Сибирский математический журнал
Июль—август, 2010. Том 51, № 4

УДК 515.12

СВОЙСТВО КАТЕТОВА ДЛЯ ПОЛУНОРМАЛЬНЫХ ФУНКТОРОВ КОНЕЧНОЙ СТЕПЕНИ

А. В. Иванов

Аннотация. Полунормальный функтор $\mathscr{F}$ обладает свойством Катетова (K-свойством), если для любого компакта X наследственная нормальность $\mathscr{F}(X)$ влечет метризуемость X. Доказано, что любой полунормальный функтор конечной степени $n > 3$ обладает K-свойством. В предположении CH получена характеризация сохраняющих вес полунормальных функторов, которые обладают K-свойством. Доказано также, что построенный в [1] в предположении CH неметризуемый компакт является универсальным контрпримером для K-свойства в классе сохраняющих вес полунормальных функторов.

Ключевые слова: полунормальный функтор, наследственная нормальность, теорема Катетова о кубе, свойство Катетова.

В 1981 г. Е. В. Щепин [2] дал определение нормального функтора, заложив тем самым основы теории ковариантных функторов в категории Comp компактов и непрерывных отображений. Естественное ослабление условий нормальности приводит к понятию полунормального функтора (см. [3]), которое включает в себя такие известные конструкции топологии, как возведение в степень, экспоненту exp, суперрасширение λ, пространство вероятностных мер P и др. При этом появляется возможность «функториальной» трактовки ряда классических результатов общей топологии. В числе таких результатов теорема Катетова [4], утверждающая, что всякий компакт, куб которого наследственно нормален, является метризуемым. Будем говорить, что полунормальный функтор $\mathscr{F}$ обладает *свойством Катетова* (*K-свойством*), если для любого компакта X наследственная нормальность $\mathscr{F}(X)$ влечет метризуемость X. По теореме Катетова функтор возведения в куб обладает K-свойством.

Вопросу распространения теоремы Катетова на различные классы функторов посвящен ряд работ. В. В. Федорчук [5] доказал, что K-свойством обладают все нормальные функторы степени ≥ 3; Т. Ф. Жураев [6] установил выполнение K-свойства для λ_4; автор (см. [7]) доказал наличие K-свойства у функторов вида $\mathscr{F}_n$, где $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор, удовлетворяющий некоторому комбинаторному условию $(*)$, со степенным спектром $\operatorname{sp}\mathscr{F} = \{1, k, n, \dots\}$. Обобщения теоремы Катетова, идущие в направлении ослабления условия наследственной нормальности $\mathscr{F}(X)$, получены А. П. Комбаровым [8] (для нормальных функторов) и Е. В. Кашубой [7] (для полунормальных функторов, удовлетворяющих условию $(*)$).

В настоящее время известно, что вопрос о наличии K-свойства у функтора возведения в квадрат неразрешим в ZFC (знаменитая проблема Катетова). Контрпримеры построены Никошем (в предположении аксиомы Мартина и отрицания CH) и Грюнхаге (в предположении CH) [9]; совместимость с ZFC

положительного решения доказана Ларсоном и Тодорчевичем [10]. В работе [1] в предположении CH построен неметризуемый компакт X_0 такой, что для всякого сохраняющего вес и точки взаимной однозначности функтора $\mathscr{F}$ со степенным спектром $\mathrm{sp}\,\mathscr{F} = \{1, k, \dots\}$ пространство $\mathscr{F}_k(X_0)$ наследственно нормально. Тем самым доказано, в частности, что в предположении CH функтор λ_3 не обладает K-свойством.

В настоящей работе доказано (теорема 3), что любой полунормальный функтор $\mathscr{F}$ конечной степени $n > 3$ обладает K-свойством[1)]. Таким образом, число 3 является максимально возможной степенью полунормального функтора, не обладающего K-свойством. В предположении CH дано полное описание сохраняющих вес полунормальных функторов, которые обладают K-свойством (теорема 4). Интересно, что построенный в [1] компакт X_0 является универсальным тестовым пространством (или универсальным контрпримером) для K-свойства: сохраняющий вес полунормальный функтор $\mathscr{F}$ конечной степени $n > 1$ обладает K-свойством тогда и только тогда, когда пространство $\mathscr{F}(X_0)$ не наследственно нормально (следствие 1).

