Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2010. Том 51, № 3

УДК 517.925.5+517.929

ОБ ОДНОМ СПОСОБЕ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ

Г. В. Демиденко, И. А. Мельник

Аннотация. Изучены связи между решениями одного класса систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности и уравнений с запаздывающим аргументом. Обоснован новый способ аппроксимации решений уравнений с запаздывающим аргументом.

Ключевые слова: уравнение с запаздывающим аргументом, предельные теоремы, обобщенное решение, неравенство Стирлинга, функции Хаара.

§ 1. Введение

В ряде работ [1–5] установлены новые связи между решениями дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом:

$$\frac{dy(t)}{dt} = f(t, y(t), y(t-\tau)), \quad t > \tau, \tag{1.1}$$

и решениями некоторых классов систем обыкновенных дифференциальных уравнений большой размерности n:

$$\frac{dx}{dt} = A_n x + F(t, x), \quad n \gg 1. \tag{1.2}$$

Установление таких связей позволяет, в частности, проводить исследования качественных свойств решений уравнения (1.1), используя теоретические результаты для системы уравнений (1.2), а также находить приближенные решения системы уравнений (1.2), численно решая краевые задачи для уравнения (1.1).

В данной работе мы продолжим исследования [1–5] и будем рассматривать дифференциальное уравнение с запаздывающим аргументом вида

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau. \tag{1.3}$$

Как показано в работе [1], это уравнение тесно связано с системой дифференциальных уравнений (1.2), где

$$A_n = \begin{pmatrix} -\frac{n-1}{\tau} & 0 & \cdots & \cdots & 0 \\ \frac{n-1}{\tau} & -\frac{n-1}{\tau} & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & -\frac{n-1}{\tau} & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \frac{n-1}{\tau} & -\theta \end{pmatrix}, \quad \theta \geq 0, \ \tau > 0, \tag{1.4}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦП «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» на 2009–2013 гг. (гос. контракт № 02.740.11.0429), Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00035) и Сибирского отделения Российской академии наук (междисциплинарный проект № 107).

$$F(t,x) = \begin{pmatrix} g(t,x_n) \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Отметим, что система уравнений (1.2) с матрицей (1.4) возникает при моделировании многостадийного синтеза вещества (см., например, [1, 6]). Размерность системы n определяется числом стадий синтеза, τ — время протекания процесса, $x_j(t)$ — концентрация вещества на j-й стадии. В случае большого числа стадий n ввиду нелинейности функции $g(t,z)$ возникает проблема нахождения конечного продукта $x_n(t)$. Способы решения этой «проблемы большой размерности» изучены в работах [1, 3] и основаны на доказательстве теорем о предельном переходе от системы (1.2), (1.4) к уравнению (1.3).

Таким образом, некоторая связь между системой (1.2), (1.4) и уравнением (1.3) вначале была установлена при решении конкретной биологической задачи о нахождении конечного продукта многостадийного синтеза. Дальнейшие исследования [4, 5, 7] показали, что существуют более тесные связи между решениями (1.2) и (1.3). Настоящая работа посвящена изучению таких связей. Для их описания нам понадобятся некоторые сведения из [1, 3], которые мы приводим ниже.

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений (1.2) с матрицей (1.4):

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = A_n x + F(t,x), \quad t > 0, \\ x|_{t=0} = x^0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Предполагаем, что функция $g(t,z) \in C\left(\overline{\mathbb{R}}_2^+\right)$ ограничена и удовлетворяет условию Липшица

$$|g(t,z_1) - g(t,z_2)| \le L|z_1 - z_2|, \quad t \ge 0,\ z_1, z_2 \in \mathbb{R}.$$

Будем неограниченно увеличивать размерность системы (1.2). Очевидно, при любом n задача (1.5) однозначно разрешима на любом отрезке $[0,T]$. Рассмотрим последовательность функций $\left\{x_n^n(t)\right\}$, $n \ge 3$, где $x_n^n(t)$ являются последними компонентами решений серии задач Коши вида (1.5). Если при любом n начальные условия в (1.5) нулевые, то, как показано в работах [1, 3], последовательность $\left\{x_n^n(t)\right\}$ равномерно сходится:

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty,\ t \in [0,T], \tag{1.6}$$

и предельная функция является решением следующей начальной задачи для уравнения (1.3):

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) \equiv 0, \quad 0 \le t \le \tau, \quad y(\tau+0) = 0. \end{cases} \tag{1.7}$$

В работах [1, 3] также получены оценки скорости сходимости (1.6) вида

$$\left|x_n^n(t) - y(t)\right| \le \frac{c}{n^{1/4}}, \quad n \ge n_0, \tag{1.8}$$

где константа $c > 0$ не зависит от n.

Оценка (1.8) дает возможность для приближенного нахождения конечного продукта $x_n(t)$ при большом числе $n \gg 1$ промежуточных стадий синтеза в случае, когда начальная концентрация x^0 равна нулю. Для этого достаточно построить решение $y(t)$ начальной задачи (1.7), затем, принимая во внимание (1.8), оценить погрешность $|x_n(t) - y(t)|$. Отметим, что построение приближенного решения задачи (1.7) не представляет особых трудностей (см., например, [8, 9]).

В случае, когда начальные условия x^0 в (1.5) ненулевые, для нахождения конечного продукта $x_n(t)$ при $n \gg 1$ можно также попытаться использовать описанную схему, изучая предельные свойства последовательности $\{x_n^n(t)\}$. Однако в этом случае при описании предельных свойств, как показано в [4, 5], возникает ряд особенностей. Во-первых, как правило, сходимость (1.6) имеет место в более слабом смысле. Во-вторых, предельная функция $y(t)$ является *обобщенным* решением начальной задачи

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = \varphi(t), \quad 0 \le t \le \tau, \end{cases} \tag{1.9}$$

при этом не всегда выполняется равенство $y(\tau+0) = \varphi(\tau)$. В настоящей работе мы проведем исследование сходимости последовательности $\{x_n^n(t)\}$ при ненулевых начальных данных в (1.5) и изучим свойства предельной функции. Будем предполагать, что функция $g(t,z)$ удовлетворяет указанным выше условиям. На основе полученных в следующих параграфах результатов будет доказана

Теорема 1. *Любое решение дифференциального уравнения* (1.3), *принимающее непрерывные значения на отрезке* $[0,\tau]$, *может быть сколь угодно точно аппроксимировано решениями задачи Коши* (1.5) *при* $n \gg 1$.

Некоторые результаты работы анонсированы в [5, 7].

Авторы выражают благодарность Л. Н. Бондарь, Т. В. Котовой, И. И. Матвеевой, А. В. Мудрову, А. М. Попову, Ю. Е. Хроповой за полезные дискуссии.

§ 2. Формулы решения задачи Коши (1.5)

При изучении сходимости последовательности $\{x_n^n(t)\}$ понадобится свойство этих функций, указанное в следующей теореме. Отметим, что сейчас мы будем рассматривать задачу Коши для системы (1.2) с фиксированным числом уравнений n, поэтому при записи последней компоненты ее решения будем опускать верхний индекс, т. е. $x_n^n(t) \equiv x_n(t)$.

Теорема 2. *Последняя компонента решения задачи Коши* (1.5) *удовлетворяет следующему интегральному соотношению:*

$$x_n(t) = \sum_{k=1}^{n} x_{n-k+1}^0 \hat{\psi}_k^n(t) + \int_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s) g(s, x_n(s))\, ds, \tag{2.1}$$

где

$$\hat{\psi}_1^n(t) = e^{-\theta t}, \quad \hat{\psi}_k^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}} \left(1 - e^{-\omega t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega t)^j}{j!}\right), \quad k = 2, \dots, n, \tag{2.2}$$

$\omega = \frac{n-1}{\tau} - \theta$.

