Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2010. Том 51, № 5

УДК 517.958

МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Д. С. Аниконов

Аннотация. Рассматривается сингулярное интегральное уравнение первого рода в ограниченном открытом множестве n-мерного пространства. В этом множестве выделены открытые подмножества, имеющие общую (контактную) часть границы между ними, представляющую собой $(n-1)$-мерную кусочно-гладкую поверхность. Рассматривается недоопределенный случай, когда неизвестная часть подынтегрального выражения зависит от $2n$ независимых переменных, в то время как сам заданный интеграл зависит только от n переменных. В таких условиях ставится задача отыскания только контактной части границы и доказывается единственность ее решения.

Ключевые слова: сингулярный интеграл, интегральная геометрия, томография, уравнение.

1. Основные обозначения, предположения и вспомогательные утверждения

Будем использовать следующие обозначения: $\rho(A,B)$ — расстояние между произвольными множествами A и B в $\mathbb{R}^n$; ∂A — граница множества A; $B(x,\rho) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, |y-x| < \rho\}$, $\rho > 0$; $B(x,\rho_1,\rho_2) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, \rho_1 \le |y-x| < \rho_2\}$, $0 < \rho_1 < \rho_2$; $\Omega = \{\omega : \omega \in \mathbb{R}^n, |\omega| = 1\}$. Пусть T — открытое ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$, в котором содержатся два непустых непересекающихся открытых подмножества T_1, T_2, причем их объединение плотно в T, т. е. $T_0 = T_1 \cup T_2$, $\overline{T}_0 = \overline{T}$. Ясно, что $\partial T_0 = \partial T_1 \cup \partial T_2$. Рассмотрим функцию $g(x,y,\omega)$, заданную и измеримую на множестве $T \times T \times \Omega$ и ограниченную почти всюду в следующем смысле. Существуют множества $\widetilde{T}$, $\widetilde{\Omega}$, $\widetilde{T} \in T$, $\widetilde{\Omega} \in \Omega$, совпадающие по мере с T и Ω соответственно и такие, что $|g(x,y,\omega)| \le \text{const}$, $(x,y,\omega) \in \widetilde{T} \times \widetilde{T} \times \widetilde{\Omega}$. Здесь и далее const означает положительное постоянное число. Для экономии обозначений в дальнейшем ограниченные функции часто будем обозначать через $O(1)$. Обозначим $\widetilde{T}_i = T_i \cap \widetilde{T}$, $\widetilde{T}_0 = \widetilde{T}_1 \cup \widetilde{T}_2$, $i = 1,2$. Условимся для точки единичной сферы Ω использовать букву ω, если она рассматривается как независимая переменная. Если же такая точка представлена через другие переменные, будем использовать букву s, например, $s = (y-x)/|y-x|$. Рассмотрим интеграл $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$, где

$$V_i(x) = \int\limits_{T_i} \frac{g(x,y,s)}{|y-x|^n}\, dy, \quad x \in T, \ s = \frac{y-x}{|y-x|}. \tag{1.1}$$

Работа выполнена при финансовой поддержке программы фундаментальных исследований СО РАН, выполняемых совместно со сторонними научными организациями (проект № 2009.93), и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00384).

Функции $V_i(x)$ понимаются как сингулярные интегралы при $x \in T_i$, $i = 1, 2$. Относительно множеств $\widetilde{T}_i$, $i = 1, 2$, и функции $g(x, y, \omega)$ сделаем дополнительное предположение. Будем считать, что для любой точки $u \in \widetilde{T}_i$ выполнено неравенство

$$\int\limits_{T_i} \frac{|g(x, y, s) - g(x, u, s)|}{|y - u|^n}\, dy \leq \mathrm{const}, \quad x \in \widetilde{T}_i,\ i = 1, 2,\ s = \frac{y - x}{|y - x|}. \tag{1.2}$$

Разумеется, это ограничение предполагает суммируемость подынтегральной функции.

Для удобства будем считать функцию $g(x, y, \omega)$ продолженной нулем по y вне T. Отметим, что если перейти к сферическим координатам $y - u = t\nu$, $\nu \in \Omega$, $dy = t^{n-1}\, dt d\nu$, то неравенство (1.2) будет следствием условия

$$\int\limits_{\Omega} d\nu \int\limits_0^\infty \frac{|g(x, u + t\nu, \omega) - g(x, u, \omega)|}{t}\, dt \leq \mathrm{const}, \quad \omega \in \widetilde{\Omega},\ x \in \widetilde{T}.$$

Последнее неравенство можно назвать многомерным аналогом одномерного условия Дини, используемого в теории рядов Фурье. Очень простым примером функций, удовлетворяющих условию (1.2), является класс функций, непрерывных по Гёльдеру в каждом из множеств T_1 и T_2 в следующем смысле:

$$|g(x, y, \omega) - g(x, u, \omega)| \leq \mathrm{const}\, |y - u|^\alpha, \tag{1.3}$$

где $x \in \widetilde{T}$, $y, u \in \widetilde{T}_i$, $\omega \in \widetilde{\Omega}$, $0 < \alpha \leq 1$, $i = 1, 2$. Докажем лемму, являющуюся обобщением аналогичного утверждения из [1].