В дальнейшем рассматриваются только компактные хаусдорфовы пространства, все отображения непрерывны. Через $[A]$ обозначается замыкание множества A, через $f^\sharp(A)$ — малый образ A при отображении f.

Определение полунормального функтора в категории Comp приведено в книге [3] (см. также [1]). Если $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор, то для любого компакта X и любой точки $a \in \mathscr{F}(X)$ определен носитель $\mathrm{supp}(a)$ следующим образом:

$$\mathrm{supp}(a) = \cap\{Y \subset X : a \in \mathscr{F}(Y)\}.$$

Для любого натурального n естественно определяется подфунктор $\mathscr{F}_n$ функтора $\mathscr{F}$ (для любого компакта X полагаем $\mathscr{F}_n(X) = \{a \in \mathscr{F}(X) : |\,\mathrm{supp}(a)| \le n\}$). Подфунктор $\mathscr{F}_n$ — полунормальный функтор для любого полунормального $\mathscr{F}$ (см. [2]). Отметим также, что если $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор и $f : X \to Y$, то $f(\mathrm{supp}(a)) \supset \mathrm{supp}(\mathscr{F}(f)(a))$ для любого $a \in \mathscr{F}(X)$.

При изучении полунормальных функторов конечной степени большую роль играет конструкция отображения π_n, предложенная в [11]. В последующих формулах через n обозначается не только натуральное число, но и дискретное пространство, состоящее из n точек: $n = \{0, \dots, n-1\}$. Отображение

$$\pi_n : X^n \times \mathscr{F}(n) \to \mathscr{F}(X)$$

определяется равенством $\pi_n(x, a) = \mathscr{F}(x)(a)$, в котором каждая точка $x \in X^n$ отождествляется с отображением $x : n \to X$. Для любого полунормального функтора $\mathscr{F}$ и любого компакта X отображение π_n непрерывно, причем $\mathrm{Im}\,\pi_n = \mathscr{F}_n(X)$. Следуя [12], для каждого $n > 1$ введем обозначение: $\mathscr{F}_{nn}(X) = \mathscr{F}_n(X) \setminus \mathscr{F}_{n-1}(X)$.

Степенным спектром функтора $\mathscr{F}$ называется [13] множество

$$\mathrm{sp}(\mathscr{F}) = \{k : k \in \mathbb{N}, \mathscr{F}_{kk}(k) \neq \varnothing\}.$$

В [13] показано, что для любого подмножества $K \subset \mathbb{N}$ ($1 \in K$) существует полунормальный функтор со степенным спектром, равным K. Если для функтора

[1)]Для функторов бесконечной степени это неверно. Например, функтор континуальной экспоненты $\exp_c$ (см. [3]) сохраняет нульмерные наследственно нормальные компакты и, следовательно, не обладает K-свойством.

$\mathscr{F}$ все точки пространств вида $\mathscr{F}(X)$ имеют конечный носитель, то *степенью функтора* $\mathscr{F}$ называется максимальный элемент его степенного спектра (если таковой существует).

Полунормальный функтор $\mathscr{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности, если для любого отображения $f : X \to Y$ и любой точки $y \in Y$ такой, что $|f^{-1}(y)| = 1$, отображение $\mathscr{F}(f) : \mathscr{F}(X) \to \mathscr{F}(Y)$ также взаимно однозначно в точке $y \in Y \subset \mathscr{F}(Y) : |(\mathscr{F}(f))^{-1}y| = 1$. Все нормальные функторы, а также функтор суперрасширения λ сохраняют точки взаимной однозначности.