Доказательство. Вывод формулы (2.1) разобьем на ряд лемм.

Лемма 1. *Для компонент решения задачи Коши* (1.5) *выполнены следующие соотношения:*

$$x_k^{(p)}\big|_{t=0} = \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^p \sum_{j=0}^{p} (-1)^j C_p^j x_{k-p+j}^0, \quad p = 0, \dots, n-2,\ k = p+1, \dots, n-1. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $x(t) = (x_1(t), \dots, x_n(t))^T$ — решение задачи Коши (1.5). Доказательство (2.3) проведем по индукции относительно p. При $p = 0$ утверждение леммы следует из начальных условий задачи Коши (1.5). Предположим, что при $p = r < n-1$ утверждение леммы доказано для всех $k = r+1, \dots, n-1$. Покажем, что соотношения (2.3) выполнены для $p = r+1$ и $k = r+2, \dots, n-1$. Из тождества

$$\frac{dx(t)}{dt} \equiv A_n x(t) + F(t, x(t))$$

следует тождество

$$x_k^{(r+1)}(t) \equiv \frac{n-1}{\tau}\big(x_{k-1}^{(r)}(t) - x_k^{(r)}(t)\big).$$

При $t = 0$, используя предположение индукции, имеем

$$x_k^{(r+1)}\big|_{t=0} = \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{r+1} \left(\sum_{j=0}^{r} (-1)^j C_r^j x_{k-1-r+j}^0 - \sum_{j=0}^{r} (-1)^j C_r^j x_{k-r+j}^0\right)$$

$$= \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{r+1} \left(x_{k-1-r}^0 + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j C_r^j x_{k-1-r+j}^0 + \sum_{j=0}^{r-1} (-1)^{j+1} C_r^j x_{k-r+j}^0 + (-1)^{r+1} x_k^0\right)$$

$$= \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{r+1} \left(x_{k-(r+1)}^0 + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j \big(C_r^j + C_r^{j-1}\big) x_{k-(r+1)+j}^0 + (-1)^{r+1} x_k^0\right).$$

Поскольку $C_r^j + C_r^{j-1} = C_{r+1}^j$, получим

$$x_k^{(r+1)}\big|_{t=0} = \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{r+1} \left(x_{k-(r+1)}^0 + \sum_{j=1}^{r} (-1)^j C_{r+1}^j x_{k-(r+1)+j}^0 + (-1)^{r+1} x_k^0\right),$$

что совпадает с (2.3) при $p = r+1$.

Лемма доказана.

Лемма 2. *Последняя компонента решения задачи Коши* (1.5) *является решением задачи Коши*

$$\begin{cases} \left(\frac{d}{dt} + \frac{n-1}{\tau} I\right)^{n-1} \left(\frac{d}{dt} + \theta I\right) x_n = \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{n-1} g(t, x_n), \\ x_n^{(k)}\big|_{t=0} = x_n^k, \quad k = 0, \dots, n-1, \end{cases} \tag{2.4}$$

где

$$x_n^k = -\theta x_n^{k-1} + \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^k \sum_{j=0}^{k-1} (-1)^j C_{k-1}^j x_{n-k+j}^0, \quad k = 1, \dots, n-1. \tag{2.5}$$

Доказательство. Очевидно, последняя компонента решения задачи Коши (1.5) удовлетворяет дифференциальному уравнению в (2.4). Остается проверить, что для $x_n^{(k)}\big|_{t=0}$ будут выполнены соотношения (2.5). При $k = 0$ из (1.5) имеем $x_n|_{t=0} = x_n^0$. Пусть $0 < k < n-1$. Очевидно, для последней компоненты решения задачи Коши (1.5) выполнено тождество

$$\frac{d}{dt} x_n(t) \equiv -\theta x_n(t) + \frac{n-1}{\tau} x_{n-1}(t).$$

Продифференцировав это тождество $k-1$ раз, получим

$$x_n^{(k)}(t) \equiv -\theta x_n^{(k-1)}(t) + \frac{n-1}{\tau} x_{n-1}^{(k-1)}(t).$$

При $t = 0$ имеем

$$x_n^{(k)}\big|_{t=0} = x_n^k = -\theta x_n^{k-1} + \frac{n-1}{\tau} x_{n-1}^{(k-1)}\big|_{t=0}.$$

Подставив выражение для $x_{n-1}^{(k-1)}\big|_{t=0}$ из леммы 1, получим (2.5).

Лемма доказана.

Лемма 3. *Решение задачи Коши* (2.4) *удовлетворяет соотношению* (2.1).

Доказательство. По формуле Коши решение задачи (2.4) может быть представлено в виде

$$x_n(t) = \sum_{i=1}^{n} c_i \hat{\psi}_i^n(t) + \int_0^t \hat{\psi}_n^n(t-s) g(s, x_n(s))\, ds, \tag{2.6}$$

где функции $\hat{\psi}_i^n(t)$ заданы формулой (2.2). Заметим, что они могут быть записаны в виде

$$\hat{\psi}_i^n(t) = \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{i-1} \psi(t, \lambda_1, \dots, \lambda_i), \quad i = 1, \dots, n,$$

$$\lambda_1 = -\theta, \quad \lambda_2 = \dots = \lambda_n = -\frac{n-1}{\tau},$$

где функции $\psi(t, \lambda_1, \dots, \lambda_i)$ при произвольных параметрах λ_k определяются рекуррентно (см., например, [10]):

$$\psi(t, \lambda_1) = e^{t\lambda_1},$$

$$\psi(t, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = \int_0^t e^{\lambda_k (t-s)} \psi(s, \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1})\, ds, \quad k = 2, \dots, n. \tag{2.7}$$

В дальнейшем нам понадобятся следующие свойства функций (2.7):

1) $\psi(t, \lambda_1, \dots, \lambda_i)$ являются симметрическими функциями относительно параметров $\lambda_1, \dots, \lambda_i$;

2) $\psi_t^{(p)}(t, \lambda_1, \dots, \lambda_i)\big|_{t=0} = 0$, $p = 0, \dots, i-2$, и $\psi_t^{(i-1)}(t, \lambda_1, \dots, \lambda_i)\big|_{t=0} = 1$.

Для удобства введем обозначения

$$\psi_i(t) = \psi(t, \lambda_1, \dots, \lambda_i), \quad \varphi_{i-1}(t) = \psi(t, \lambda_2, \dots, \lambda_i).$$

Из (2.7) и свойств ψ-функций при $i = 2, \dots, n$ имеем

$$\frac{d\psi_i(t)}{dt} \equiv -\theta \psi_i(t) + \varphi_{i-1}(t). \tag{2.8}$$

Из (2.7) следует также, что

$$\varphi_{i-1}(t) \equiv \frac{t^{i-2}}{(i-2)!}e^{-\frac{n-1}{\tau}t}, \quad \varphi_{i-1}^{(k)}\big|_{t=0} = 0, \quad k = 0, \dots, i-3,$$

$$\varphi_{i-1}^{(k)}\big|_{t=0} = \left(-\frac{n-1}{\tau}\right)^{k-i+2} C_k^{k-i+2}, \quad k = i-2, i-1, \dots. \tag{2.9}$$

Для доказательства леммы 3 достаточно показать, что в (2.6) $c_i = x_{n-i+1}^0$. При $t = 0$ из (2.6) получаем

$$x_n\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^n c_i \hat{\psi}_i^n\big|_{t=0} = c_1,$$