Лемма 1.1. *Для существования сингулярного интеграла $V_i(x)$ в точках $x \in \widetilde{T}_i$ необходимо и достаточно выполнения следующего условия:*

$$\int\limits_{\Omega} g(x, x, \omega)\, d\omega = 0, \quad x \in \widetilde{T}_i,\ i = 1, 2. \tag{1.4}$$

Доказательство. Согласно определению [1] для $x \in \widetilde{T}_i$ сингулярный интеграл $V_i(x)$ понимается как следующий предел:

$$\lim_{\epsilon \to +0} V_i(x) = V_{i,\epsilon}(x), \quad V_{i,\epsilon}(x) = \int\limits_{T_{i,\epsilon,x}} \frac{g(x, y, s)}{|y - x|^n}\, dy, \quad T_{i,\epsilon,x} = T_i \backslash B(x, \epsilon).$$

Представим $V_{i,\epsilon}(x)$ в виде

$$V_{i,\epsilon}(x) = \int\limits_{T_{i,\epsilon,x}} \frac{g(x, x, s)}{|y - x|^n}\, dy + \int\limits_{T_{i,\epsilon,x}} \frac{g(x, y, s) - g(x, x, s)}{|y - x|^n}\, dy.$$

Обозначим первый и второй интегралы в правой части последнего равенства через $V_{i,\epsilon,1}(x)$ и $V_{i,\epsilon,2}(x)$ соответственно. Для $x \in \widetilde{T}_i$ из условия (1.2) следует, что $V_{i,\epsilon,2}(x)$, будучи величиной типа $O(1)$, имеет ограниченный предел, равный интегралу по T_i от той же подынтегральной функции. Для анализа $V_{i,\epsilon,1}(x)$ возьмем шар $B(x, \gamma)$, $\gamma > 0$, целиком лежащий в T_i, и для $0 < \epsilon < \gamma$ представим $T_{i,\epsilon,x}$ в виде $T_{i,\epsilon,x} = B(x, \epsilon, \gamma) \cup (T_{i,\epsilon,x} \backslash B(x, \epsilon, \gamma))$. Ясно, что $T_{i,\epsilon,x} \backslash B(x, \epsilon, \gamma) =$

$T_i \backslash B(x,\gamma)$ и для $y \in T_i \backslash B(x,\gamma)$ выполнено неравенство $|y-x| \geq \gamma$. Поэтому в равенстве

$$V_{i,\epsilon,1}(x) = \int\limits_{B(x,\epsilon,\gamma)} \frac{g(x,x,s)}{|y-x|^n}\,dy + \int\limits_{T_i \backslash B(x,\gamma)} \frac{g(x,x,s)}{|y-x|^n}\,dy$$

второй интеграл в правой части, не зависящий от ϵ, есть величина типа $O(1)$. Для вычисления первого интеграла используем замену переменных $y - x = t\omega$, $s = \omega$, $t \in (\epsilon, \gamma)$, $\omega \in \Omega$, $dy = t^{n-1}\,d\omega dt$ и получим

$$V_{i,\epsilon,1}(x) = \int\limits_{\Omega} d\omega \int\limits_{\epsilon}^{\gamma} \frac{g(x,x,\omega)}{t}\,dt + O(1) = \ln\frac{\gamma}{\epsilon} \int\limits_{\Omega} g(x,x,\omega)\,d\omega + O(1),$$

причем слагаемое $O(1)$ имеет ограниченный предел при $\epsilon \to 0$. Отсюда видно, что для существования предела $V_{i,\epsilon,1}(x)$ при $\epsilon \to +0$ необходимо и достаточно выполнения условия (1.4). Так как $V_{i,\epsilon}(x) = V_{i,\epsilon,1}(x) + \varphi_\epsilon(x)$, где $\varphi_\epsilon(x)$ имеет ограниченный предел при $\epsilon \to +0$, лемма доказана.

В дальнейшем везде будем предполагать условие (1.4) выполненным. Отметим, что для существования интеграла $V_i(x)$, $i = 1, 2$, для $x \notin T_i$ условие (1.4) не требуется, поскольку в этом случае $V_i(x)$ — обычный интеграл от почти всюду ограниченной функции.

