeta|)^{m+1}}\widetilde{\varphi}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \widetilde{\varphi}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\left(\frac{\varphi'\big(\frac{1}{1-|\zeta|}\big)}{(1-|\zeta|)^2}\left(1+\frac{1-|\zeta|}{\varphi'\big(\frac{1}{1-|\zeta|}\big)}\right)\right)^{m+1}$$
$$\le c\widetilde{\varphi}\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\left(\frac{\varphi'\big(\frac{1}{1-|\zeta|}\big)}{(1-|\zeta|)^2}\right)^{m+1}, \quad m \in Z_+. \quad (9)$$

Напомним, что

$$\widetilde{\varphi}\left(\frac{1}{1-\rho}\right) = \frac{1}{p}\varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) + \frac{2n}{p}\ln\left(\frac{\varphi'\big(\frac{1}{1-\rho}\big)}{(1-\rho)^2}\right).$$

Докажем, что $\frac{\ln(\varphi'(x)x^2)}{\varphi(x)} \to 0$ при $x \to +\infty$.

Действительно, так как φ — весовая функция, удовлетворяющая условию теоремы, то

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} = 0.$$

Используя оценку (9), приходим к неравенству

$$|g^{(m)}(\zeta)| \le c(m,f)\varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right)\left(\frac{\varphi'\big(\frac{1}{1-|\zeta|}\big)}{(1-|\zeta|)^2}\right)^{m+1}, \quad m \in Z_+.$$

Повторяя рассуждения, приведенные в ходе доказательства леммы 1, в обозначениях $|\zeta| = |z|$, $1-\rho = (1-|z|)(1-\varepsilon)$, из последней оценки получим

$$|g^{(m)}(\zeta)| \le c_1(m,f)\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\left(\frac{\varphi'\big(\frac{1}{1-|\zeta|}\big)}{(1-|\zeta|)^2}\right)^{m+1}, \quad \zeta \in B_1,\ m \in Z_+.$$

Тем самым

$$|D^m\psi_{z'}(|z|)| \le c_2(m,f)\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\left(\frac{\varphi'\big(\frac{1}{1-|z|}\big)}{(1-|z|)^2}\right)^{m+1}, \quad z \in B,\ m \in Z_+.$$

Лемма доказана.

Из леммы 2 непосредственно получаем

Следствие 1. *Если $f \in A^p(\varphi)$ для некоторого $0 < p < +\infty$, $f(z) \neq 0$, $z \in B$, то*

$$|\ln f(z)| \le c(f)\varphi\left(\frac{1}{1-|z|}\right)\left(\frac{\varphi'\big(\frac{1}{1-|z|}\big)}{(1-|z|)^2}\right), \quad m \in Z_+, \quad (10)$$

где выбрана главная ветвь логарифма.

Следующая лемма является аналогом оценки Коши о коэффициентах разложения голоморфной функции одной переменной для функции класса $A^p(\varphi)$.

Лемма 3. *Пусть $f \in A^p(\varphi)$, $0 < p < +\infty$, φ удовлетворяет условиям теоремы, при этом функция f представима в виде* (6). *Тогда*

$$|f_k(w)| \le c(n,f) \inf_{0<\rho<1} \left\{ \frac{\left(\frac{\varphi'\left(\frac{1}{1-\rho}\right)}{(1-\rho)^2}\right)^{\frac{2n}{p}}}{\rho^k} \exp \frac{1}{p}\varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \right\}, \quad w \in B,\ k \in Z_+.$$

Доказательство. Зафиксируем $w \in B$, положим $w' = \frac{w}{|w|}$ и $\psi_{w'}(\zeta) = f_{w'}(\zeta) = f(\zeta w')$, $\zeta \in B_1$. Очевидно, что

$$\psi_{w'}(\zeta) = \sum_{k=0}^{+\infty} f_k(w')\zeta^k, \quad \zeta \in B_1,$$

при этом ряд сходится равномерно по ζ внутри B_1. Используем оценку Коши коэффициентов разложения аналитической функции для функции $\psi_{w'}(\zeta)$:

$$|f_k(w')| \le \inf_{0<\rho<1} \left(\frac{M(\rho, \psi_{w'})}{\rho^k} \right), \quad k \in Z_+,$$

где $M(\rho, \psi_{w'}) = \max\limits_{|\zeta|\le\rho} |\psi_{w'}(\zeta)|$. Учитывая оценку (5), получаем

$$|f_k(w')| \le c(n,f) \inf_{0<\rho<1} \left\{ \frac{\left(\frac{\varphi'\left(\frac{1}{1-\rho}\right)}{(1-\rho)^2}\right)^{\frac{2n}{p}}}{\rho^k} \exp \frac{1}{p}\varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right) \right\} \stackrel{\text{def}}{=} m_k. \tag{11}$$

По принципу максимума такая же оценка справедлива при всех $w \in B$, т. е. $|f_k(w)| \le c(n,f)m_k$, $w \in B$, $k \in Z_+$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть $f \in A^p(\varphi)$, $f(z) \ne 0$, $z \in B$, $0 < p < +\infty$, φ удовлетворяет условиям теоремы, $m \in Z_+$. Тогда можно построить функции $\psi_m, \tilde\psi_m \in H(B)$ такие, что*

$$R^m(f)(z) = f(z)\psi_m(z), \quad \widetilde{R}^m(f)(z) = f(z)\tilde\psi_m(z), \quad z \in B, \tag{12}$$

при этом $\psi_m(z)$, $\tilde\psi_m(z)$ удовлетворяют условиям

$$\lim_{r\to1-0} \frac{\ln M(r,\psi_m)}{\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)} = \lim_{r\to1-0} \frac{\ln M(r,\tilde\psi_m)}{\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)} = 0. \tag{13}$$

Доказательство. Докажем соответствующее утверждение только для $R^m(f)$, для $\widetilde{R}^m(f)$ утверждение непосредственно следует из равенства (7), определяющего $\widetilde{R}^m(f)$ через $R^m(f)$.