т. е. $c_1 = x_n^0$. Пусть для всех $i = 1, \dots, k$, $k < n$, показано, что $c_i = x_{n-i+1}^0$. Покажем, что $c_{k+1} = x_{n-k}^0$. Дифференцируя (2.6) k раз, в силу свойств функций $\psi_i(t)$ при $t = 0$ получим

$$x_n^{(k)}\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{k+1} c_i \hat{\psi}_i^{n\,(k)}\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{k} x_{n-i+1}^0 \hat{\psi}_i^{n\,(k)}\big|_{t=0} + c_{k+1}\left(\frac{n-1}{\tau}\right)^k. \tag{2.10}$$

Для суммы в правой части имеем

$$\sum_{i=1}^{k} x_{n-i+1}^0 \hat{\psi}_i^{n\,(k)}\big|_{t=0} = x_n^0 \hat{\psi}_1^{n\,(k)}\big|_{t=0} + \sum_{i=2}^{k} x_{n-i+1}^0 \hat{\psi}_i^{n\,(k)}\big|_{t=0}$$

$$= x_n^0 \psi_1^{(k)}\big|_{t=0} + \sum_{i=2}^{k} x_{n-i+1}^0 \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{i-1} \psi_i^{(k)}\big|_{t=0}.$$

Используя (2.7)–(2.9), получим

$$\sum_{i=1}^{k} x_{n-i+1}^0 \hat{\psi}_i^{n\,(k)}\big|_{t=0} = -\theta x_n^0 \psi_1^{(k-1)}\big|_{t=0}$$

$$- \theta \sum_{i=2}^{k} x_{n-i+1}^0 \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{i-1} \psi_i^{(k-1)}\big|_{t=0} + \sum_{i=2}^{k} x_{n-i+1}^0 \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{i-1} \varphi_{i-1}^{(k-1)}\big|_{t=0}$$

$$= -\theta x_n^0 \hat{\psi}_1^{n\,(k-1)}\big|_{t=0} - \theta \sum_{i=2}^{k} x_{n-i+1}^0 \hat{\psi}_i^{n\,(k-1)}\big|_{t=0}$$

$$+ \sum_{i=2}^{k} x_{n-i+1}^0 \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^{k} (-1)^{k-i+1} C_{k-1}^{k-i+1}. \tag{2.11}$$

По предположению индукции из формулы (2.6) следует, что

$$x_n^{(k-1)}\big|_{t=0} = \sum_{i=1}^{k} x_{n-i+1}^0 \hat{\psi}_i^{n\,(k-1)}\big|_{t=0}.$$

Тогда равенство (2.11) может быть записано в виде

$$\sum_{i=1}^{k} x_{n-i+1}^0 \hat{\psi}_i^{n(k)}\big|_{t=0} = -\theta x_n^{k-1} + \left(\frac{n-1}{\tau}\right)^k \sum_{j=1}^{k-1} x_{n-k+j}^0 (-1)^j C_{k-1}^j.$$

Подставим получившееся выражение в (2.10) и сравним с (2.5). Тогда получим $c_{k+1} = x_{n-k}^0$.

Лемма доказана.

Доказательство теоремы вытекает непосредственно из лемм 2, 3.

§ 3. Исследование сходимости последовательности функций $\{\hat\psi_k^n(t)\}$

В этом параграфе будем исследовать сходимость последовательности функций $\{\hat\psi_k^n(t)\}$, заданных равенствами (2.2). Отметим, что для последовательности $\{\hat\psi_n^n(t)\}$ при любых $\varepsilon > 0$ и $T > \tau$ имеет место равномерная сходимость

$$\hat\psi_n^n(t) \to \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau - \varepsilon], \\ e^{-\theta(t-\tau)}, & t \in [\tau + \varepsilon, T], \end{cases} \quad n \to \infty$$

(см. [1, 3]). В следующих четырех леммах мы покажем, что имеет место аналогичная сходимость для последовательности $\{\hat\psi_k^n(t)\}$ при различных $k \neq n$.

Лемма 4. *Пусть $i \in \mathbb{N}$ фиксировано, тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $T > \tau$ имеет место равномерная сходимость*

$$\hat\psi_{n-i}^n(t) \to \begin{cases} 0, & t \in [0, \tau - \varepsilon], \\ e^{-\theta(t-\tau)}, & t \in [\tau + \varepsilon, T], \end{cases} \quad n \to \infty.$$

Доказательство. В силу формул (2.2) функции $\hat\psi_k^n(t)$, $k = 2, \dots, n$, можно записать в виде

$$\hat\psi_k^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{k-1}} S_k^n(t),$$

где

$$S_k^n(t) = 1 - e^{-\omega t} \sum_{j=0}^{k-2} \frac{(\omega t)^j}{j!}, \quad \omega = \frac{n-1}{\tau} - \theta.$$

Заметим, что в силу определения $0 \le S_k^n(t) \le 1$ при $t \ge 0$ и $n \ge \theta\tau + 1$. В условиях леммы $k = n - i$.

Проведем оценки функций $S_{n-i}^n(t)$ при достаточно больших n. Очевидно, имеем

$$S_{n-i}^n(t) = e^{-\omega t} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^j}{j!} - e^{-\omega t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega t)^j}{j!} = e^{-\omega t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^{(n-i-1+k)}}{(n-i-1+k)!}. \tag{3.1}$$

При $n > \theta\tau + 1$ каждое слагаемое в (3.1) можно оценить следующим образом:

$$\frac{(\omega t)^{(n-i-1+k)}}{(n-i-1+k)!} \le \frac{(\omega t)^{(n-i-1+k)}}{(n-i-1)!(n-i-1)^k}.$$

Отсюда

$$S_{n-i}^n(t) \le e^{-\omega t} \frac{(\omega t)^{(n-i-1)}}{(n-i-1)!} \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\omega t)^k}{(n-i-1)^k} \right).$$

Нетрудно показать, что при $0 \le t < \tau$ для любых $n > \theta\tau + 1 + \frac{\tau}{\tau - t}(i - \theta\tau)$ выполнено $\frac{\omega t}{n-i-1} < 1$. Следовательно,

$$S_{n-i}^n(t) \le e^{-\omega t} \frac{(\omega t)^{(n-i-1)}}{(n-i-1)!} \frac{1}{1 - \frac{\omega t}{n-i-1}}.$$

Используя теперь неравенство Стирлинга

$$\left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m} < m! < \left(\frac{m}{e}\right)^m \sqrt{2\pi m} \left(1 + \frac{1}{4m}\right), \tag{3.2}$$

получим, что при $n > \theta\tau + 1 + \frac{\tau}{\tau - t}(i - \theta\tau)$ выполнена оценка

$$S_{n-i}^n(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-i-1)}\left(1 - \frac{\omega t}{n-i-1}\right)} \left(\frac{\omega t}{n-i-1} e^{1-\frac{\omega t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1}.$$

Отсюда вытекает равномерная сходимость на отрезке $[0, \tau - \varepsilon]$:

$$S_{n-i}^n(t) \to 0, \quad n \to \infty.$$

Действительно, при $n > 2\theta\tau + 1 + \frac{2\tau}{\varepsilon}(i - \theta\tau)$ для всех $t \in [0, \tau - \varepsilon]$ имеем $\left(1 - \frac{\omega t}{n-i-1}\right) > \frac{\varepsilon}{2\tau}$, а выражение $\left(\frac{\omega t}{n-i-1} e^{1-\frac{\omega t}{n-i-1}}\right)^{n-i-1}$ ограничено, так как $0 < xe^{1-x} \le 1$ при $x > 0$.

Из проведенных рассуждений с учетом формулы (2.2) вытекает равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_{n-i}^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1}} S_{n-i}^n(t) \to 0, \quad n \to \infty,$$

на отрезке $[0, \tau - \varepsilon]$.