Предположим, что в окрестности некоторой точки $v \in \partial T_1 \cap \partial T_2$ границы множеств T_1 и T_2 являются гладкими класса C^2 в следующем смысле. Пусть существует число $\sigma > 0$ такое, что $B(v,\sigma) \cap \partial T_1 = B(v,\sigma) \cap \partial T_2$. Такие участки границы ∂T_0 будем называть *контактными*, предполагая выполненными еще и следующие условия. Для любой точки $z \in B(v,\sigma) \cap \partial T_1$ существует единая касательная $P(z)$ плоскость к поверхностям ∂T_1 и ∂T_2. Обозначая через $n_1(z)$ единичный вектор внутренней нормали к поверхности ∂T_1 в точке z, предположим, что существует число $\tau_0 > 0$ такое, что $z + \tau n_1(z) \in T_1$, $z - \tau n_1(z) \in T_2$, $0 < \tau < \tau_0$. Рассмотрим декартову систему координат с центром в точке z, у которой первые $n-1$ осей расположены в плоскости $P(z)$, а n-я ось направлена по вектору $n_1(z)$. Координаты любой точки $y \in \mathbb{R}^n$ в этой системе координат будем обозначать через (ξ, η), $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})$, $\eta \in \mathbb{R}^1$. Определим цилиндры $C_\delta(z) = \{y : y \in \mathbb{R}^n,\ y = (\xi,\eta),\ |\xi| < \delta,\ |\eta| < 2\delta\}$, $C_{\beta,\delta}(z) = \{y : y \in \mathbb{R}^n,\ y = (\xi,\eta),\ \beta \leq |\xi| < \delta,\ |\eta| < 2\delta\}$, $0 < \beta < \delta$. Ясно, что $C_\delta(z) = C_\beta(z) \cap C_{\beta,\delta}(z)$. Предположим, что для некоторого $\delta > 0$ будет $C_\delta(z) \cap \partial T_1 = C_\delta(z) \cap \partial T_2 = \{(\xi,\eta) : |\xi| < \delta,\ \eta = \psi(\xi)\}$, причем функция $\psi(\xi)$ имеет все непрерывные и ограниченные частные производные до второго порядка включительно, а значения функции $\psi(\xi)$ и всех ее первых производных равны нулю при $\xi = 0$. Отсюда легко следует, что $|\psi(\xi)| \leq \mathrm{const}\,|\xi|^2$. Ввиду того, что числа τ_0, δ, σ можно неограниченно уменьшать, примем согласование: $0 < \delta \leq \tau_0$, $2\delta < \sigma < 1$. Докажем следующее простое утверждение, которое часто будет использоваться в дальнейшем.

Лемма 1.2. *Пусть $\varphi_1(\xi)$ и $\varphi_2(\xi)$ — непрерывные ограниченные функции, $\xi \in \mathbb{R}^{n-1}$, $|\xi| < \delta$, τ — любое положительное число. Тогда*

а) *если $|\varphi_2(\xi) - \varphi_1(\xi)| \leq \mathrm{const}\,|\xi|^2$, то*

$$\left| \int\limits_{|\xi|<\delta} d\xi \int\limits_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} \frac{d\eta}{(|\xi|^2 + (\eta-\tau)^2)^{n/2}} \right| \leq \mathrm{const}; \tag{1.5}$$

б) *если* $|\varphi_1(\xi)| \le \mathrm{const}\,|\xi|^2$, *то*

$$\left| \int\limits_{|\xi|<\tau} d\xi \int\limits_{\varphi_1(\xi)}^{\tau-\sqrt{\tau^2-|\xi|^2}} \frac{d\eta}{(|\xi|^2+(\eta-\tau)^2)^{n/2}} \right| \le \mathrm{const}; \tag{1.6}$$

в) *если* $|\tau-\varphi_1(\xi)| \le \tau + \mathrm{const}\,|\xi|^2$, *то*

$$\left| \int\limits_{\tau<|\xi|<\delta} d\xi \int\limits_{\varphi_1(\xi)}^{\tau} \frac{d\eta}{(|\xi|^2+(\eta-\tau)^2)^{n/2}} \right| \le \mathrm{const}\,. \tag{1.7}$$

Доказательство неравенств (1.5)–(1.7) осуществляется по единой схеме. Во-первых, при интегрировании по ξ делается замена переменных с использованием сферических координат в $\mathbb{R}^{n-1}$, $\xi = t\nu$, $|t| = |\xi|$, $\nu \in \Omega_{n-1}$, Ω_{n-1} — единичная сфера в $\mathbb{R}^{n-1}$, $d\xi = t^{n-2}\,dt d\nu$. Во-вторых, используются легко проверяемые неравенства $t^{n-2}(t^2+(\eta-\tau)^2)^{-n/2} \le t^{-2}$, $0 < \tau - \sqrt{\tau^2-t^2} \le t^2/\tau$. Отсюда следует, что

$$\left| \int\limits_{|\xi|<\delta} d\xi \int\limits_{\varphi_1(\xi)}^{\varphi_2(\xi)} \frac{d\eta}{(|\xi|^2+(\eta-\tau)^2)^{n/2}} \right| = \left| \int\limits_{\Omega_{n-1}} d\nu \int\limits_0^\delta dt \int\limits_{\varphi_1(t\nu)}^{\varphi_2(t\nu)} \frac{t^{n-2}\,d\eta}{(t^2+(\eta-\tau)^2)^{n/2}} \right|$$
$$\le \left| \int\limits_{\Omega_{n-1}} d\nu \int\limits_0^\delta \frac{|\varphi_2(t\nu)-\varphi_1(t\nu)|\,dt}{t^2} \right| \le \mathrm{const},$$