Положим $g \stackrel{\text{def}}{=} \ln f$, где выбрана главная ветвь логарифма. Из следствия 1 леммы 2 (см. (10)) вытекает, что

$$M(r,g) \le c(f) \frac{\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)\varphi'\left(\frac{1}{1-r}\right)}{(1-r)^2}.$$

Поэтому, учитывая, что φ удовлетворяет условиям теоремы (1)–(3), получаем

$$\lim_{r\to1-0} \frac{\ln M(r,g)}{\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)} \le \lim_{r\to1-0} \frac{\ln \varphi'\left(\frac{1}{1-r}\right)}{\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)}.$$

Ввиду условия теоремы

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\varphi'(x)}{\varphi(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)}=0,$$

поэтому

$$\lim_{r\to1-0}\frac{\ln M(r,g)}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)}=0.$$

Пусть

$$\psi_1(z)=R(g)(z)=\sum_{j=1}^n z_j\frac{\partial g}{\partial z_j}(z)=\frac{1}{f(z)}\sum_{j=1}^n z_j\frac{\partial f}{\partial z_j}(z)=\frac{R(f)(z)}{f(z)},$$

где $z\in B$. Тогда по лемме 2

$$|\psi_1(z)|\le c(n,f)\varphi\bigg(\frac{1}{1-|z|}\bigg)\bigg(\frac{\varphi'\big(\frac{1}{1-|z|}\big)}{(1-|z|)^2}\bigg)^2.$$

Таким образом, для функции ψ_1 выполняется условие (13). Лемма доказана при $m=1$.

Общий случай докажем, используя метод математической индукции. Предположим, что представление (12) и оценка (13) справедливы для некоторого $m\in\mathbb{N}$, докажем ее справедливость для $m+1$. Пусть $R^m(f)(z)=f(z)\psi_m(z)$, $z\in B$, где ψ_m удовлетворяет условию (13). Тогда

$$\begin{aligned}R^{m+1}(f)(z)&=R(R^mf)(z)=\sum_{j=1}^n z_j\frac{\partial}{\partial z_j}(f(z)\psi_m(z))\\&=\psi_m(z)R(f)(z)+f(z)R(\psi_m)(z)=\psi_m(z)\psi_1(z)f(z)+f(z)R(\psi_m)(z)\\&=f(z)(\psi_m(z)\psi_1(z)+R(\psi_m)(z))=\psi_{m+1}(z)f(z),\quad z\in B.\end{aligned}$$

$$\psi_{m+1}(z)\stackrel{\text{def}}{=}\psi_m(z)\psi_1(z)+R(\psi_m)(z),\quad z\in B.$$

Докажем, что ψ_{m+1} удовлетворяет условию (13). Ясно, что

$$M(r,\psi_{m+1})\le M(r,\psi_m)M(r,\psi_1)+M(r,R(\psi_m)).$$

При этом

$$\lim_{r\to1-0}\frac{\ln M(r,\psi_m)}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)}=\lim_{r\to1-0}\frac{\ln M(r,\psi_1)}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)}=0.$$

Покажем справедливость данного соотношения для $M(r,R(\psi_m))$.

Зафиксируем точку $z\in B$, $z\ne0$, и положим

$$z'=\frac{z}{|z|}\in S,\quad g_{z'}(\zeta)=\psi_m(\zeta z'),\quad \zeta\in B_1.$$

Из равенства (7) имеем $R(\psi_m)(z)=|z|g_{z'}^{(1)}(\zeta)\stackrel{\text{def}}{=}Dg_{z'}(|z|)$, $\zeta=|z|$.

Из этого равенства нетрудно заметить,что $M(\rho,R(\psi_m))=\max\limits_{z'\in S}M(\rho,Dg_{z'})$. Поэтому для оценки $M(\rho,R(\psi_m))$ достаточно получить равномерную оценку по $z'\in S$ функции $M(\rho,Dg_{z'})$. С этой целью воспользуемся формулой Коши, в силу которой

$$|Dg_{z'}(\zeta)|\le\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=\rho}\frac{|g_{z'}(t)|}{|t-\zeta|^2}|dt|\le\frac{M(\rho,g_{z'})}{(\rho-|\zeta|)},\quad |\zeta|<\rho<1,\ z'\in S.\tag{14}$$

Но поскольку $M(\rho, g_{z'}) \leq M(\rho, \psi_m)$ для любого $z' \in S$, из (14) получаем

$$|Dg_{z'}(\zeta)| \leq \frac{M(\rho, \psi_m)}{(\rho - |\zeta|)}, \quad |\zeta| < \rho < 1, \ z' \in S.$$

Следовательно,

$$M(r, R(\psi_m)) = \max_{z' \in S} M(r, Dg_{z'}) \leq \frac{M(\rho, \psi_m)}{\rho - r}, \quad 0 < r < \rho < 1.$$

Подбирая снова ρ из равенства $\frac{1}{1-\rho} = \frac{1}{1-r} + \frac{1}{\varphi'(\frac{1}{1-r})}$, имеем

$$\ln M(r, R(\psi_m)) \leq \ln M(\rho, \psi_m) + \ln \frac{1}{\rho - r}.$$

Поэтому

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{\ln M(r, R(\psi_m))}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)} \leq \lim_{r \to 1-0} \frac{\ln M(\rho, \psi_m)}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)} + \lim_{r \to 1-0} \frac{\ln \frac{1}{\rho - r}}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)},$$

но, как установлено в лемме 2,

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{\ln \frac{1}{\rho - r}}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)} = \lim_{r \to 1-0} \frac{\ln\Big(\frac{\varphi'\big(\frac{1}{1-r}\big) + 1 - r}{(1-r)^2}\Big)}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)} = 0.$$

Как при доказательстве равенства (4′), нетрудно установить, что

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{\varphi\big(\frac{1}{1-\rho}\big)}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)} = 1.$$

Следовательно, по индуктивному предположению

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{\ln M(r, R(\psi_m))}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)} \leq \lim_{\rho \to 1-0} \frac{\ln M(\rho, \psi_m)}{\varphi\big(\frac{1}{1-\rho}\big)} = 0,$$

т. е.

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{\ln M(r, R(\psi_m))}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)} = 0.$$

Из последнего равенства нетрудно получить, что

$$\lim_{\rho \to 1-0} \frac{\ln M(\rho, \psi_{m+1})}{\varphi\big(\frac{1}{1-\rho}\big)} = 0.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть φ удовлетворяет условиям теоремы, $f \in A^p(\varphi)$, $f(z) \neq 0$, $z \in B$, $1 \leq p' < p$, $E(f)$ — замыкание множества Pf в пространстве $A^{p'}(\varphi)$. Тогда $R^m(f) \in E(f)$, $\widetilde{R}^m(f) \in E(f)$, $m \in Z_+$.*

Доказательство. Ясно, что для доказательства леммы достаточно показать, что $R^m(f) \in E(f)$, $m \in Z_+$. Сначала докажем, что $R^m(f) \in A^{p'}(\varphi)$ при всех $p' < p$. По лемме 4 $R^m(f)(z) = f(z)\psi_m(z)$, $z \in B$, где

$$\lim_{r \to 1-0} \frac{\ln M(r, \psi_m)}{\varphi\big(\frac{1}{1-r}\big)} = 0.$$