Рассмотрим отрезок $[\tau + \varepsilon, T]$. При $n > \theta\tau + 1$ справедливо неравенство

$$1 > S_{n-i}^n(t) = 1 - e^{-\omega t} \sum_{j=0}^{n-i-2} \frac{(\omega t)^j}{j!} > 1 - e^{-\omega t} \sum_{j=0}^{n-2} \frac{(\omega t)^j}{j!} = S_n^n(t).$$

Опираясь на оценку, полученную в [2], при $n > \frac{\theta t \tau}{t - \tau} + 1$ и $t > \tau$ имеем

$$\left|1 - S_{n-i}^n(t)\right| < \left|1 - S_n^n(t)\right| < \frac{1}{\sqrt{2\pi(n-1)}\left(\frac{\omega t}{n-1} - 1\right)} \left(\frac{\omega t}{n-1} e^{1-\frac{\omega t}{n-1}}\right)^{n-1}.$$

Поэтому на отрезке $[\tau + \varepsilon, T]$ последовательность $\left\{S_{n-i}^n(t)\right\}$ при $n \to \infty$ равномерно сходится к 1. Следовательно, из формулы (2.2) на отрезке $[\tau + \varepsilon, T]$ вытекает равномерная сходимость

$$\hat{\psi}_{n-i}^n(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-i-1}} S_{n-i}^n(t) \to e^{-\theta(t-\tau)}, \quad n \to \infty.$$

Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $n = ml$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и $T > \tau$ имеет место равномерная сходимость*

$$\hat{\psi}_{l+1}^{ml}(t) \to \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{\tau}{m} - \varepsilon\right], \\ e^{-\theta\left(t - \frac{\tau}{m}\right)}, & t \in \left[\frac{\tau}{m} + \varepsilon, T\right], \end{cases} \quad l \to \infty.$$

Доказательство. Из определения (2.2) имеем

$$\hat{\psi}_{l+1}^{ml}(t) = \frac{e^{-\theta t}}{\left(1 - \frac{\theta\tau}{ml-1}\right)^l} S_{l+1}^{ml}(t),$$

где

$$S_{l+1}^{ml}(t) = 1 - e^{-\omega t} \sum_{j=0}^{l-1} \frac{(\omega t)^j}{j!}, \quad \omega = \frac{ml-1}{\tau} - \theta.$$

Отметим, что

$$\left(1-\frac{\theta\tau}{ml-1}\right)^l \to e^{-\frac{\theta\tau}{m}}, \quad l\to\infty.$$

Следовательно, для доказательства леммы нужно показать равномерную сходимость

$$S^{ml}_{l+1}(t) \to \begin{cases} 0, & t\in\left[0,\frac{\tau}{m}-\varepsilon\right], \\ 1, & t\in\left[\frac{\tau}{m}+\varepsilon, T\right], \end{cases} \quad l\to\infty.$$

При $t<\frac{\tau}{m}$ имеем

$$S^{ml}_{l+1}(t) = e^{-\omega t}\sum_{j=l}^{\infty}\frac{(\omega t)^j}{j!} = e^{-\omega t}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\omega t)^{l+k}}{(l+k)!}.$$

По аналогии с предыдущим при $ml>\theta\tau+1$ имеет место оценка

$$S^{ml}_{l+1}(t) \le e^{-\omega t}\frac{(\omega t)^l}{l!}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{\omega t}{l}\right)^k.$$

При $0\le t<\frac{\tau}{m}$ будет $l(\tau-mt)>0\ge -(1+\theta\tau)t$. Поэтому $l\tau>(ml-1-\theta\tau)t$ или $1>\frac{((ml-1)/\tau-\theta)t}{l}=\frac{\omega t}{l}$. Следовательно,

$$S^{ml}_{l+1}(t) \le e^{-\omega t}\frac{(\omega t)^l}{l!}\frac{1}{1-\frac{\omega t}{l}}.$$

Тогда в силу неравенства Стирлинга (3.2)

$$S^{ml}_{l+1}(t) \le e^{-\omega t}(\omega t)^l\left(\frac{e}{l}\right)^l\frac{1}{\sqrt{2\pi l}}\frac{1}{1-\frac{\omega t}{l}}.$$

Отсюда $S^{ml}_{l+1}\to 0$ при $l\to\infty$, причем на отрезке $\left[0,\frac{\tau}{m}-\varepsilon\right]$ сходимость равномерная.

Пусть теперь $t>\frac{\tau}{m}$ и $l>\frac{t(1+\theta\tau)}{(mt-\tau)}$. Оценим разность $\left(1-S^{ml}_{l+1}(t)\right)$. Вначале заметим, что

$$\sum_{j=0}^{l-1}\frac{(\omega t)^j}{j!} < \sum_{j=0}^{l-1}\frac{(\omega t)^j l^{l-1-j}}{j!(j+1)\dots(l-1)} = \frac{(\omega t)^{l-1}}{(l-1)!}\sum_{j=0}^{l-1}\left(\frac{l}{\omega t}\right)^{l-1-j}.$$

Поскольку l выбрано так, что $\frac{\omega t}{l}>1$, получим

$$\sum_{j=0}^{l-1}\left(\frac{l}{\omega t}\right)^{l-1-j} = \sum_{i=0}^{l-1}\left(\frac{l}{\omega t}\right)^i < \sum_{i=0}^{\infty}\left(\frac{l}{\omega t}\right)^i = \frac{1}{1-\frac{l}{\omega t}} < \infty.$$

Используя эту оценку, имеем

$$1-S^{ml}_{l+1}(t) = e^{-\omega t}\sum_{j=0}^{l-1}\frac{(\omega t)^j}{j!} < e^{-\omega t}\frac{(\omega t)^{l-1}}{(l-1)!}\frac{1}{1-\frac{l}{\omega t}} = e^{-\omega t}\frac{(\omega t)^l}{l!}\frac{1}{\frac{\omega t}{l}-1}.$$

Применяя неравенство Стирлинга (3.2), приходим к соотношению

$$0<1-S^{ml}_{l+1}(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi l}\left(\frac{\omega t}{l}-1\right)}e^{-\omega t}(\omega t)^l\left(\frac{e}{l}\right)^l.$$

Следовательно, $\left(1-S^{ml}_{l+1}(t)\right)\to 0$ при $l\to\infty$, при этом на отрезке $\left[\frac{\tau}{m}+\varepsilon, T\right]$ сходимость равномерная.

Лемма доказана.

Проводя точно такие же рассуждения, можно доказать следующие леммы.