$$\left| \int\limits_{|\xi|<\tau} d\xi \int\limits_{\varphi_1(\xi)}^{\tau-\sqrt{\tau^2-|\xi|^2}} \frac{d\eta}{(|\xi|^2+(\eta-\tau)^2)^{n/2}} \right|$$
$$\le \left| \int\limits_{\Omega_{n-1}} d\nu \int\limits_0^\tau dt \int\limits_{\varphi_1(t\nu)}^{\tau-\sqrt{\tau^2-t^2}} \frac{t^{n-2}\,d\eta}{(t^2+(\eta-\tau)^2)^{n/2}} \right|$$
$$\le \int\limits_{\Omega_{n-1}} d\nu \int\limits_0^\tau \frac{(\tau-\sqrt{\tau^2-t^2}+|\varphi_1(t\nu)|)\,dt}{t^2} \le \mathrm{const},$$

$$\left| \int\limits_{\tau<|\xi|<\delta} d\xi \int\limits_{\varphi_1(\xi)}^{\tau} \frac{d\eta}{(|\xi|^2+(\eta-\tau)^2)^{n/2}} \right| = \left| \int\limits_{\Omega_{n-1}} d\nu \int\limits_\tau^\delta dt \int\limits_{\varphi_1(t\nu)}^{\tau} \frac{t^{n-2}\,d\eta}{(t^2+(\eta-\tau)^2)^{n/2}} \right|$$
$$\le \mathrm{const} \int\limits_{\Omega_{n-1}} d\nu \int\limits_\tau^\delta \frac{|\tau-\varphi_1(t\nu)|\,dt}{t^2} \le \mathrm{const} \int\limits_{\Omega_{n-1}} d\nu \int\limits_\tau^\delta \frac{(\tau+\mathrm{const}\,t^2)\,dt}{t^2} \le \mathrm{const}\,.$$

Тем самым лемма 1.2 доказана.

2. Характер особенности сингулярного интеграла вблизи контактной границы

В этом разделе основное внимание будет уделено исследованию поведения интеграла $V(x)$ при x, близких к контактным участкам границы множества T_0, определение которых дано в разд. 1. Не умаляя общности, можно считать, что точки x принадлежат T_1. Возьмем произвольную точку $x \in B(v,\sigma) \cap \widetilde{T}_1$. Уменьшая, если нужно, число σ, можно добиться того, чтобы существовала единственная точка $z \in \partial T_1 \cap B(v,\sigma)$, ближайшая к x, т. е. чтобы $\rho(x, \partial T_1) = |x - z|$. Более того, будем рассматривать точки $x \in \widetilde{T}_1$, настолько близкие к ∂T_1, чтобы выполнялось неравенство $|x - z| \le \delta$, где число δ определялось в разд. 1 при описании контактного участка границы множества T_0. Объединяя сделанные предположения относительно выбора точек, запишем

$$\begin{gathered} x \in B(v,\sigma) \cap \widetilde{T}_1, \quad x = z + \tau n_1(z),\ 0 < \tau \le \delta, \\ z \in \partial T_1 \cap \partial T_2, \quad \rho(x, \partial T_0) = |x - z| = \tau. \end{gathered} \tag{2.1}$$

Ясно, что шар $B(x,\tau)$ целиком лежит в T_1 и пересечение $\partial B(x,\tau) \cap \partial T_1$ состоит из единственной точки z. Аналогично этому для $\tilde{x} = z - \tau n_1(z)$, $0 < \tau \le \delta$, шар $B(\tilde{x},\tau)$ целиком лежит в T_2 и $\partial B(\tilde{x},\tau) \cap \partial T_2 = \{z\}$. Определим следующие полупространства и полусферы формулами:

$$R^+(z) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, (y - z, n_1(z)) > 0\}; \quad R^-(z) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, (y - z, n_1(z)) \leqslant 0\};$$
$$R^+(x) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, (y - x, n_1(z)) > 0\}; \quad R^-(x) = \{y : y \in \mathbb{R}^n, (y - x, n_1(z)) \leqslant 0\};$$
$$\Omega^+(z) = \{\omega : \omega \in \Omega, (\omega, n_1(z)) > 0\}; \quad \Omega^-(z) = \{\omega : \omega \in \Omega, (\omega, n_1(z)) \le 0\}.$$

Теорема 2.1. *Для любой точки x, выбранной согласно соотношениям* (2.1) *верны равенства*

$$V_1(x) = |\ln \rho(x, \partial T_0)| \int\limits_{\Omega^+(z)} g(x,x,\omega)d\omega + O(1), \tag{2.2}$$

$$V_2(x) = |\ln \rho(x, \partial T_0)| \int\limits_{\Omega^-(z)} g(x,u,\omega)d\omega + O(1), \tag{2.3}$$

где u — любая точка из множества $B(x, 2\tau) \cap \widetilde{T}_2$.

Кроме того, на любом непустом множестве $\{x : x \in \widetilde{T}_0,\ \rho(x, \partial T_0) > \epsilon\}$, $\epsilon > o$, функция $V(x)$ ограничена.