Теперь выберем $\varepsilon > 0$ такое, что

$$0 < \frac{\varepsilon p p'}{p - p'} < 1. \tag{15}$$

Подберем также $r = r_0(\varepsilon)$, $0 < r_0(\varepsilon) < 1$, таким образом, что при $r_0 < r < 1$

$$\frac{\ln M(r, \psi_m)}{\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)} < \varepsilon. \tag{16}$$

По определению

$$\|R^m(f)\|^{p'}_{A^{p'}(\varphi)} = \int\limits_B |f(\zeta)|^{p'} |\psi_m(\zeta)|^{p'} \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta).$$

Применяя неравенство Гёльдера с показателями $q = \frac{p}{p'}$ и $s = \frac{p}{p-p'}$, получим

$$\|R^m(f)\|^{p'}_{A^{p'}(\varphi)} \le \left(\int\limits_B |f(\zeta)|^p \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta)\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\times \left(\int\limits_B |\psi_m(\zeta)|^{\frac{pp'}{p-p'}} \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta)\right)^{\frac{1}{s}},$$

т. е.

$$\|R^m(f)\|^{p'}_{A^{p'}(\varphi)} \le \|f\|^{p'}_{A^p(\varphi)} \left(\int\limits_B |\psi_m(\zeta)|^{\frac{pp'}{p-p'}} \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta)\right)^{\frac{1}{s}}.$$

Учитывая оценку (16), получаем $M(r, \psi_m) < c_1(\varepsilon) \exp\left(\varepsilon \varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)$, $0 \le r < 1$. Из оценок (15) и (16) вытекает, что

$$\|R^m(f)\|^{p'}_{A^{p'}(\varphi)} \le c(\varepsilon) \|f\|^{p'}_{A^p(\varphi)} \int\limits_B \exp\left(\left(\frac{\varepsilon p p'}{p-p'} - 1\right) \varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta)$$

$$= c(\varepsilon) \|f\|^{p'}_{A^p(\varphi)} \int\limits_B \exp\left(-\left(1 - \frac{\varepsilon p p'}{p-p'}\right) \varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta) = c_1(\varepsilon) \|f\|^{p'}_{A^p(\varphi)}$$

и тем самым $R^m(f) \in A^{p'}(\varphi)$ при всех $p' < p$, $m \in Z_+$, при этом

$$\|R^m(f)\|_{A^{p'}(\varphi)} \le c(\varepsilon, p', m) \|f\|_{A^p(\varphi)}.$$

Теперь докажем, что $R^m(f) \in E(f)$. Пусть $P_k(z) = P_k(z_1, z_2, \dots, z_n)$ — произвольный многочлен. Используя лемму 4, имеем

$$\|P_k f - R^m(f)\|_{A^{p'}(\varphi)} = \|P_k f - \psi_m f\|_{A^{p'}(\varphi)} = \|f(P_k - \psi_m)\|_{A^{p'}(\varphi)}.$$

Применяя в последнем интеграле неравенство Гёльдера с показателями $q = \frac{p}{p'}$ и $s = \frac{q}{q-1}$, приходим к оценке

$$\|P_k f - R^m(f)\|_{A^{p'}(\varphi)} \le \|f\|_{A^p(\varphi)} \|P_k - \psi_m\|_{A^{s_1}(\varphi)}, \tag{17}$$

где $s_1 = s \cdot p' = \frac{pp'}{p-1}$. Учитывая лемму 4, нетрудно заметить, что $\psi_m \in A^{s_1}(\varphi)$. Подбирая последовательность $P_k \in P$ такую, что $\|P_k - \psi_m\|_{A^{s_1}(\varphi)} \to 0$ при $k \to +\infty$, из неравенства (17) получаем $\|P_k f - R^m(f)\|_{A^{p'}(\varphi)} \to 0$ при $k \to +\infty$. Лемма доказана.

Следующая лемма устанавливается стандартным образом, поэтому ее доказательство опускается.

Лемма 6. *Пусть* $f_\rho(\zeta) = f(\rho\zeta)$, $f \in A^p(\varphi)$, $0 < p < +\infty$, $0 < \rho < 1$, *тогда*

$$\lim_{\rho\to 1-0} \|f_\rho - f\|_{A^p(\varphi)} = 0.$$

Для доказательства второй части теоремы нам понадобится следующее утверждение, установленное в работах [6, 7] (см. также [12]).

Лемма 7. *Пусть* $n = 1$, $I(z) = \exp\left(-\frac{1+z}{1-z}\right)$, $z \in B_1$, $1 \le p < +\infty$. *Тогда если* I *слабо обратима в пространстве* $A^p(\varphi)$, *то*

$$\int_0^1 \left(\frac{\varphi(\frac{1}{1-\rho})}{1-\rho}\right)^{\frac{1}{2}} d\rho = +\infty.$$

Лемма 8. *Пусть* φ *— монотонно растущая положительная функция на* R_+, $f \in H(B_1)$, $0 < p \le 1$, $\alpha > -1$. *Тогда справедлива оценка*

$$\int_{B_1} |f(\zeta)|(1-|\zeta|)^{\frac{\alpha+2}{p}-2} \exp\left(-\frac{1}{p}\varphi\left(\frac{4}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta)$$
$$\le c(\alpha,p)\left(\int_{B_1} |f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Доказательство. Применим метод, разработанный в работах [17, 18]. Пусть $\Delta_{k,l} = \left\{z \in B_1 : 1 - \frac{1}{2^k} \le |z| < 1 - \frac{1}{2^{k+1}};\ \frac{\pi l}{2^k} \le \arg z < \frac{\pi(l+1)}{2^k},\ k \in Z_+,\ l = -2^k, \dots, 2^k - 1\right\}$ — диадическое представление единичного круга B_1, и пусть $\Delta^*_{k,l} = \bigcup_{j=-1}^{1} \bigcup_{m=-1}^{1} \Delta_{k+j,l+m}$. Тогда очевидно, что если $z \in \Delta_{k,l} \cup \partial\Delta_{k,l}$, то круг $K(z) = \left\{\zeta : |\zeta - z| \le \frac{1}{4}(1-|z|)\right\}$ полностью содержится в $\Delta^*_{k,l}$, при этом система $\{\Delta^*_{k,l}\}$ покрывает круг B_1 конечнократно. Используя субгармоничность функции $|f(z)|^p$, имеем

$$|f(z)|^p \le \frac{16}{(1-|z|)^2} \int_{K(z)} |f(\zeta)|^p\, d\nu(\zeta),$$

т. е.