Лемма 6. *Пусть k фиксировано, тогда для любых $\varepsilon > 0$, $T > \varepsilon$ имеет место равномерная сходимость*

$$\hat{\psi}_k^n(t) \to e^{-\theta t}, \quad t \in [\varepsilon, T],\ n \to \infty.$$

Лемма 7. *Пусть $n = ml$, $s > 0$ и k целые, $1 \le sl + k \le ml$. Тогда для любых $\varepsilon > 0$, $T > \frac{s\tau}{m} + \varepsilon$ имеет место равномерная сходимость*

$$\hat{\psi}_{sl+k}^{ml}(t) \to \begin{cases} 0, & t \in \left[0, \frac{s\tau}{m} - \varepsilon\right], \\ e^{-\theta(t - \frac{s\tau}{m})}, & t \in \left[\frac{s\tau}{m} + \varepsilon, T\right], \end{cases} \quad l \to \infty.$$

По аналогии с предыдущим при доказательстве лемм 6, 7 можно получить оценки для функций

$$S_{sl+k}^{ml}(t) = 1 - e^{-\omega t} \sum_{j=0}^{sl+k-2} \frac{(\omega t)^j}{j!}, \quad \omega = \frac{ml-1}{\tau} - \theta.$$

Пусть для определенности $s > 0$, $k = 1$. Тогда при $t < \frac{s\tau}{m}$ и $ml > \theta\tau + 1$ имеет место оценка

$$S_{sl+1}^{ml}(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi sl}\left(1 - \frac{\omega t}{sl}\right)} e^{-\omega t} (\omega t)^{sl} \left(\frac{e}{sl}\right)^{sl},$$

при $t > \frac{s\tau}{m}$ и $l > \frac{t(\theta\tau+1)}{mt - s\tau}$ —

$$0 < 1 - S_{sl+1}^{ml}(t) < \frac{1}{\sqrt{2\pi sl}\left(\frac{\omega t}{sl} - 1\right)} e^{-\omega t} (\omega t)^{sl} \left(\frac{e}{sl}\right)^{sl}.$$

§ 4. Предельные теоремы

В этом параграфе изучим предельные свойства последовательности $\left\{x_n^n(t)\right\}$, получающейся в результате решения серии задач Коши вида (1.5) при некоторых характерных наборах начальных данных. Сходимость вида (1.6) будет существенно использоваться в § 6 при рассмотрении начальной задачи (1.9) для уравнения с запаздывающим аргументом с произвольной функцией $\varphi(t)$.

Вначале рассмотрим последовательность задач Коши вида (1.5), предполагая, что векторы начальных данных имеют последнюю компоненту, отличную от нуля, а все остальные компоненты нулевые, т. е. векторы начальных данных в (1.5) имеют вид

$$x^0 = (0, \ldots, 0, a)^T. \tag{4.1}$$

Неограниченно увеличивая число уравнений и рассматривая только последнюю компоненту решения каждой из задач Коши (1.5), получим последовательность функций $\left\{x_n^n(t)\right\}$.

Теорема 3. *Пусть начальные условия в (1.5) имеют вид (4.1). Тогда последовательность $\left\{x_n^n(t)\right\}$ равномерно сходится на любом отрезке $[0, T]$, $T > \tau$:*

$$x_n^n(t) \to y(t), \quad n \to \infty.$$

Предельная функция $y(t)$ является решением следующей начальной задачи:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t - \tau, y(t - \tau)), & t > \tau, \\ y(t) = a e^{-\theta t}, & t \in [0, \tau], \end{cases} \tag{4.2}$$

при этом имеет место оценка

$$\max_{t\in[0,T]}\bigl|x_n^n(t)-y(t)\bigr|\le e^{MT}I_n,\quad n\gg 1,\tag{4.3}$$

где

$$I_n=G\biggl(A_n\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}+\frac{(n-1)^{-1/4}}{\bigl(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\bigr)^{n-1}}\left(\frac{1-e^{-\theta\tau}}{\theta}+4\tau+2(T-\tau)e^{-\theta\tau}\right)\biggr),$$

$$A_n=e^{\theta\tau}-\frac{1}{\bigl(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\bigr)^{n-1}},\quad M=2Le^{\theta\tau},\quad |g(t,y)|\le G<\infty.$$

Доказательство. В силу теоремы 2 для последней компоненты $x_n^n(t)$ решения задачи Коши (1.5) справедливо равенство

$$x_n^n(t)=a\psi_1(t)+\int_0^t\hat\psi_n^n(t-s)g\bigl(s,x_n^n(s)\bigr)\,ds.\tag{4.4}$$

Тогда для любых n, l имеем

$$x_{n+l}^{n+l}(t)-x_n^n(t)=\int_0^t\bigl(\hat\psi_{n+l}^{n+l}(t-s)-\hat\psi_n^n(t-s)\bigr)g\bigl(s,x_{n+l}^{n+l}(s)\bigr)\,ds$$
$$+\int_0^t\hat\psi_n^n(t-s)\bigl(g\bigl(s,x_{n+l}^{n+l}(s)\bigr)-g\bigl(s,x_n^n(s)\bigr)\bigr)\,ds=I_{n,l}^1(t)+I_{n,l}^2(t).\tag{4.5}$$

При $n>4(\theta\tau(n-1)^{1/4}+1)$ и любом $l\ge 1$ для первого интеграла по аналогии с [5] можно получить следующую оценку:

$$\max_{t\in[0,T]}\bigl|I_{n,l}^1(t)\bigr|\le A_{n,l}G\frac{1-e^{-\theta T}}{\theta}$$
$$+(n-1)^{-1/4}\frac{G}{\bigl(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\bigr)^{n-1}}\left(\frac{1-e^{-\theta\tau}}{\theta}+4\tau+2(T-\tau)e^{-\theta\tau}\right),\tag{4.6}$$

$$A_{n,l}=\left|\frac{1}{\bigl(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\bigr)^{n-1}}-\frac{1}{\bigl(1-\frac{\theta\tau}{n+l-1}\bigr)^{n+l-1}}\right|.$$

Для второго интеграла в силу условия Липшица имеет место оценка

$$\bigl|I_{n,l}^2(t)\bigr|\le L\int_0^t\bigl|\hat\psi_n^n(t-s)\bigr|\bigl|x_{n+l}^{n+l}(s)-x_n^n(s)\bigr|\,ds.$$

Из определения $\hat\psi_n^n(t)$ вытекает неравенство

$$\bigl|\hat\psi_n^n(t-s)\bigr|=\left|\frac{e^{-\theta(t-s)}}{\bigl(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\bigr)^{n-1}}S_n^n(t-s)\right|\le\left|1-\frac{\theta\tau}{n-1}\right|^{1-n}.$$

Поскольку $\bigl(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\bigr)^{n-1}\to e^{-\theta\tau}$ при $n\to\infty$, существует такое n_0, что при $n\ge n_0$ выполнено

$$\left(1-\frac{\theta\tau}{n-1}\right)^{n-1}>\frac12 e^{-\theta\tau}.$$

Следовательно,

$$\left|I^2_{n,l}(t)\right| \leq 2Le^{\theta\tau}\int\limits_0^t \left|x^{n+l}_{n+l}(s) - x^n_n(s)\right| ds.$$

Тогда из представления (4.5) получим

$$\left|x^{n+l}_{n+l}(t) - x^n_n(t)\right| \leq \left|I^1_{n,l}(t)\right| + 2Le^{\theta\tau}\int\limits_0^t \left|x^{n+l}_{n+l}(s) - x^n_n(s)\right| ds. \qquad (4.7)$$

Используя неравенство Гронуолла, приходим к неравенству

$$\left|x^{n+l}_{n+l}(t) - x^n_n(t)\right| \leq \max_{s\in[0,T]}\left|I^1_{n,l}(s)\right|e^{Mt}, \quad M = 2Le^{\theta\tau}. \qquad (4.8)$$

Из оценок (4.6), (4.8) вытекает равномерная сходимость последовательности $\left\{x^n_n(t)\right\}$ на любом отрезке $[0,T]$. Переходя к пределу в неравенстве (4.8) при $l \to \infty$, для предельной функции $y(t) \in C[0,T]$ получим оценку (4.3). Из представления (4.4) в силу доказанной сходимости и теоремы Лебега для предельной функции $y(t)$ следует тождество

$$y(t) \equiv ae^{-\theta t} + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)}g(s,y(s))\,ds, \quad t > \tau.$$

Дифференцируя его, будем иметь

$$y'(t) \equiv -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau.$$

Следовательно, $y(t)$ является решением начальной задачи (4.2).

Теорема доказана.