Доказательство. Представим сингулярный интеграл $V_1(x)$, $x \in \widetilde{T}_1$, в виде

$$V_1(x) = \int\limits_{T_1} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n} + \int\limits_{T_1} \frac{(g(x,y,s) - g(x,x,s))\,dy}{|y-x|^n}.$$

Отсюда и из неравенства (1.2) при $u = x$ следует, что если первый интеграл в правой части последнего равенства обозначить через $J(x)$, то получим $V_1(x) = J(x) + O(1)$. Возьмем произвольную точку x, удовлетворяющую соотношениям (2.1), т. е. $x = z + \tau n_1(z)$, $0 < \tau \le \delta$, и заметим, что условие (1.4) обеспечивает равенство нулю сингулярного интеграла от функции $g(x,x,s)|y-x|^{-n}$ по шару $B(x,\tau)$. Поэтому

$$J(x) = \int\limits_{T_1 \setminus B(x,\tau)} \frac{g(x,x,s)dy}{|y-x|^n}, \quad x = z + \tau n_1(z),\ 0 < \tau \le \delta.$$

Множество $T_1 \backslash B(x,\tau)$ представим в виде объединения $T_1\backslash B(x,\tau) = T_1^+(x) \cup T_1^-(x)$, где $T_1^+(x) = (T_1\backslash B(x,\tau)) \cap R^+(x)$, $T_1^-(x) = (T_1\backslash B(x,\tau)) \cap R^-(x)$. Перепишем $J(x)$ в виде

$$J(x) = J^+(x) + J^-(x), \quad J^\pm(x) = \int\limits_{T_1^\pm(x)} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n}.$$

Сначала покажем, что $|J^-(x)| \le \mathrm{const}$. Ввиду неравенства $|y-x| \ge \delta$ при $y \notin C_\delta(z)$ для интеграла $J^-(x)$ верно представление

$$J^-(x) = J_\delta^-(x) + O(1), \quad J_\delta^-(x) = \int\limits_{T_1^-(x)\cap C_\delta(z)} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n}.$$

В свою очередь, множество $T_1^-(x) \cap C_\delta(z)$ представим как объединение множеств A_1 и A_2, где $A_1 = T_1^-(x) \cap C_\tau(z)$, $A_2 = T_1^-(x) \cap C_{\tau,\delta}(z)$, и вместо интеграла $J^-(x)$ возьмем сумму двух интегралов от той же функции по множествам A_1 и A_2. Для оценки первого из них учтем неравенство $|g(x,x,\omega)| \le \mathrm{const}$, $(x,\omega) \in \widetilde{T} \times \widetilde{\Omega}$, и перейдем к координатам (ξ,η). В результате получится

$$\left| \int\limits_{A_1} \frac{g(x,x,s)dy}{|y-x|^n} \right| \le \mathrm{const} \int\limits_{A_1} \frac{dy}{|y-x|^n} = \mathrm{const} \int\limits_{|\xi|<\tau} d\xi \int\limits_{\psi(\xi)}^{\tau - \sqrt{\tau^2 - |\xi|^2}} \frac{d\eta}{(|\xi|^2 + (\eta-\tau)^2)^{n/2}}.$$

Ограниченность последнего повторного интеграла следует из неравенства (1.6).

Для оценки интеграла по множеству A_2 рассуждения имеют аналогичный характер и дополнительно используется функция $\psi_1(\xi) = \min(\psi(\xi),\tau)$, учитывающая структуру множества A_2 и допускающая оценку $0 \le \tau - \psi_1(\xi) \le \tau + |\psi(\xi)|$. Таким образом, имеем

$$\left| \int\limits_{A_2} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n} \right| \le \mathrm{const} \int\limits_{A_1} \frac{dy}{|y-x|^n} = \mathrm{const} \int\limits_{\tau<|\xi|<\delta} d\xi \int\limits_{\psi_1(\xi)}^{\tau} \frac{d\eta}{(|\xi|^2 + (\eta-\tau)^2)^{n/2}}.$$

Ограниченность последнего повторного интеграла гарантируется неравенством (1.7). Тем самым доказано, что функция $J_\delta^-(x)$ ограничена и, следовательно, ограничена функция $J^-(x)$. Теперь исследуем интеграл $J^+(x)$. Перейдем в нем от интегрирования по $T_1^+(x)$ к интегрированию по половине шарового слоя $B^+(x,\tau,d) = B(x,\tau,d) \cap R^+(x)$, где d — диаметр множества T. Поскольку $B^+(x,\tau,d) \supset T_1^+(x)$, то

$$J^+(x) = \int\limits_{B^+(x,\tau,d)} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n} - \int\limits_{B^+(x,\tau,d)\backslash T_1^+(x)} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n}. \tag{2.4}$$

Покажем, что второй интеграл в правой части (2.4) есть величина типа $O(1)$. При этом достаточно оценить интеграл от той же функции только по множеству $A_3 = \big(B^+(x,\tau,d)\backslash T_1^+(x)\big) \cap C_\delta(z)$, поскольку для остальных y выполняется неравенство $|y-x| \ge \delta$ и требуемая оценка очевидна. Переходя к координатам (ξ,η) и используя функцию $\psi_2(\xi) = \max(\tau,\psi(\xi))$, имеем

$$\left| \int\limits_{A_3} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n} \right| \le \mathrm{const} \int\limits_{A_3} \frac{dy}{|y-x|^n} = \mathrm{const} \int\limits_{\tau<|\xi|<\delta} d\xi \int\limits_{\tau}^{\psi_2(\xi)} \frac{d\eta}{(|\xi|^2 + (\eta-\tau)^2)^{n/2}}.$$