$$|f(z)|^p(1-|z|)^2 \le 16 \int_{K(z)} |f(\zeta)|^p d\nu(\zeta) \le 16 \int_{\Delta^*_{k,l}} |f(\zeta)|^p\, d\nu(\zeta).$$

Следовательно,

$$|f(z)|^p(1-|z|)^{\alpha+2} \exp\left(-\varphi\left(\frac{4}{1-|z|}\right)\right)$$
$$\le 16(1-|z|)^\alpha \exp\left(-\varphi\left(\frac{4}{1-|z|}\right)\right) \int_{\Delta^*_{k,l}} |f(\zeta)|^p\, d\nu(\zeta).$$

Теперь заметим, что если $z \in \Delta_{k,l}$ и ζ — произвольная точка из $\Delta^*_{k,l}$, то $\frac{1}{1-|\zeta|} \le \frac{4}{1-|z|}$, поэтому

$$|f(z)|^p(1-|z|)^{\alpha+2} \exp\left(-\varphi\left(\frac{4}{1-|z|}\right)\right)$$
$$\le 4^{\alpha+2} \int_{\Delta^*_{k,l}} |f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right) d\nu(\zeta).$$

Отсюда

$$\max_{z\in\Delta_{k,l}}\left\{|f(z)|(1-|z|)^{\frac{\alpha+2}{p}}\exp\left(-\frac{1}{p}\varphi\left(\frac{4}{1-|z|}\right)\right)\right\}\\ \le 4^{\frac{\alpha+2}{p}}\int\limits_{\Delta^*_{k,l}}|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha\exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right)d\nu(\zeta).$$

Значит,

$$\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=-2^k}^{2^k-1}\max_{z\in\Delta_{k,l}}|f(z)|(1-|z|)^{\frac{\alpha+2}{p}}\exp\left(-\frac{1}{p}\varphi\left(\frac{4}{1-|z|}\right)\right)\\ \le 4^{\frac{\alpha+2}{p}}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=-2^k}^{2^k-1}\left(\int\limits_{\Delta^*_{k,l}}|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha\exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right)d\nu(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Тогда

$$\int\limits_{B_1}|f(z)|(1-|z|)^{\frac{\alpha+2}{p}-2}\exp\left(-\frac{1}{p}\varphi\left(\frac{4}{1-|z|}\right)\right)d\nu(z)\\ \le 4^{\frac{\alpha+2}{p}}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=-2^k}^{2^k-1}\left(\int\limits_{\Delta^*_{k,l}}|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha\exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right)d\nu(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Учитывая, что $0<p\le 1$, и применяя очевидное неравенство $(a+b)^p\le a^p+b^p$ при $a\ge 0$, $b\ge 0$, получаем

$$\left(\int\limits_{B_1}|f(z)|(1-|z|)^{\frac{\alpha+2}{p}-2}\exp\left(-\frac{1}{p}\varphi\left(\frac{4}{1-|z|}\right)\right)d\nu(z)\right)^p\\ \le 4^{\alpha+2}\sum_{k=0}^{+\infty}\sum_{l=-2^k}^{2^k-1}\int\limits_{\Delta^*_{k,l}}|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha\exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right)d\nu(\zeta).$$

Теперь, учитывая, что криволинейные прямоугольники покрывают круг конечнократно, имеем

$$\int\limits_{B_1}|f(z)|(1-|z|)^{\frac{\alpha+2}{p}-2}\exp\left(-\frac{1}{p}\varphi\left(\frac{4}{1-|z|}\right)\right)d\nu(z)\\ \le c(\alpha,p)\left(\int\limits_{B_1}|f(\zeta)|^p(1-|\zeta|)^\alpha\exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|\zeta|}\right)\right)d\nu(\zeta)\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Лемма доказана.

Замечание 3. Разумеется, утверждение леммы 8 можно вывести из леммы 1, но при дополнительных условиях на функцию φ.

Лемма 9. *Пусть Φ — линейный непрерывный функционал на $A^p(\varphi)$, $1\le p<+\infty$, $f(w)=\sum\limits_{k=0}^{+\infty}f_k(w)$, $w\in B$, — однородное разложение функции f в B. Тогда справедливо представление*

$$\Phi(f)=\lim_{\rho\to 1-0}\sum_{k=0}^{+\infty}\rho^k\Phi(f_k).$$

Доказательство. Пусть $0 < \rho < 1$, $f(w) = f(\rho w)$, $w \in B$. Тогда $f(\rho w) = \sum\limits_{k=0}^{+\infty} \rho^k f_k(w), w \in B$, при этом ряд равномерно сходится на множестве $B \cup S$ и, значит, в пространстве $A^p(\varphi)$. Следовательно,

$$\Phi(f) = \lim_{\rho \to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \Phi(f_k). \tag{18}$$

Лемма доказана.

§ 2. Доказательство теоремы

Пусть $f \in A^p(\varphi)$, $0 < p' < p$. Ввиду того, что из слабой обратимости f в $A^p(\varphi)$ следует ее слабая обратимость в любом пространстве $A^{p''}(\varphi)$, $p'' < p$, можно предполагать, не ограничивая общности, что $1 \le p' < p$. Предположим далее, что $\Phi \in (A^{p'})^*$ — линейный непрерывный функционал такой, что $\Phi(\psi) = 0$ для любой $\psi \in E(f)$. Для доказательства теоремы достаточно установить равенство $\Phi(1) = 0$. В силу леммы 5 имеем $\Phi(R^m(f)) = \Phi(\widetilde{R}^m(f)) = 0$, $m \in Z_+$. Отсюда, используя лемму 9, легко заметить, что

$$\lim_{\rho \to 1-0} \sum_{k=0}^{+\infty} \rho^k \widetilde{P}(k) \Phi(f_k) = 0$$

для произвольного многочлена $\widetilde{P}$ от $z \in \mathbf{C} = \mathbf{C}^1$. Докажем теперь, что если $f \in A^p(\varphi)$, $1 \le p' < p$, и φ удовлетворяет условиям теоремы, то

$$\sum_{k=1}^{+\infty} k^s |\Phi(f_k)| < +\infty, \quad s \in R_+. \tag{19}$$

Действительно, по определению $|\Phi(f_k)| \le \|\Phi\| \|f_k\|_{A^{p'}(\varphi)}$, т. е.

$$|\Phi(f_k)| \le \|\Phi\| \left(\int\limits_B |f_k(w)|^{p'} \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-|w|} \right) \right) d\nu(w) \right)^{\frac{1}{p'}}. \tag{20}$$