Теорема 1. *Пусть* $\mathscr{F}$ *— полунормальный функтор,* $\operatorname{sp}\mathscr{F} = \{1, k, \dots\}$[2)] *и* $\mathscr{F}_k$ *не сохраняет точки взаимной однозначности. Тогда* $\mathscr{F}_k$ *обладает* K*-свойством.*

Доказательство. Пусть $\mathscr{F}$ удовлетворяет условию теоремы. Фиксируем непрерывное отображение $f : X \to Y$ такое, что

$$|f^{-1}(y_1)| = 1 \text{ и } |(\mathscr{F}_k(f))^{-1}(y_1)| > 1 \text{ для некоторой точки } y_1 \in Y.$$

Тогда в множестве $(\mathscr{F}_k(f))^{-1}(y_1)$ найдется точка a, для которой $\operatorname{supp}(a) = \{x_1, \dots, x_k\} = A$. Поскольку $f(\operatorname{supp}(a)) \supset \operatorname{supp}(\mathscr{F}_k(f)(a)) = \{y_1\}$, можно считать, что $f(x_1) = y_1$. Кроме того, f не может быть взаимно однозначным на множестве A. Пусть для определенности $f(x_{k-1}) = f(x_k)$[3)]. Положим $B = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$, и пусть $g : A \to B$ — отображение, определяемое по формуле

$$g(x_i) = x_i,\ i < k, \quad g(x_k) = x_{k-1}. \tag{1}$$

Положим $h = f|_B$. Тогда $f|_A = h \circ g : A \to Y$ и, следовательно,

$$\mathscr{F}_k(f)(a) = \mathscr{F}_k(h)(\mathscr{F}_k(g)(a)),$$

где $\mathscr{F}_k(h) : \mathscr{F}_k(B) \to \mathscr{F}_k(Y)$, причем $\mathscr{F}_k(B) = B$, так как $|B| < k$. Значит, $\mathscr{F}_k(g)(a)$ есть точка множества B, причем в силу взаимной однозначности f в точке y_1 будет $\mathscr{F}_k(g)(a) = x_1$. Итак, доказано, что для любого множества $A = \{x_1, \dots, x_k\}$, $|A| = k$, и отображения $g : A \to B = \{x_1, \dots, x_{k-1}\}$, определяемого по формуле (1), существует точка $a \in \mathscr{F}_{kk}(A)$ такая, что $\mathscr{F}_k(g)(a) = x_1$.

Пусть теперь X — произвольный неметризуемый компакт. Докажем, что пространство $\mathscr{F}_k(X)$ не наследственно нормально. Пусть $S = \bigl\{X_\alpha, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in G\bigr\}$ — обратный σ-полный спектр из метризуемых компактов с проекциями «на», дающий в пределе X (см. [3]). Тогда $\lim \mathscr{F}_k(S) = \mathscr{F}_k(X)$, где

$$\mathscr{F}_k(S) = \bigl\{\mathscr{F}_k(X_\alpha), \mathscr{F}_k(p^\alpha_\beta) : \alpha, \beta \in G\bigr\}.$$

Выберем $\alpha \in G$ так, что X_α имеет неизолированную точку t_1. Пусть $\{O_i : i \in N\}$ — счетная база окрестностей t_1 и $F_i = X_\alpha \setminus O_i$. Положим

$$P = X \setminus p_\alpha^{-1}(t_1), \quad Q = (\mathscr{F}_k(p_\alpha))^{-1}(t_1) \setminus p_\alpha^{-1}(t_1).$$

Множества P и Q лежат в $\mathscr{F}_k(X)$ и отделены по Хаусдорфу. Покажем, что P и Q не имеют непересекающихся окрестностей в $\mathscr{F}_k(X)$. Предположим противное: $P \subset U$, $Q \subset V$ и $U \cap V = \varnothing$ (U, V открыты в $\mathscr{F}_k(X)$). Поскольку P является счетным объединением компактов $p_\alpha^{-1}(F_i)$, существует индекс $\beta \geq \alpha$ такой, что

$$\mathscr{F}_k(p_\beta)^\sharp(U) \supset \mathscr{F}_k(p_\beta)(P) = X_\beta \setminus \bigl(p^\beta_\alpha\bigr)^{-1}(t_1). \tag{2}$$

[2)] Здесь и далее элементы степенного спектра записаны в порядке возрастания.

[3)] Из этого равенства и выбора точки y_1 следует, что число k в условиях теоремы обязательно не менее 3.