Последний повторный интеграл ограничен в силу оценки (1.7). Следовательно, и второй интеграл в правой части (2.4) также ограничен. Вычислим первый интеграл в правой части (2.4). Для этого перейдем к сферическим координатам в $\mathbb{R}^n$: $y - x = t\omega$, $t \in (\tau, d)$, $\omega \in \Omega^+(z)$, $s = \omega$, $dy = t^{n-1}\,dtd\omega$. В результате получим

$$\int\limits_{B^+(x,\tau,d)} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n} = \int\limits_{\Omega^+(z)} d\omega \int\limits_{\tau}^{d} \frac{g(x,x,\omega)}{t}\,dt = \ln\frac{d}{\tau} \int\limits_{\Omega^+(z)} g(x,x,\omega)\,d\omega.$$

Отсюда и из (2.4) с учетом равенства $\tau = \rho(x, \partial T_0)$ вытекает

$$J^+(x) = |\ln \rho(x, \partial T_0)| \int\limits_{\Omega^+(z)} g(x,x,\omega)\,d\omega + O(1). \tag{2.5}$$

Так как $V_1(x) = J(x) + O(1)$, $J(x) = J^+(x) + J^-(x)$, $|J^-(x)| \le \text{const}$, из (2.5) следует (2.2).

Заметим, что для точек любого непустого множества $\{x : x \in \widetilde{T}_1, \rho(x, \partial T_1) > \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, выполнено условие $B(x,\epsilon) \subset T_1$ и, следовательно, $J(x)$ можно представить в виде

$$J(x) = \int\limits_{B(x,\epsilon)} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n} - \int\limits_{T_1 \setminus B(x,\epsilon)} \frac{g(x,x,s)\,dy}{|y-x|^n}.$$

В правой части последнего равенства первый интеграл равен нулю вследствие условия (1.4), а второй интеграл ограничен. Тем самым утверждение леммы относительно функции $V_1(x)$ доказано.

Осталось исследовать интеграл $V_2(x)$, понимаемый в обычном смысле, поскольку для любого $x \in T_1$ выполнено неравенство $|y-x| > \rho(x, T_2) > 0$, $y \in T_2$. Однако, как будет показано ниже, при приближении x к множеству T_2 функция $V_2(x)$ ведет себя вполне аналогично функции $V_1(x)$ и, в частности, может быть неограниченной.

Снова рассмотрим точку x, выбранную согласно (2.1), и фиксируем произвольную точку $u \in B(x, 2\tau) \cap \widetilde{T}_2$. Следовательно, $|u-x| < 2\tau = 2\rho(x, T_2)$. Поэтому для $y \in T_2$ имеем $|y-x| > \rho(x, T_2) = \tau$, $|u-y| \le |u-x| + |x-y| \le 3\tau < 3|y-x|$, $|y-x|^{-n} < 3^n |u-y|^{-n}$. Представим $V_2(x)$ в виде

$$V_2(x) = \int\limits_{T_2} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} - \int\limits_{T_2} \frac{(g(x,y,s) - g(x,u,s))\,dy}{|y-x|^n}.$$

Заметим, что благодаря неравенству $|y-x|^{-n} < 3^n |u-y|^{-n}$ и условию (1.2) второй интеграл в правой части последнего равенства — функция, ограниченная на $\widetilde{T}_1$, т. е.

$$V_2(x) = I(x) + O(1), \quad I(x) = \int\limits_{T_2} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n}, \; s = \frac{y-x}{|y-x|}. \tag{2.6}$$

Представим множество T_2 в виде $T_2 = T^+_{2,z} \cup T^-_{2,z}$, где $T^+_{2,z} = T_2 \cap \mathbb{R}^+(z)$, $T^-_{2,z} = T_2 \cap \mathbb{R}^-(z)$, и интеграл $I(x)$ запишем как сумму:

$$I(x) = I^+(x) + I^-(x), \quad I^\pm(x) = \int\limits_{T^\pm_{2,z}} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n}.$$

Докажем,что $I^+(x) \le \mathrm{const}$. Для этого достаточно оценить интеграл от функции $g(x,u,s)|y-x|^{-n}$ только по множеству $A_4 = T^+_{2,z} \cap C_\delta(z)$, поскольку для остальных y из $T^+_{2,z}$ верно неравенство $|y-x| \ge \delta$. Переходя к координатам (ξ,η), учитывая неравенство $|g(x,u,s)| \le \mathrm{const}$, $x \in \widetilde{T}_1$, $u \in \widetilde{T}_2$, $\omega \in \widetilde{\Omega}$, и используя функцию $\psi_3(\xi) = \max(0, \psi(\xi)$, получаем

$$\left| \int\limits_{A_4} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} \right| \le \mathrm{const} \int\limits_{|\xi|<\delta} d\xi \int\limits_0^{\psi_3(\xi)} \frac{d\eta}{(|\xi|^2 + (\eta-\tau)^2)^{n/2}}.$$

Из леммы 1.2 (неравенство (1.5)) видим, что повторный интеграл в правой части последнего неравенства ограничен. Следовательно, $|I^+(x)| \le \mathrm{const}$.