Последний интеграл можно оценить следующим образом:

$$\|f_k\|^{p'}_{A^{p'}(\varphi)} = \int\limits_0^1 r^{kp'+2n-1} \left(\int\limits_S |f_k(w')|^{p'} \, d\sigma(w') \right) \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-r} \right) \right) dr$$

$$\le c(n) m_k^{p'} r_k^{kp'} \exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-r_k} \right) \right),$$

где r_k — точка максимума функции $r \to r^{kp'} \exp\bigl(-\varphi\bigl(\frac{1}{1-r}\bigr)\bigr)$ на интервале $(0,1)$, а m_k определяется по (11). Таким образом, из (20) получаем

$$|\Phi(f_k)| \le c(n) m_k r_k^k \exp\left(-\frac{1}{p'} \varphi\left(\frac{1}{1-r_k} \right) \right), \quad k \in Z_+.$$

Теперь воспользуемся оценкой

$$m_k \le \frac{c(n,f)}{r_k^k} \left[\frac{\varphi'(\frac{1}{1-r_k})}{(1-r_k)^2} \right]^{\frac{2n}{p}} \left(\exp \frac{1}{p} \varphi\left(\frac{1}{1-r_k} \right) \right), \quad k \in Z_+.$$

Тогда
$$|\Phi(f_k)| \le c_1(n,f)\left[\frac{\varphi'(\frac{1}{1-r_k})}{(1-r_k)^2}\right]^{\frac{2n}{p}}\left(\exp\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p'}\right)\varphi\left(\frac{1}{1-r_k}\right)\right). \tag{21}$$
Поскольку
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\varphi'(x)}{\varphi(x)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\ln\varphi''(x)}{\varphi'^2(x)} = 0,$$
из (21) следует, что для произвольного $0<\delta<1/p'-1/p$ справедлива оценка
$$|\Phi(f_k)| \le c(n,\delta,f)\exp\left(-\delta\varphi\left(\frac{1}{1-r_k}\right)\right), \quad k\in Z_+. \tag{22}$$

Перейдем к оценке $\varphi\bigl(\frac{1}{1-r_k}\bigr)$. Положим $x_k=\frac{1}{1-r_k}$, $k=1,2,\dots$. Напомним, что r_k — точка максимума функции $r^{kp'}\exp\bigl(-\varphi\bigl(\frac{1}{1-r}\bigr)\bigr)$ на интервале $(0,1)$, т. е.
$$\max_{0<r<1}\left(r^{kp'}\exp\left(-\varphi\left(\frac{1}{1-r}\right)\right)\right) = \sup_{x>1}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{kp'}\exp(-\varphi(x))$$
$$= \left(1-\frac{1}{x_k}\right)^{kp'}\exp(-\varphi(x_k)), \quad x_k=\frac{1}{1-r_k},$$
поэтому x_k является решением уравнения $kp'-\varphi'(x_k)(x_k-1)x_k=0$, значит, $kp'=\varphi'(x_k)(x_k-1)x_k$. Следовательно,
$$kp' \le x_k^2\varphi'(x_k) \le 2kp', \quad k\ge 1. \tag{23}$$
Из условия теоремы следует, что функция $x\to x^2\varphi'(x)$ строго монотонно возрастает на R_+. Пусть $\nu(x)$ — обратная к этой функции. Тогда, учитывая неравенство (23), получаем $\nu(kp')\le x_k\le\nu(2kp')$. Но $p'\ge 1$, поэтому $\nu(k)\le\nu(kp')\le x_k\le\nu(2kp')$. Далее, в силу (22) будем иметь
$$|\Phi(f_k)| \le c(n,f)\exp(-\delta\varphi(\nu(k))). \tag{24}$$
Ввиду того, что
$$\lim_{x\to+\infty}\frac{\varphi(\nu(x))}{\ln x} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\varphi(y)}{\ln(\varphi'(y)y^2)} = \lim_{y\to+\infty}\frac{\varphi'(y)}{\frac{\varphi''(y)}{\varphi'(y)}+\frac{2}{y}}$$
$$= \lim_{y\to+\infty}\frac{1}{\frac{\varphi''(y)}{\varphi'^2(y)}+\frac{2}{\varphi'(y)y}} = +\infty, \tag{25}$$
из оценки (24) для произвольного $m\in N$ получим
$$|\Phi(f_k)| \le \tilde c(n,f)/k^m,$$
поэтому ряд (19) сходится при всех $s\in R_+$ и
$$\sum_{k=0}^{+\infty}\widetilde P(k)\Phi(f_k)=0, \tag{26}$$
причем ряд абсолютно сходится, $\widetilde P$ — произвольный многочлен от $z\in\mathbf{C}=\mathbf{C}^1$.

Введем в рассмотрение голоморфную в полуплоскости $\mathbf{C}_+=\{z:\operatorname{Re}z>0\}$ функцию
$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\Phi(f_k)}{1+k+z^2}, \quad z\in\mathbf{C}_+.$$

Докажем, что в условиях теоремы $F(z)=0$ для любого $z\in\mathbf{C}_+$. Для этого воспользуемся стандартным методом из теории весовых приближений (см. [5]). Используем равенство

$$\frac{1}{1+k+z^2}=\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^p(k+1)^p}{z^{2(p+1)}}+\frac{(-1)^{m+1}(k+1)^{m+1}}{z^{2(m+1)}(1+k+z^2)},\quad z\in\mathbf{C}_+,\ m\in Z_+.$$

Умножая последнее тождество на $\Phi(f_k)$ и суммируя по k, получаем

$$F(z)=\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\sum_{p=0}^{m}\frac{(-1)^p(k+1)^p}{z^{2(p+1)}}\right)\Phi(f_k)+\frac{1}{z^{2(m+1)}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(-1)^{m+1}(k+1)^{m+1}}{1+k+z^2}\Phi(f_k).$$

Возвращаясь, наконец, к равенству (26), имеем

$$F(z)=\frac{1}{z^{2(m+1)}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^{m+1}}{1+k+z^2}\Phi(f_k),\quad z\in\mathbf{C}_+.$$

Учитывая оценку (24), получим

$$|F(z)|\le\frac{(-1)^{m+1}}{|z|^{2(m+1)}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^{m+1}|\Phi(f_k)|}{|1+k+z^2|}$$
$$\le\frac{c(n,f)}{|z|^{2(m+1)}}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+1)^{m+1}\exp(-\delta\varphi(\nu(k)))}{|1+k+z^2|}$$
$$\le\frac{c(n,f)}{|z|^{2(m+1)}}\sup_{k\ge0}\left\{(k+1)^{m+1}\exp\left(-\frac{\delta}{2}\varphi(\nu(k))\right)\right\}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\exp\left(-\frac{\delta}{2}\varphi(\nu(k))\right)}{|1+k+z^2|},\quad z\in\mathbf{C}_+.$$