Поскольку точка t_1 не изолирована в X_α, множество P не является замкнутым. Следовательно, оно имеет предельную точку $x_1 \in p_\alpha^{-1}(t_1)$. Дополним точку x_1 до множества $A = \{x_1, \dots, x_k\} \subset X$ так, что $|A| = k$, точки $y_i = p_\beta(x_i)$ попарно различны при $i < k$ и $p_\beta(x_k) = p_\beta(x_{k-1})$. Заметим, что отображение $p_\beta|_A$ топологически совпадает с рассмотренным ранее отображением $g : A \to B$. Следовательно, существует точка $a \in \mathscr{F}_{kk}(A) \subset \mathscr{F}_k(X)$ такая, что $\mathscr{F}_k(p_\beta)(a) = y_1$. Значит, $a \in Q$.

Пусть $x \in P$. Назовем множество $A(x) = \{x, x_2, \dots, x_k\}$ *допустимым*, если $p_\beta(x) \neq p_\beta(x_i)$ при $i \geq 2$. Пусть $h_x : A \to A(x)$ — гомеоморфизм, определяемый по формуле $h_x(x_1) = x$, $h_x(x_i) = x_i$ при $i \geq 2$. Пусть, далее, $a(x) = \mathscr{F}_k(h_x)(a) \in \mathscr{F}_{kk}(A(x))$. Для точки $a(x)$ имеем

$$\mathscr{F}_k(p_\beta)(a(x)) = p_\beta(x) \in \mathscr{F}_k(p_\beta)(P).$$

Таким образом, в силу (2) $a(x) \in U$.

Положим $Z = \{a(x) : A(x) \text{ допустимо}\}$. Покажем, что $a \in [Z]$, тем самым получим противоречие. Рассмотрим отображение $\pi_k : X^k \times \mathscr{F}_k(k) \to \mathscr{F}_k(X)$. Точка $\xi = (x_1, \dots, x_k) \in X^k$ является предельной для множества $C = \{\xi(x) = (x, x_2, \dots, x_k) : A(x) \text{ допустимо}\}$ в силу выбора x_1. Напомним, что при определении отображения π_k точки X^k отождествляются с отображениями из k в X. Отображение $\xi : k \to A$ взаимно однозначно, следовательно, существует единственная точка $b \in \mathscr{F}_k(k)$ такая, что $\pi_k(\xi, b) = \mathscr{F}_k(\xi)(b) = a$. Ясно также, что $\pi_k(\xi(x), b) = a(x)$ для всех x с допустимым $A(x)$. Имеем $[C \times \{b\}] \ni (\xi, b)$, следовательно,

$$a = \pi_k(\xi, b) \in \pi_k[C \times \{b\}] \subset [\pi_k(C \times \{b\})] = [Z].$$

Теорема доказана.

Пусть $\phi_{nm} : n \to m$ $(n > m)$ — отображение, задаваемое формулой: $\phi_{nm}(k) = k$ при $k < m$, $\phi_{nm}(k) = m - 1$ при $k \geq m$. Будем говорить, что полунормальный функтор $\mathscr{F}$ степени n *удовлетворяет условию* $(*)$, если существует m такое, что $1 < m < n$ и

$$\mathscr{F}(\phi_{nm})(\mathscr{F}_{nn}(n)) \cap \mathscr{F}_{mm}(m) \neq \varnothing.$$

(Очевидно, что при этом $n \geq 3$.)

Доказательство следующей теоремы фактически приведено в [7].

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор и $n \in \mathrm{sp}(\mathscr{F})$. Если $\mathscr{F}_n$ удовлетворяет условию $(*)$, то $\mathscr{F}_n$ обладает K-свойством.*

Для любых двух полунормальных функторов $\mathscr{F}$ и $\mathscr{G}$ определим их букет $\mathscr{H} = \mathscr{F}\mathscr{G}$ следующим образом. Для каждого компакта X пространство $\mathscr{H}(X)$ есть результат склейки $\mathscr{F}(X)$ и $\mathscr{G}(X)$ по точкам X. Если $f : X \to Y$ — непрерывное отображение, то отображение $\mathscr{H}(f)$ определяется по формуле: $\mathscr{H}(f)(a) = \mathscr{F}(f)(a)$ при $a \in \mathscr{F}(X)$, $\mathscr{H}(f)(a) = \mathscr{G}(f)(a)$ при $a \in \mathscr{G}(X)$. Легко проверить, что букет полунормальных функторов является полунормальным функтором.