Теперь исследуем интеграл $I^-(x)$. Возьмем половину шара $B^-(z,d) = B(z,d) \cap \mathbb{R}^-(z)$. Так как $B^-(z,d) \supset T^-_{2,z}$, то

$$I^-(x) = \int\limits_{B^-(z,d)} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} - \int\limits_{B^-(z,d)\setminus T^-_{2,z}} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n}. \tag{2.7}$$

Докажем, что второй интеграл в правой части (2.7) ограничен. Ясно, что для этого достаточно оценить интеграл от той же функции только по множеству $A_5 = (B^-(z,d)\setminus T^-_{2,z}) \cap C_\delta(z)$. Переходя к координатам (ξ,η) и используя функцию $\psi_4(\xi) = \min(0, \psi(\xi))$, имеем

$$\left| \int\limits_{A_5} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} \right| \le \mathrm{const} \int\limits_{|\xi|<\delta} d\xi \int\limits_{\psi_4(\xi)}^{0} \frac{d\eta}{(|\xi|^2 + (\eta-\tau)^2)^{n/2}}.$$

Ограниченность последнего повторного интеграла следует из леммы 1.2 (неравенство (1.5)). Тем самым доказано, что

$$V_2(x) = \int\limits_{B^-(z,d)} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} + O(1). \tag{2.8}$$

В последнем интеграле перейдем от интегрирования по $B^-(z,d)$ к интегрированию по $B^-(x,\tau,d) = B(x,\tau,d) \cap \mathbb{R}^-(z)$. Для этого используем тождество $B^-(z,d) = (B^-(x,\tau,d)\setminus(B^-(x,\tau,d)\setminus B^-(z,d))) \cup (B^-(z,d)\setminus(B^-(x,\tau,d))$. Обозначая $A_6 = B^-(x,\tau,d)\setminus B^-(z,d))$, $A_7 = B^-(z,d)\setminus B^-(x,\tau,d)$ и замечая, что $A_6 \subset B^-(x,\tau,d)$, $A_7 \cap B^-(x,\tau,d) = \varnothing$, получаем

$$\int\limits_{B^-(z,d)} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} = \int\limits_{B^-(x,\tau,d)} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} - \int\limits_{A_6} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} + \int\limits_{A_7} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n}. \tag{2.9}$$

Так как для $y \in A_7$ верно неравенство $|y-x| \ge d$, третий интеграл в правой части (2.9) ограничен. Покажем, что и второй интеграл также ограничен. Для этого достаточно изучить интеграл от той же функции по множеству $A_8 = A_6 \cap C_\delta(z)$. Переходя к координатам (ξ,η), учитывая неравенство $|g(x,u,s)| \le \mathrm{const}$, $(x,u,\omega) \in \widetilde{T}_1 \times \widetilde{T}_2 \times \widetilde{\Omega}$, и определение множества A_8, имеем

$$\left| \int\limits_{A_8} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} \right| \le \mathrm{const} \Biggl(\int\limits_{|\xi|<\tau} d\xi \int\limits_0^{\tau-\sqrt{\tau^2-|\xi|^2}} \frac{d\eta}{(|\xi|^2 + (\eta-\tau)^2)^{n/2}} + \int\limits_{\tau<|\xi|<\delta} d\xi \int\limits_0^{\tau} \frac{d\eta}{(|\xi|^2 + (\eta-\tau)^2)^{n/2}} \Biggr). \tag{2.10}$$

Ограниченность правой части последнего неравенства следует из оценок (1.6), (1.7). Следовательно, в правой части равенства (2.9) интегралы по A_6 и A_7 ограничены. Отсюда и из (2.8), (2.9) выводим, что

$$V_2(x) = \int\limits_{B^-(x,\tau,d)} \frac{g(x,u,s)\,dy}{|y-x|^n} + O(1).$$

Интеграл в правой части последнего равенства легко преобразовать, переходя к сферическим координатам в $\mathbb{R}^n$ ($y - x = t\omega$, $t \in (\tau, d)$, $\omega \in \Omega^-(z)$, $s = \omega$, $dy = t^{n-1}\,d\omega dt$):

$$V_2(x) = \int\limits_{\Omega^-(z)} d\omega \int\limits_{\tau}^{d} \frac{g(x,u,\omega)}{t}\,dt + O(1) = \ln\frac{d}{\tau} \int\limits_{\Omega^-(z)} g(x,u,\omega)\,d\omega \; + O(1).$$

Из последнего равенства с учетом соотношения $\rho(x, \partial T_0) = \tau$ следует (2.3).