Рассмотрим функцию F в полуплоскости $\mathbf{C}_1=\{z\in C:\operatorname{Re}z\ge1\}$. Из последней оценки и из (25) следует

$$|F(2z)|\le\frac{c_1(n,f)2^{m+1}}{4^{m+1}|z|^{2(m+1)}}\sup_{k\ge1}\left\{k^{m+1}\exp\left(-\frac{\delta}{2}\varphi(\nu(k))\right)\right\},\quad z\in\mathbf{C}_1.$$

Положим $\psi(z)=F(2z)$, $z\in\mathbf{C}_1$,

$$M_p=\sup_{k\ge1}\left(k^p\exp\left(-\frac{\delta\varphi(\nu(k))}{2}\right)\right),\ p\in Z_+;\quad T(r)=\sup_{p\ge1}\frac{r^p}{M_p},\ r\in R_+.$$

Тогда

$$|\psi(z)|\le c_1(n,f)\frac{M_{m+1}}{|z|^{2(m+1)}},\quad z\in C_1,\ m\in Z_+. \tag{27}$$

Из этой оценки непосредственно следует, что

$$|\psi(1+iy)|\le c_1(n,f)\frac{M_{m+1}}{|1+iy|^{2(m+1)}}\le c_1(n,f)\frac{M_{m+1}}{y^{2(m+1)}},\quad m\in Z_+.$$

Подберем $m\in Z_+$ таким образом, что $\frac{y^{2(m+1)}}{M_{m+1}}=T(y^2)$. Из оценки (27) получим

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\ln|\psi(1+iy)|}{1+y^2}\,dy\le\pi\ln c_1(n,f)-\int_{0}^{+\infty}\frac{\ln T(y^2)}{1+y^2}\,dy.$$

В дальнейшем мы докажем, что из условий теоремы следует

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln T(y^2)}{1+y^2}\,dy = +\infty. \tag{28}$$

Тогда из теоремы единственности (см. [19, с. 72]) получим, что $\psi(z)=0$, $z\in\mathbf{C}_1$, следовательно, $F(z)=0$ при всех $z\in\mathbf{C}\backslash\{\widetilde{Z}\}$, где $\widetilde{Z}=\{\pm i\sqrt{k+1}\}_{k=0}^{+\infty}$. Отсюда нетрудно установить, что $\Phi(f_k)=0$, $k=0,1,2,\dots$. Но поскольку $\Phi(f_0)=f(0)\Phi(1)$, $f(0)\neq 0$, то $\Phi(1)=0$.

Для доказательства первой части теоремы остается установить, что в условиях теоремы из (3) следует равенство (28). Как установлено в работе [5], если $\Psi(x)$ — весовая функция на R_+, при этом

$$M_m=\sup_{x\in R_+}\frac{x^m}{\Psi(x)},\ x\in R_+,\ m\in Z_+,\quad T(r)=\sup_{m\ge 1}\frac{r^m}{M_m},$$

то интегралы

$$\int_1^{+\infty}\frac{\ln T(r)}{r^{\frac32}}\,dr,\qquad \int_1^{+\infty}\frac{\ln\Psi(x)}{x^{\frac32}}\,dx$$

являются равнорасходящимися при условии представимости функции Ψ в виде $\Psi(x)=c\exp\int_1^x\frac{p(t)}{t}\,dt$, где $p(t)$ — монотонно растущая функция на R_+, $p(t)\to+\infty$, $t\to+\infty$. В условиях теоремы $\Psi(x)=\exp\bigl(\frac{\delta}{2}\varphi(\nu(x))\bigr)$, $x\in R_+$. Поскольку величина $\delta>0$ не играет никакой роли, не ограничивая общности, можно предполагать, что $\delta=2$. Итак, пусть $\Psi(x)=\exp(\varphi(\nu(x)))$, $x\in R_+$.

Сначала докажем, что $\varphi(\nu(x))=\varphi(1)+\int_1^x\frac{p(t)}{t}\,dt$, где $p(t)\uparrow+\infty$, $t\to+\infty$. Из последнего тождества имеем $p(x)=\varphi'(\nu(x))\nu'(x)x$, $x\in R_+$. Докажем, что функция p удовлетворяет условию $p(x)\uparrow+\infty$, $x\to+\infty$. Для этого в последнем равенстве положим $u=\nu(x)$, тогда

$$p(x)=\varphi'(\nu(x))\nu'(x)x=\frac{(\varphi'(u))^2u^2}{\varphi''(u)u^2+2u\varphi'(u)}=\frac{1}{\frac{\varphi''(u)}{\varphi'^2(u)}+\frac{2}{u\varphi'(u)}}.$$

Поскольку функция $\nu(x)$ монотонно растет, а по условию теоремы $\frac{\varphi''(u)}{\varphi'^2(u)}\downarrow 0$, $\frac{2}{u\varphi'(u)}\downarrow 0$ при $u\to+\infty$, отсюда получаем, что $p(x)\uparrow^{+\infty}$, $x\to+\infty$. Таким образом, чтобы завершить доказательство первой части теоремы, остается установить равенство $\int_1^{+\infty}\frac{\varphi(\nu(x))}{x^{\frac32}}\,dx=+\infty$. Заметим, что если $\lim\limits_{R\to+\infty}\frac{\varphi(\nu(R))}{R^{\frac12}}=+\infty$, то $\varphi(\nu(R))\ge c_0R^{\frac12}$, $c_0>0$, $R\ge R_0$. Поэтому расходимость указанного интеграла очевидна.