Рассмотрим последовательность задач Коши вида (1.5), предполагая, что $n = 2l$ и вектор начальных данных имеет вид

$$x^0 = \left(x^0_1, \dots, x^0_n\right)^T, \quad x^0_l = a, \quad x^0_j = 0 \ \text{ при } \ j \neq l. \qquad (4.9)$$

В этом случае последовательность $\left\{x^n_n(t)\right\}$ также сходится, однако в отличие от предыдущего здесь возникает ряд интересных особенностей, обусловленных тем, что сходимость (1.6) не является равномерной. Справедлива следующая

Теорема 4. *Пусть начальные условия в* (1.5) *имеют вид* (4.9). *Тогда последовательность* $\left\{x^n_n(t)\right\}$ *сходится в пространстве* $L_p(0,T)$, $T > \tau$,

$$\left\|x^n_n(t) - y(t), L_p(0,T)\right\| \to 0, \quad n \to \infty, \qquad (4.10)$$

при этом предельная функция $y(t)$ *принадлежит соболевскому пространству* $W^1_p(\tau,T)$ *и является обобщенным решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in [0,\tau/2), \\ y(t) = ae^{-\theta(t-\tau/2)}, \quad t \in (\tau/2,\tau]. \end{cases} \qquad (4.11)$$

Доказательство. В силу теоремы 2

$$x^{2l}_{2l}(t) = a\hat\psi^{2l}_{l+1}(t) + \int\limits_0^t \hat\psi^{2l}_{2l}(t-s)g\big(s, x^{2l}_{2l}(s)\big)\,ds. \qquad (4.12)$$

Рассмотрим разность функций $x_{2m}^{2m}(t)$ и $x_{2l}^{2l}(t)$, $m > l$,

$$x_{2m}^{2m}(t) - x_{2l}^{2l}(t) = a\big(\hat{\psi}_{m+1}^{2m}(t) - \hat{\psi}_{l+1}^{2l}(t)\big)$$

$$+ \int\limits_0^t \big(\hat{\psi}_{2m}^{2m}(t-s) g\big(s, x_{2m}^{2m}(s)\big) - \hat{\psi}_{2l}^{2l}(t-s) g\big(s, x_{2l}^{2l}(s)\big)\big)\, ds = \Delta_1(t) + \Delta_2(t). \quad (4.13)$$

Для интегрального слагаемого $\Delta_2(t)$ по аналогии с рассуждениями из теоремы 3 можно получить оценку вида (4.7), а именно

$$|\Delta_2(t)| \le \max_{s\in[0,T]} \big|I_{2l,2(m-l)}^1(s)\big| + 2Le^{\theta\tau} \int\limits_0^t \big|x_{2m}^{2m}(s) - x_{2l}^{2l}(s)\big|\, ds.$$

Обозначим $I_{l,m} = \max\limits_{s\in[0,T]} \big|I_{2l,2(m-l)}^1(s)\big|$. Тогда

$$\big|x_{2m}^{2m}(t) - x_{2l}^{2l}(t)\big| \le |\Delta_1(t)| + I_{l,m} + 2Le^{\theta\tau} \int\limits_0^t \big|x_{2m}^{2m}(s) - x_{2l}^{2l}(s)\big|\, ds. \quad (4.14)$$

В силу неравенств, полученных в лемме 5, первое слагаемое в (4.13) можно оценить по аналогии с (4.6). Именно, при $2m > 2l > (1+\varepsilon^{-1})(\theta\tau+1)$ получим

$$\max_{t\in[0,\frac{\tau}{2}(1-\varepsilon)]\cup[\frac{\tau}{2}(1+\varepsilon),T]} |\Delta_1(t)| < a\widetilde{A}_{l,m} + a\frac{4}{\big(1-\frac{\theta\tau}{2l-1}\big)^l \sqrt{2\pi l}\varepsilon}, \quad (4.15)$$

где

$$\widetilde{A}_{l,m} = \left|\frac{e^{-\theta t}}{\big(1-\frac{\theta\tau}{2m-1}\big)^m} - \frac{e^{-\theta t}}{\big(1-\frac{\theta\tau}{2l-1}\big)^l}\right| \to 0, \quad m,l\to\infty.$$

По неравенству Гронуолла в силу оценки (4.15) при $t \in \big[0, \frac{\tau}{2}(1-\varepsilon)\big]$ имеем

$$\big|x_{2m}^{2m}(t) - x_{2l}^{2l}(t)\big| \le \left(a\widetilde{A}_{l,m} + a\frac{4}{\big(1-\frac{\theta\tau}{2l-1}\big)^l \sqrt{2\pi l}\varepsilon} + I_{l,m}\right)e^{Mt}, \quad M = 2Le^{\theta\tau}.$$

На отрезке $\big[\frac{\tau}{2}(1-\varepsilon), \frac{\tau}{2}(1+\varepsilon)\big]$ ввиду представления (4.13) получим

$$\big|x_{2m}^{2m}(t) - x_{2l}^{2l}(t)\big| \le 4ae^{\theta\tau/2} + 2Ge^{\theta\tau}\tau(1+\varepsilon).$$

Используя полученные выше оценки, из (4.14) по неравенству Гронуолла при $t \in \big[\frac{\tau}{2}(1+\varepsilon), T\big]$ и $2m > 2l > (1+\varepsilon^{-1})(\theta\tau+1)$ имеем

$$\big|x_{2m}^{2m}(t) - x_{2l}^{2l}(t)\big| \le \left(\left(a\widetilde{A}_{l,m} + \frac{4a}{\big(1-\frac{\theta\tau}{2l-1}\big)^l \sqrt{2\pi l}\varepsilon} + I_{l,m}\right)e^{M\tau(1-\varepsilon)/2}\right.$$
$$\left. + M(4ae^{\theta\tau/2} + 2Ge^{\theta\tau}\tau(1+\varepsilon))\tau\varepsilon\right)e^{M(t-\tau(1+\varepsilon)/2)}.$$

Положим $\varepsilon = l^{-p/(2p+2)}$. Тогда из приведенных выше оценок вытекает, что

$$\big\|x_{2m}^{2m}(t) - x_{2l}^{2l}(t), L_p(0,T)\big\| \to 0, \quad m,l\to\infty.$$

Таким образом, последовательность $\big\{x_{2l}^{2l}(t)\big\}$ является фундаментальной и, значит, сходящейся в $L_p(0,T)$.

Для предельной функции $y(t)$ из представления (4.12) по теореме Лебега получаем

$$y(t) = 0 \ \text{ при } 0 \le t < \tau/2, \quad y(t) = ae^{-\theta(t-\tau/2)} \ \text{ при } \tau/2 < t \le \tau,$$

$$y(t) = ae^{-\theta(t-\tau/2)} + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-s-\tau)} g(s, y(s))\, ds \ \text{ при } t > \tau.$$

Из явного представления для $y(t)$ следует, что

$$y(t) \in C[\tau, 2\tau] \cap C^1(\tau, (3/2)\tau) \cap C^1((3/2)\tau, 2\tau).$$

При этом на интервале $\left(\tau, \frac{3}{2}\tau\right)$

$$y'(t) = -\theta y(t) + g(t-\tau, 0),$$

а на интервале $\left(\frac{3}{2}\tau, 2\tau\right)$

$$y'(t) = -\theta y(t) + g(t-\tau, ae^{-\theta(t-3\tau/2)}).$$

Отсюда

$$y'(3\tau/2 - 0) = y'(3\tau/2 + 0) + g(\tau/2, 0) - g(\tau/2, a),$$

т. е. $y'(3\tau/2 - 0) = y'(3\tau/2 + 0)$ тогда и только тогда, когда $g(\tau/2, 0) = g(\tau/2, a)$. Поэтому для произвольной функции $g(t, z)$ функция $y(t)$ не принадлежит классу $C^1(\tau, 2\tau)$, но имеет обобщенную производную $D_t y(t)$ на интервале $(\tau, 2\tau)$. Из предыдущего вытекает явное выражение

$$D_t y(t) = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau.$$

Следовательно, $y(t)$ принадлежит $W_p^1(\tau, 2\tau)$ и является обобщенным решением начальной задачи (4.11). Аналогичные рассуждения можно провести на произвольном интервале (τ, T).