Пусть $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор степени n, не удовлетворяющий условию $(*)$. Введем обозначение: $\mathscr{F}_{n1}(X) = \mathscr{F}_{nn}(X) \cup X$.

Пусть $f : X \to Y$ — непрерывное отображение компактов. Докажем, что

$$\mathscr{F}(f)(\mathscr{F}_{n1}(X)) \subset \mathscr{F}_{n1}(Y). \tag{3}$$

Пусть $a \in \mathscr{F}_{nn}(X)$, $\mathrm{supp}(a) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Если f взаимно однозначно на $\mathrm{supp}(a)$, то $\mathscr{F}(f)(a) \in \mathscr{F}_{nn}(Y)$. Если же $f|_{\mathrm{supp}(a)}$ не взаимно однозначно, то будем считать, что $f(x_{n-1}) = f(x_n)$, и представим отображение $f|_{\mathrm{supp}(a)}$ в виде композиции $f|_{\mathrm{supp}(a)} = h \circ g$, где $g : \{x_1, \dots, x_n\} \to \{x_1, \dots, x_{n-1}\}$, $g(x_i) = x_i$ при $i < n$, $g(x_n) = x_{n-1}$; $h(x_i) = f(x_i)$ при $i < n$. Если $|\,\mathrm{supp}(\mathscr{F}(f)(a))| = k$, $1 < k < n$, то $\mathscr{F}(g)(a) = b$, $|\,\mathrm{supp}(b)| = m$ и $k \le m \le n-1$. Пусть $s : \mathrm{supp}(a) \to \mathrm{supp}(b)$ — ретракция, которая все точки разности $\mathrm{supp}(a) \setminus \mathrm{supp}(b)$ переводит в фиксированную точку $x_i \in \mathrm{supp}(b)$ с единственным условием: если $x_{n-1} \in \mathrm{supp}(b)$, то $i = n-1$. Отображение s представимо в виде композиции $s = t \circ g$, где t взаимно однозначно на $\mathrm{supp}(b)$. Следовательно, $\mathscr{F}(s)(a) = \mathscr{F}(t)(\mathscr{F}(g)(a)) = b$, где $a \in \mathscr{F}_{nn}(\mathrm{supp}(a))$, $b \in \mathscr{F}_{mm}(\mathrm{supp}(b))$. Но это означает, что выполнено условие $(*)$ для $\mathscr{F}$, поскольку отображение s топологически совпадает с ϕ_{nm}. Полученное противоречие завершает доказательство включения (3).

Для любого отображения $f : X \to Y$ положим $\mathscr{F}_{n1}(f) = \mathscr{F}(f)|_{\mathscr{F}_{n1}(X)}$.

Докажем теперь, что $\mathscr{F}_{n1}(X)$ замкнуто в $\mathscr{F}(X)$ ($\mathscr{F}$, как и выше, полунормальный функтор степени n, не удовлетворяющий условию $(*)$).

1. X конечно. Пусть $a \in \mathscr{F}(X)$, $\mathrm{supp}(a) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $1 < k < n$. Определим отображение $\phi : X \to \mathrm{supp}(a)$ по формуле: $\phi(x_i) = x_i$ при $i = 1, \dots, k$; $\phi(y) = x_k$ при $x \notin \mathrm{supp}(a)$. В силу включения (3)

$$\mathscr{F}(\phi)(\mathscr{F}_{n1}(X)) \subset \mathscr{F}_{n1}(\mathrm{supp}(a)) = \mathrm{supp}(a).$$

Поскольку ϕ взаимно однозначно на $\mathrm{supp}(a)$, имеем $a = \mathscr{F}(\phi)(a) \notin \mathrm{supp}(a)$. Следовательно, $(\mathscr{F}(\phi))^{-1}(\mathscr{F}(\mathrm{supp}(a)) \setminus \mathrm{supp}(a))$ — окрестность точки a в $\mathscr{F}(X)$, не пересекающая $\mathscr{F}_{n1}(X)$.