Осталось рассмотреть случай, когда существует последовательность $R_n\to+\infty$ такая, что

$$\sup_{n\ge1}\biggl(\frac{\varphi(\nu(R_n))}{R_n^{\frac12}}\biggr)<+\infty. \tag{29}$$

Сначала предположим, что $0\le\alpha_\varphi<+\infty$. Тогда если $I(R_n)=\int_1^{R_n}\frac{\varphi(\nu(x))}{x^{\frac32}}\,dx$, то, сделав замену $u=\nu(x)$, получаем

$$I(R_n)=\int\limits_{\nu(1)}^{\nu(R_n)}\frac{\varphi(u)(\varphi''(u)u^2+2\varphi'(u)u)}{(\varphi'(u)u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du.$$

Кроме того, учтем, что

$$\varphi'(u)u<(\alpha_\varphi+1)\varphi(u),\quad u\geq u_0. \tag{30}$$

Поэтому

$$I(R_n)\geq 2\int\limits_{\nu(1)}^{\nu(R_n)}\frac{\varphi(u)\varphi'(u)u}{(\varphi'(u)u^2)^{\frac{3}{2}}}\,du=2\int\limits_{\nu(1)}^{\nu(R_n)}\frac{\varphi(u)}{(\varphi'(u)u)^{\frac{1}{2}}u^{\frac{3}{2}}}\,du.$$

Учитывая оценку (30), получаем

$$I(R_n)\geq\frac{2}{(\alpha_\varphi+1)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\nu(1)}^{\nu(R_n)}\frac{(\varphi(u))^{\frac{1}{2}}}{u^{\frac{3}{2}}}\,du=\frac{2}{(\alpha_\varphi+1)^{\frac{3}{2}}}\int\limits_{\nu(1)}^{\nu(R_n)}\left(\frac{\varphi(u)}{u^3}\right)^{\frac{1}{2}}du.$$

Отсюда ясно, что $I(R_n)\to+\infty$ при $n\to+\infty$.

Остается рассмотреть случай $\alpha_\varphi=+\infty$. Положив $R=R_n$, получим

$$I(R_n)=-\frac{\varphi(\nu(R_n))}{R_n^{\frac{1}{2}}}+\int\limits_1^{R_n}\frac{\varphi'(\nu(x))\nu'(x)}{x^{\frac{1}{2}}}\,dx.$$

Докажем, что при $n\to+\infty$ последний интеграл стремится к бесконечности. Снова делая замену $u=\nu(x)$, имеем

$$I(R_n)=-\frac{\varphi(\nu(R_n))}{R_n^{\frac{1}{2}}}+\int\limits_{\nu(1)}^{\nu(R_n)}\frac{\varphi'(u)}{(\varphi'(u)u^2)^{\frac{1}{2}}}\,du=-\frac{\varphi(\nu(R_n))}{R_n^{\frac{1}{2}}}+\int\limits_{\nu(1)}^{\nu(R_n)}\frac{(\varphi'(u))^{\frac{1}{2}}}{u}\,du.$$

Так как $\alpha_\varphi=+\infty$, для произвольного фиксированного $N>0$ будет $\frac{\varphi'(u)u}{\varphi(u)}>N$ при $u\geq u_0(N)$. Поэтому $\int\limits_{u_0}^{x}\frac{\varphi'(u)}{\varphi(u)}\,du>N\ln\frac{x}{u_0}$ или $\frac{\varphi(x)}{\varphi(u_0)}>\left(\frac{x}{u_0}\right)^N$, т. е. $\varphi'(x)\geq c(N,u_0)x^{N-1}$, $x\geq u_0(N)$. Из этой оценки следует, что

$$I(R_n)\geq-\frac{\varphi(\nu(R_n))}{R_n^{\frac{1}{2}}}+c(N,u_0)\int\limits_{\nu(1)}^{\nu(R_n)}x^{\frac{N-3}{2}}\,dx=-\frac{\varphi(\nu(R_n))}{R_n^{\frac{1}{2}}}+c_1(N,u_0)(\nu(R_n))^{\frac{N-1}{2}}.$$

Отсюда, учитывая оценку (29), получаем доказательство первой части теоремы.

Перейдем к доказательству второй части. Воспользуемся следующей оценкой из [15, с. 125]: *если $g\in H^p(B)$, $0<p<+\infty$, где $H^p(B)$ — класс Харди в B, то для произвольного $z\in B$ справедлива оценка*

$$(1-|z|)^n|g(z)|^p\leq 2^{\frac{n}{p}}\int\limits_S|g(\zeta)|^p\,d\sigma(\zeta).$$

Взяв в качестве g функцию $f_r(z) = f(rz)$, $z \in B$, где f — произвольная функция из $H(B)$, $0 \le r < 1$, из этого неравенства имеем

$$(1 - |z|^2)^n |f(rz)|^p \le 2^{\frac{n+1}{p}} \int_S |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta)$$

при всех $z \in B$. В частности, подбирая $z = (w, 0, \dots, 0)$, $w \in B_1$, получим

$$(1 - |w|^2)^n |f(rw, 0, \dots, 0)|^p \le 2^{\frac{n}{p}} \int_S |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta).$$

Положив в последнем неравенстве $w = re^{i\Theta}$, умножим на $\exp\bigl(-\varphi\bigl(\frac{1}{1-r}\bigr)\bigr) r^{2n-1}$ и проинтегрируем по прямоугольнику $(0,1) \times [-\pi, \pi]$. Получаем

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - r^2)^n |f(r^2 e^{i\theta}, 0, \dots, 0)|^p \exp\biggl(-\varphi\biggl(\frac{1}{1-r}\biggr)\biggr) r^{2n-1} \, dr d\theta$$
$$\le \pi 2^{\frac{n}{p}+2} \int_0^1 \exp\biggl(-\varphi\biggl(\frac{1}{1-r}\biggr)\biggr) r^{2n-1} \biggl(\int_S |f(r\zeta)|^p \, d\sigma(\zeta)\biggr) dr,$$

т. е.

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - r^2)^n |f_1(r^2 e^{i\theta})|^p \exp\biggl(-\varphi\biggl(\frac{1}{1-r}\biggr)\biggr) r^{2n-1} \, dr$$
$$\le \pi 2^{\frac{n}{p}+2} \|f\|^p_{A^p(\varphi)}, \quad 0 < p < +\infty,$$

где $f_1(z) = f(z, 0, \dots, 0)$. В интеграле в левой части неравенства сделаем замену $r^2 = \rho$. Тогда

$$\int_0^1 \int_{-\pi}^{\pi} (1 - \rho)^n |f_1(\rho e^{i\theta})|^p \exp\biggl(-\varphi\biggl(\frac{1}{1-\sqrt{\rho}}\biggr)\biggr) \rho^n \, d\theta d\rho$$
$$\le \pi 2^{\frac{n}{p}+2} \|f\|^p_{A^p(\varphi)}, \quad 0 < p < +\infty. \qquad (31)$$

Пусть теперь $z = (z_1, z_2, \dots, z_n) \in B$, $I(\zeta) = \exp\bigl(-\frac{1+\zeta}{1-\zeta}\bigr)$, $\zeta \in B_1$, $F(z) = \prod_{j=1}^{n} I(z_j)$, $z = (z_1, z_2, \dots, z_n)$. Очевидно, что $F \in H^\infty(B)$, при этом $\|F\|_\infty \le 1$. Предположим, что существует последовательность многочленов P_m от $(z_1, z_2, \dots, z_n)$, $m = 1, 2, \dots$, такая, что

$$\lim_{m \to +\infty} \|P_m F - 1\|_{A^p(\varphi)} = 0, \quad 0 < p < +\infty.$$