Теорема доказана.

Приведем еще ряд аналогичных утверждений о предельных свойствах последовательности функций $\left\{x_n^n(t)\right\}$.

Теорема 5. *Пусть $n = ml$ и начальные условия в (1.5) имеют вид*

$$x^0 = \left(x_1^0, \ldots, x_n^0\right)^T, \quad x_l^0 = a, \quad x_j^0 = 0 \text{ при } j \ne l.$$

Тогда для любого $T > \tau$ для последовательности $\left\{x_n^n(t)\right\}$ имеет место сходимость (4.10), предельная функция $y(t)$ принадлежит пространству $W_p^1(\tau, T)$ и является обобщенным решением следующей начальной задачи:

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in \left[0, \frac{m-1}{m}\tau\right), \\ y(t) = ae^{-\theta\left(t - \frac{m-1}{m}\tau\right)}, \quad t \in \left(\frac{m-1}{m}\tau, \tau\right]. \end{cases}$$

Теорема 6. *Пусть $n = ml$, $1 \le s \le m$, целое и начальные условия в* (1.5) *имеют вид*

$$x^0 = \left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)^T, \quad x_{sl}^0 = a, \quad x_j^0 = 0 \ \text{ при } j \ne sl.$$

Тогда для любого $T > \tau$ для последовательности $\left\{x_n^n(t)\right\}$ имеет место сходимость (4.10), *предельная функция $y(t)$ принадлежит пространству $W_p^1(\tau, T)$ и является обобщенным решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in \left[0, \frac{m-s}{m}\tau\right), \\ y(t) = a e^{-\theta\left(t - \frac{m-s}{m}\tau\right)}, \quad t \in \left(\frac{m-s}{m}\tau, \tau\right]. \end{cases}$$

Теорема 7. *Пусть начальные данные в задаче Коши* (1.5) *имеют вид*

$$x^0 = \left(x_1^0, \dots, x_n^0\right)^T, \quad x_j^0 = 0 \quad \text{при } j > i.$$

Тогда для любого $T > \tau$ для последовательности $\left\{x_n^n(t)\right\}$ имеет место сходимость (4.10), *предельная функция $y(t)$ принадлежит пространству $W_p^1(\tau, T)$ и является обобщенным решением начальной задачи*

$$\begin{cases} \frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau, \\ y(t) = 0, \quad t \in [0, \tau), \\ y(\tau + 0) = x_1^0 + \dots + x_i^0. \end{cases}$$

Замечание. Можно выписать такие последовательности начальных данных для задач Коши вида (1.5), при которых будут справедливы аналогичные теоремы, при этом предельные функции $y(t)$ на отрезке $[0, \tau]$ будут иметь разрывы в точках t_0, для которых отношения t_0/τ не являются рациональными числами.

§ 5. Непрерывная зависимость решений уравнений с запаздывающим аргументом

Рассмотрим начальную задачу для дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом (1.9). Будем предполагать, что заданная функция $\varphi(t)$ кусочно непрерывна на $[0, \tau]$, имеет конечное число точек разрыва $\{t_j\}$ первого рода $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_{k-1} < t_k = \tau$. Для определенности считаем, что $y(\tau + 0) = \varphi(\tau)$.

Используя метод шагов (см., например, [8, 9]), нетрудно показать, что при этих условиях задача (1.9) имеет единственное кусочно гладкое решение

$$y(t) \in C[\tau, T] \cap \bigcap_{j=0}^{k-1} C^1(\tau + t_j, \tau + t_{j+1}) \cap C^1(2\tau, T], \quad T > 2\tau.$$

Следовательно, $y(t)$ принадлежит соболевскому пространству $W_2^1(\tau, T)$. В следующей теореме докажем непрерывную зависимость решения задачи (1.9) от начальных условий.

Теорема 8. *Пусть* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — *кусочно непрерывные функции на отрезке* $[0,\tau]$ *с конечным числом точек разрыва, причем все разрывы первого рода. Тогда для решений* $y_1(t)$ *и* $y_2(t)$ *задач вида* (1.9) *с начальными функциями* $\varphi_1(t)$ *и* $\varphi_2(t)$ *соответственно имеет место оценка*

$$\left\|y_1(t) - y_2(t), W_2^1(\tau,T)\right\| \le c(|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| + \|\varphi_1(t) - \varphi_2(t), L_2(0,\tau)\|),$$

где $c > 0$ — *константа, не зависящая от* $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$.

Доказательство. Прежде всего заметим, что для решения задачи (1.9) справедлива формула

$$y(t) = \varphi(\tau)e^{-\theta(t-\tau)} + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-\tau-s)} g(s, y(s))\, ds, \quad t > \tau.$$

Следовательно,

$$y_1(t) - y_2(t) = (\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau))e^{-\theta(t-\tau)} + \int\limits_0^{t-\tau} e^{-\theta(t-\tau-s)}(g(s, y_1(s)) - g(s, y_2(s)))\, ds.$$

Тогда, учитывая условие Липшица, при $\tau < t < 2\tau$, очевидно, имеем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le |\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| + L\int\limits_0^{t-\tau} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds.$$

Аналогичным образом при $2\tau < t < T$ получаем

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le |\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| + L\int\limits_0^{\tau} |\varphi_1(s) - \varphi_2(s)|\, ds + L\int\limits_\tau^{t-\tau} |y_1(s) - y_2(s)|\, ds,$$

отсюда

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le M(|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| + \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s), L_2(0,\tau)\|) + L\int\limits_\tau^{t} |y_1(s) - y_2(s)|\, ds,$$

$M = \max\{1, L\sqrt{\tau}\}$.

Из полученных оценок в силу неравенства Гронуолла при $t > \tau$ получим

$$|y_1(t) - y_2(t)| \le M(|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| + \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s), L_2(0,\tau)\|)e^{L(t-\tau)}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}&\|y_1(t) - y_2(t), L_2(\tau,T)\| \\ &\qquad \le \frac{M}{\sqrt{2L}}(|\varphi_1(\tau) - \varphi_2(\tau)| + \|\varphi_1(s) - \varphi_2(s), L_2(0,\tau)\|)(e^{2L(T-\tau)} - 1)^{1/2}. \quad (5.1)\end{aligned}$$

Учитывая, что $y_1(t)$, $y_2(t)$ являются обобщенными решениями уравнения с запаздывающим аргументом

$$\frac{dy(t)}{dt} = -\theta y(t) + g(t-\tau, y(t-\tau)), \quad t > \tau,$$

имеем

$$\begin{aligned}\big\|y_1(t)-y_2(t),W_2^1(\tau,T)\big\| &= \|y_1(t)-y_2(t),L_2(\tau,T)\| + \|y_1'(t)-y_2'(t),L_2(\tau,T)\|\\ &\le \|y_1(t)-y_2(t),L_2(\tau,T)\| + \theta\|y_1(t)-y_2(t),L_2(\tau,T)\|\\ &\quad + \|g(t-\tau,y_1(t-\tau))-g(t-\tau,y_2(t-\tau)),L_2(\tau,T)\|.\end{aligned}$$

В силу условия Липшица

$$\begin{aligned}&\big\|y_1(t)-y_2(t),W_2^1(\tau,T)\big\|\\ &\quad\le (1+\theta)\|y_1(t)-y_2(t),L_2(\tau,T)\| + L\|y_1(t)-y_2(t),L_2(0,T-\tau)\|\\ &\quad\quad\le (1+\theta+L)\|y_1(t)-y_2(t),L_2(\tau,T)\| + L\|\varphi_1(t)-\varphi_2(t),L_2(0,\tau)\|.\end{aligned}$$

Используя теперь оценку (5.1), имеем

$$\big\|y_1(t)-y_2(t),W_2^1(\tau,T)\big\| \le c(|\varphi_1(\tau)-\varphi_2(\tau)| + \|\varphi_1(s)-\varphi_2(s),L_2(0,\tau)\|),$$

где $c=(1+\theta+L)\frac{M}{\sqrt{2L}}(e^{2L(T-\tau)}-1)^{1/2}+L$.