2. X — нульмерный компакт. Рассмотрим обратный спектр $S = \{X_\alpha, p^\alpha_\beta : \alpha, \beta \in A\}$ из конечных пространств, дающий в пределе X. Тогда $\mathscr{F}(X) = \lim \mathscr{F}(S)$. Пусть $a \notin \mathscr{F}_{n1}(X)$. Имеем $\mathrm{supp}(a) = \{x_1, \dots, x_k\}$, $1 < k < n$. Существует $\alpha \in A$ такое, что проекция $p_\alpha : X \to X_\alpha$ взаимно однозначна на $\mathrm{supp}(a)$. Тогда $\mathscr{F}p_\alpha(a) \notin \mathscr{F}_{n1}(X_\alpha)$ и $(\mathscr{F}(p_\alpha))^{-1}(\mathscr{F}(X_\alpha) \setminus \mathscr{F}_{n1}(X_\alpha))$ — искомая окрестность точки a в $\mathscr{F}(X)$, не пересекающая $\mathscr{F}_{n1}(X)$.

3. X — произвольный компакт. Существуют нульмерный компакт Y и непрерывное сюръективное отображение $f : Y \to X$. Легко видеть, что

$$\mathscr{F}(f)\mathscr{F}_{n1}(Y) = \mathscr{F}_{n1}(X),$$

следовательно, $\mathscr{F}_{n1}(X)$ замкнуто в $\mathscr{F}(X)$.

Итак, доказано

Предложение 1. *Для любого полунормального функтора $\mathscr{F}$ степени n, не удовлетворяющего условию $(*)$, определен полунормальный функтор $\mathscr{F}_{n1}$ со степенным спектром $\mathrm{sp}(\mathscr{F}_{n1}) = \{1, n\}$.*

Проверка условий полунормальности для $\mathscr{F}_{n1}$ не представляет труда.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 2. *Полунормальный функтор $\mathscr{F}$ степени n, не удовлетворяющий условию $(*)$, естественно изоморфен букету функторов $\mathscr{F}_{n-1}$ и $\mathscr{F}_{n1}$.*

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{F}$ — полунормальный функтор степени $n > 3$. Тогда $\mathscr{F}$ обладает K-свойством.*

Доказательство. Если $\mathscr{F}$ удовлетворяет условию $(*)$, то $\mathscr{F}$ обладает K-свойством в силу теоремы 2. В противном случае $\mathscr{F}$ содержит подфунктор

$\mathscr{F}_{n1}$ (предложение 1) со степенным спектром $\mathrm{sp}(\mathscr{F}_{n1}) = \{1, n\}$. Докажем, что $\mathscr{F}_{n1}$ не сохраняет точек взаимной однозначности при $n > 3$. Предположим противное. Пусть $|X| = n$ и $a \in \mathscr{F}_{nn}(X)$. Разобьем X на два непересекающихся неодноточечных подмножества: $X = A_1 \cup A_2$. Пусть $Y_i = \{A_i\} \cup (X \setminus A_i)$ — фактор-пространство X по разбиению, единственным нетривиальным элементом которого является множество A_i, и $f_i : X \to Y_i$ — соответствующее факторное отображение ($i = 1, 2$). Тогда $\mathscr{F}_{n1}(f_i)(a) = A_i$, $i = 1, 2$, что делает невозможным определение значения $\mathscr{F}_{n1}(f)(a)$ для факторного отображения $f : X \to \{A_1, A_2\}$, склеивающего в точки множества A_1 и A_2 одновременно.

Значит, $\mathscr{F}_{n1}$ обладает K-свойством в силу теоремы 1. Следовательно, $\mathscr{F}$ также обладает K-свойством. $\square$

Теорема 4 (CH). *Пусть $\mathscr{F}$ — сохраняющий вес полунормальный функтор степени $n > 1$. Функтор $\mathscr{F}$ не обладает K-свойством тогда и только тогда, когда либо* 1) $n = 2$; *либо* 2) $n = 3$, *а $\mathscr{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности и не удовлетворяет условию* $(*)$.

Доказательство. Если $n > 3$, то $\mathscr{F}$ обладает K-свойством в силу теоремы 3. Если $n = 2$, то $\mathscr{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности. Следовательно, $\mathscr{F}(X_0)$ наследственно нормально для построенного в [1] неметризуемого компакта X_0. Значит, $\mathscr{F}$ не обладает K-свойством.