Учитывая оценку (31), заключаем, что существует последовательность $P_m(\zeta) = P_m(\zeta, 0, \dots, 0)$, $\zeta \in B_1$, такая, что

$$\lim_{m \to +\infty} \int_{B_1} (1 - |\zeta|)^n |P_m(\zeta) I(\zeta) - 1|^p$$
$$\times \exp\biggl(-\varphi\biggl(\frac{1}{1-\sqrt{|\zeta|}}\biggr) - n \ln \frac{1}{|\zeta|}\biggr) d\nu(\zeta) = 0, \quad 0 < p < +\infty.$$

Если $1 \le p < +\infty$, то из леммы 7 получаем

$$\int_0^1 \left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{1-\sqrt{\rho}}\right) + n\ln\frac{1}{1-\rho} + n\ln\frac{1}{\rho}}{1-\rho}\right)^{\frac{1}{2}} d\rho = +\infty.$$

Поскольку φ — весовая функция, нетрудно заметить, что расходимость этого интеграла равносильна тому, что

$$\int_0^1 \left(\frac{\varphi\left(\frac{1}{1-\rho}\right)}{1-\rho}\right)^{\frac{1}{2}} d\rho = \int_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty.$$

Теорема доказана полностью для случая $1 \le p < +\infty$. Перейдем к случаю $0 < p < 1$. Для этого воспользуемся леммой 8, из которой следует, что

$$\lim_{m\to+\infty} \int_{B_1} (1-|\zeta|)^{\frac{n+2}{p}-2} |P_m(\zeta)I(\zeta) - 1| \times \exp\left(-\frac{1}{p}\varphi\left(\frac{4}{1-\sqrt{|\zeta|}}\right) - \frac{n}{2}\ln\frac{1}{|\zeta|}\right) d\nu(\zeta) = 0.$$

Из данного равенства, снова используя лемму 7 при $p = 1$, имеем

$$\int_0^1 \left(\frac{\varphi\left(\frac{4}{1-\sqrt{\rho}}\right) + \left(\frac{n+2}{p} - 2\right)\ln\frac{1}{1-\rho} + \frac{n}{2}\ln\frac{1}{\rho}}{1-\rho}\right)^{\frac{1}{2}} d\rho = +\infty.$$

Опять учитывая, что φ — весовая функция, из последнего равенства получаем условие (3). Теорема доказана полностью.

Следующее утверждение при $1 \le p < +\infty$ в случае единичного круга установлено в работах [6, 7], в случае поликруга — в работе [12].

Следствие 2. *Пусть функция φ удовлетворяет условиям теоремы, $0 < p < +\infty$. Тогда для того чтобы каждая функция $F \in H^\infty(B)$, $F(z) \ne 0$, $z \in B$, была слабо обратимой в пространстве $A^p(\varphi)$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\int_1^{+\infty} \left(\frac{\varphi(x)}{x^3}\right)^{\frac{1}{2}} dx = +\infty.$$

Автор выражает благодарность рецензенту статьи за внимательное ознакомление с рукописью и конструктивные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Никольский Н. К.* Инвариантные подпространства в теории операторов и теории функций // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1974. Т. 12. С. 199–412. (Итоги науки и техники).
2. *Nikolski N. K.* Operators, functions and systems: An easy reading. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001. V. 1. (Math. Surveys and monographs; V. 92).
3. *Хавин В. П.* Методы и структура коммутативного гармонического анализа // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1987. Т. 15. С. 12–131. (Итоги науки и техники).
4. *Келдыш М. В.* Sur l'appraximation en moyenne par polynomes des functions d'une variable complexe // Мат. сб. 1945. Т. 16, № 1. С. 1–20.

5. *Мергелян С. Н.* Весовые приближения многочленами // Успехи мат. наук. 1956. Т. 9, № 5. С. 107–152.
6. *Beurling A.* A critical topology in harmonic analysis on semigroups // Acta Math. 1964. V. 112, N 3–4. P. 215–228.
7. *Никольский Н. К.* Избранные задачи весовой аппроксимации и спектрального анализа // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 1974. Т. 120. С. 3–270.
8. *Shapiro H. S.* Weakly invertible elements in certain functions spaces and generators in l^1 // Mich. Math. J. 1964. V. 11, N 2. P. 161–165.
9. *Hedberg L. I.* Weighted mean approximation in Caratheodory region // Math. Scand. 1968. V. 23, N 1. P. 113–122.
10. *Шамоян Ф. А.* О слабой обратимости в некоторых пространствах аналитических функций // Докл. АН Арм. ССР. 1982. Т. 74, № 4. С. 157–160.
11. *Шамоян Ф. А.* О слабой обратимости в весовых пространствах аналитических функций // Изв. РАН. 1996. Т. 60, № 5. С. 190–212.
12. *Шамоян Ф. А.* Слабо обратимые элементы в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций // Мат. сб. 2002. Т. 193, № 6. С. 143–161.
13. *Шамоян Ф. А.* О циклических элементах оператора сдвига в весовых анизотропных пространствах аналитических в поликруге функций // Исследование по линейным операторам и теории функций. СПб: ПОМИ РАН, 2005. Вып. 33. С. 225–234.
14. *Borichev A. A., Hedenmalm H.* Harmonic functions of maximal growth: invertibility and cyclicity in Bergman spaces // J. Amer. Math. Soc. 1997. V. 10, N 3. P. 761–796.
15. *Рудин У.* Теория функций в единичном шаре из C^n. М.: Мир, 1984.
16. *Александров А. Б.* Теория функций в шаре // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 1985. Т. 8. С. 115–190. (Итоги науки и техники).
17. *Шамоян Ф. А.* Теоремы вложения и характеристики следов в пространствах $H^p(U^n)$, $0 < p < +\infty$ // Мат. сб. 1978. Т. 107, № 3. С. 446–466.
18. *Шамоян Ф. А.* Диагональные отображения и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. журн. 1990. Т. 31, № 2. С. 197–245.
19. *Гарнетт Дж.* Ограниченные аналитические функции. М.: Мир, 1984.

Статья поступила 27 мая 2008 г.

Шамоян Файзо Агитович
Брянский гос. университет, кафедра математического анализа,
ул. Бежицкая, 14, Брянск 241036
shamoyanfa@yandex.ru