Теорема доказана.

§ 6. Аппроксимация решений уравнения с запаздывающим аргументом

В этом параграфе докажем, что при любых начальных условиях $\varphi(t)\in C[0,\tau]$ решение задачи (1.9) можно сколь угодно точно аппроксимировать последовательностью $\{x_n^n(t)\}$, полученной в результате специального выбора начальных данных в серии задач Коши вида (1.5). Тем самым будет доказана теорема 1.

Доказательство будет основано на использовании теорем 2–8 и свойств функций Хаара $\{\varphi_{m,k}(t)\}$ (см., например, [11]). Для простоты будем предполагать, что $\tau=1$.

Пусть $y_M(t)$ — обобщенное решение начальной задачи вида (1.9)

$$\begin{cases}\frac{dy(t)}{dt}=-\theta y(t)+g(t-1,y(t-1)), & t>1,\\ y(t)=\varphi_M(t), \quad 0\le t<1, & \\ y(1+0)=\varphi(1), &\end{cases}\tag{6.1}$$

где

$$\varphi_M(t)=e^{-\theta t}\sum_{m=0}^{M}\sum_{k=1}^{2^m}c_{m,k}\varphi_{m,k}(t)+c_0e^{-\theta t},$$

$$\varphi_{m,k}(t)=\begin{cases}2^{m/2}, & t\in[(k-1)2^{-m},(k-1/2)2^{-m}),\\ -2^{m/2}, & t\in[(k-1/2)2^{-m},k2^{-m}),\\ 0, & t\notin[(k-1)2^{-m},k2^{-m}),\end{cases}\quad m\in\mathbb{N}\cup\{0\},\ k=1,2,\dots,2^m.$$

Напомним, что набор функций $\{\varphi_{m,k}(t)\}\cup\{1\}$ образует ортонормированный базис в $L_2(0,1)$.

Из теорем 2–7 непосредственно вытекает следующая

Теорема 9. *Пусть $n=2^{M+1}l$. Тогда существует последовательность начальных данных в (1.5) такая, что при $l\to\infty$*

$$\|x_n(t)-y_M(t),L_2(0,T)\|\to 0,$$

при этом

$$\left\|x_n(t) - y_M(t), W_2^1(1,T)\right\| \to 0.$$

Рассмотрим решение $y(t)$ задачи (1.9) с произвольной начальной функцией $\varphi(t) \in C[0,1]$. Для определенности будем предполагать, что $y(1+0) = \varphi(1)$. Используя функции Хаара $\{\varphi_{m,k}(t)\}$, представим $\varphi(t)$ в виде

$$\varphi(t) = e^{-\theta t} \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{k=1}^{2^m} c_{m,k}\varphi_{m,k}(t) + c_0 e^{-\theta t}, \tag{6.2}$$

$$c_{m,k} = \int_0^1 e^{\theta s}\varphi_{m,k}(s)\varphi(s)\,ds, \quad c_0 = \int_0^1 e^{\theta s}\varphi(s)\,ds.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ произвольно. По теореме 8 в силу представления (6.2) существует M_ε такое, что решение $y_{M_\varepsilon}(t)$ начальной задачи (6.1) при $M = M_\varepsilon$ удовлетворяет оценке

$$\left\|y(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(1,T)\right\| < \varepsilon/2.$$

Используя теперь теорему 9, находим $n_\varepsilon = 2^{M_\varepsilon+1} l_\varepsilon$ и начальный вектор x_ε^0 в (1.5) такие, что

$$\left\|x_{n_\varepsilon}^\varepsilon(t) - y_{M_\varepsilon}(t), W_2^1(1,T)\right\| < \varepsilon/2,$$

где $x_{n_\varepsilon}^\varepsilon(t)$ — последняя компонента решения задачи Коши (1.5) при $n = n_\varepsilon$. Из этих оценок, очевидно, имеем

$$\left\|y(t) - x_{n_\varepsilon}^\varepsilon(t), W_2^1(1,T)\right\| < \varepsilon.$$

Отсюда по теореме вложения соболевского пространства $W_2^1(1,T)$ в $C[1,T]$ вытекает неравенство

$$\left|y(t) - x_{n_\varepsilon}^\varepsilon(t)\right| < c\varepsilon, \quad 1 \le t \le T,$$

где константа $c > 0$ зависит только от T.

Итак, любое решение дифференциального уравнения с запаздыванием $\tau > 0$, принимающее непрерывные значения на отрезке $[0,\tau]$, может быть сколь угодно точно аппроксимировано решениями задачи Коши вида (1.5) при $n \gg 1$.

Теорема 1 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Лихошвай В. А., Фадеев С. И., Демиденко Г. В., Матушкин Ю. Г.* Моделирование уравнением с запаздывающим аргументом многостадийного синтеза без ветвления // Сиб. журн. индустр. математики. 2004. Т. 7, № 1. С. 73–94.
2. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А.* О дифференциальных уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 3. С. 538–552.
3. *Демиденко Г. В., Лихошвай В. А., Котова Т. В., Хропова Ю. Е.* Об одном классе систем дифференциальных уравнений и об уравнениях с запаздывающим аргументом // Сиб. мат. журн. 2006. Т. 47, № 1. С. 58–68.
4. *Demidenko G. V., Khropova Yu. E.* On properties of solutions of one delay differential equation // Proc. Fifth intern. conf. on bioinformatics of genome regulation and structure (Eds. N. Kolchanov and R. Hofestaedt). Novosibirsk, 2006. V. 3. P. 38–42.
5. *Демиденко Г. В.* Системы обыкновенных дифференциальных уравнений больших размеров и уравнения с запаздывающим аргументом // Нелинейный анализ и экстремальные задачи. Иркутск: ИДСТУ СО РАН, 2008. С. 1–34.
6. *Демиденко Г. В., Колчанов Н. А., Лихошвай В. А., Матушкин Ю. Г., Фадеев С. И.* Математическое моделирование регуляторных контуров генных сетей // Журн. вычисл. математики и мат. физики. 2004. Т. 44, № 12. С. 2276–2295.

7. *Демиденко Г. В., Мельник И. А., Хропова Ю. Е.* Уравнения с запаздывающим аргументом в задачах многостадийного синтеза вещества. Новосибирск, 2009. 26 с. (Препринт / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т математики; № 233).
8. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Наука, 1972.
9. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. М.: Наука, 1971.
10. *Годунов С. К.* Обыкновенные дифференциальные уравнения с постоянными коэффициентами. Новосибирск: Изд-во Новосиб. ун-та, 1994.
11. *Блаттер К.* Вейвлет-анализ. Основы теории. М.: Техносфера, 2004.

Статья поступила 5 марта 2010 г.

Демиденко Геннадий Владимирович, Мельник Ирина Алексеевна
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет, механико-математический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
demidenk@math.nsc.ru, sibirochka@gorodok.net