Пусть $n = 3$. Если $\mathscr{F}$ удовлетворяет условию $(*)$, то $\mathscr{F}$ обладает K-свойством в силу теоремы 1. Если $\mathscr{F}$ не удовлетворяет условию $(*)$, то ввиду предложения 2 $\mathscr{F} = \mathscr{F}_2\mathscr{F}_{31}$. Если, кроме того, $\mathscr{F}$ не сохраняет точек взаимной однозначности, то $\mathscr{F}_{31}$ также не сохраняет точек взаимной однозначности. Значит, по теореме 1 $\mathscr{F}_{31}$ обладает K-свойством, откуда следует наличие K-свойства у $\mathscr{F}$. Осталось рассмотреть случай, когда $\mathscr{F}$ сохраняет точки взаимной однозначности и не удовлетворяет условию $(*)$. Тогда оба функтора $\mathscr{F}_2, \mathscr{F}_{31}$ сохраняют точки взаимной однозначности. Значит, пространства $\mathscr{F}_2(X_0)$ и $\mathscr{F}_{31}(X_0)$ наследственно нормальны. Следовательно, $\mathscr{F}(X_0)$ также наследственно нормально. Таким образом, K-свойство для $\mathscr{F}$ не выполняется. $\square$

Замечание. Примером сохраняющего вес полунормального функтора степени 3, который не удовлетворяет условию $(*)$ и сохраняет точки взаимной однозначности, может служить $\mathscr{F} = \exp_2 \lambda_3$. При этом $\mathrm{sp}(\mathscr{F}) = \{1, 2, 3\}$.

Из доказательства теоремы 4 следует, что построенный в [10] компакт X_0 является тестовым пространством для K-свойства (или универсальным контрпримером) для любого сохраняющего вес полунормального функтора конечной степени.

Следствие 1 (CH). *Пусть $\mathscr{F}$ — сохраняющий вес полунормальный функтор степени $n > 1$. Функтор $\mathscr{F}$ обладает K-свойством тогда и только тогда, когда пространство $\mathscr{F}(X_0)$ не наследственно нормально.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Иванов А. В., Кашуба Е. В.* О наследственной нормальности пространств вида $\mathscr{F}(X)$ // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 4. С. 813–824.
2. *Щепин Е. В.* Функторы и несчетные степени компактов // Успехи мат. наук. 1981. Т. 36, № 3. С. 3–62.
3. *Федорчук В. В., Филиппов В. В.* Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
4. *Katětov M.* Complete normality of Cartesian products // Fund. Math. 1948. V. 35. P. 271–274.

5. *Федорчук В. В.* К теореме Катетова о кубе // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1989. № 4. С. 93–96.
6. *Жураев Т. Ф.* Функтор λ и метризуемость бикомпактов // Вестн. МГУ. Сер. 1. Математика, механика. 1999. № 4. С. 54–56.
7. *Кашуба Е. В.* Обобщенная теорема Катетова для полунормальных функторов // Тр. Петрозаводск. ун-та. Сер. математика. 2006. № 13. С. 82–89.
8. *Комбаров А. П.* О нормальных функторах степени ≥ 3 // Мат. заметки. 2004. Т. 76, № 1. С. 147–149.
9. *Gruenhage G., Nyikos P.* Normality in X^2 for compact X // Trans. Amer. Math. Soc. 1993. V. 340, N 2. P. 563–586.
10. *Larson P., Todorčević S.* Katětov's problem // Trans. Amer. Math. Soc. 2002. V. 354. P. 1783–1791.
11. *Басманов В. Н.* Ковариантные функторы, ретракты и размерность // Докл. АН СССР. 1983. Т. 271, № 5. С. 1033–1036.
12. *Fedorchuk V., Todorčević S.* Cellularity of covariant functors // Topology and its Applications. 1997. V. 76. P. 125–150.
13. *Иванов А. В.* О степенных спектрах и композициях финитно строго эпиморфных функторов // Тр. Петрозаводск. ун-та. Сер. Математика. 2000. № 7. С. 15–28.

Статья поступила 12 февраля 2008 г.

Иванов Александр Владимирович
Петрозаводский гос. университет, математический факультет,
кафедра геометрии и топологии, пр. Ленина, 33, Петрозаводск 185640
ivanov@petrsu.ru