Осталось заметить, что для точек непустого множества $\{x : x \in \widetilde{T}_1, \rho(x, \partial T_1) > \epsilon\}$, $\epsilon > 0$, и для $y \in T_2$ верно неравенство $|y - x| > \epsilon$, поэтому интеграл $V_2(x)$ ограничен. Поскольку ранее такое же утверждение доказано для $V_1(x)$, то в силу равенства $V(x) = V_1(x) + V_2(x)$ теорема доказана полностью.

Замечание 2.1. В левой части равенства (2.3) находится функция, зависящая только от x, а справа есть дополнительная переменная u. Это, в частности, означает, что от u зависят оба слагаемых правой части (включая $O(1)$), но их сумма от u не зависит. Отсюда также следует, что в представлении (2.3) первые (главные) слагаемые, соответствующие различным точкам u, отличаются друг от друга на ограниченную величину.

Замечание 2.2. Из равенств (2.2), (2.3) следует, что при $\rho(x, \partial T_0) \to 0$ функция $V(x)$ может быть неограниченной, если сумма множителей при $\ln \rho(x, \partial T_0)$ не равна нулю.

3. Постановка и исследование единственности решения задачи о неизвестной границе для сингулярного уравнения

В этом разделе будут использоваться результаты разд. 2, но при более жестких ограничениях. Пусть в открытом ограниченном множестве G в $\mathbb{R}^n$ содержатся открытые непересекающиеся множества G_i, $i = 1, \dots, p$. Обозначая объединение этих множеств через G_0, предположим, что $\overline{G}_0 = \overline{G}$. Ясно, что $\partial G_0 = \partial G_1 \cup \dots \cup \partial G_p$. Рассматривается функция $g(x, y, \omega)$, $(x, y, \omega) \in G \times G \times \Omega$, причем для всех $(x, y, \omega) \in G \times G_i \times \Omega$, $(\tilde{x}, \tilde{y}, \widetilde{\omega}) \in G \times G_i \times \Omega$, $i = 1, \dots, p$, выполняется условие непрерывности по Гёльдеру в следующей форме:

$$|g(x,y,\omega) - g(\tilde{x},\tilde{y},\widetilde{\omega})| \le \mathrm{const}(|x-\tilde{x}|^\alpha + |y-\tilde{y}|^\alpha + |\omega-\widetilde{\omega}|^\alpha), \quad 0 < \alpha \le 1. \quad (3.1)$$

Легко видеть, что из последнего неравенства следуют условия(1.3) и (1.2). Заметим, что предположение (3.1) не гарантирует непрерывности функции $g(x, y, \omega)$ в точках $y \in \partial G_i$. Вместе с тем из неравенства (3.1) следует существование предельных значений $g(x, y, \omega)$ при $y \to z$, $y \in G_i$, $z \in \partial G_i$, которые будем обозначать через $g_i(x, z, \omega)$ и которые не обязаны совпадать со значениями функции $g(x, z, \omega)$. Кроме того, неравенство (3.1) оказывается верным, если в нем заменить $\tilde{y}$ на z и $g(\tilde{x}, \tilde{y}, \widetilde{\omega})$ на $g_i(\tilde{x}, z, \widetilde{\omega})$, $i = 1, \dots, p$. Если точка z принадлежит границам двух множеств G_j и G_l, то через $[g(x,z,\omega)]_{j,l}$ будем обозначать скачок функции $g(x,y,\omega)$ в точке $y=z$, т. е.

$$[g(x,z,\omega)]_{j,l} = g_j(x,z,\omega) - g_l(x,z,\omega), \quad (x,\omega) \in G \times \Omega, \ z \in \partial G_j \cap \partial G_l.$$

Считая выполненным условие (1.4) для любой точки $x \in G_0$, рассмотрим сингулярный интеграл $U(x)$, полученный интегрированием функции $g(x,y,s)|y-x|^{-n}$ по $y \in G$. Функция $U(x)$ задана на множестве G_0, однако для удобства будем считать $U(x)$ определенной везде в G, продолжая ее в точках $x \in G$, не принадлежащих G_0, нулем. Заметим, что такое продолжение (и любое другое) не является существенным. Оно сделано только для простоты формулировок и не будет использоваться в условиях и доказательствах последующих теорем.

Функция $g(x,y,s)$, которую будем считать неизвестной, зависит от $2n$ независимых переменных, а $U(x)$ — от n переменных. При таком соотношении по заданному интегралу найти полностью подынтегральную функцию не представляется возможным, но можно попытаться найти только часть неизвестных данных. В связи с этим поставим следующую задачу.

Задача типа Стефана. *Считая заданной только функцию $U(x)$, найти границу ∂G_0 множества G_0 из следующего сингулярного уравнения:*

$$\int\limits_G \frac{g(x,y,s)\,dy}{|y-x|^n} = U(x), \quad x \in G, \ s = \frac{y-x}{|y-x|}. \tag{3.2}$$

Отметим, что часть границы ∂G_0, именно ∂G, задана, поскольку она является границей области определения известной функции $U(x)$. Поэтому фактически искомым является множество $\partial G_0 \backslash \partial G$, которое можно интерпретировать как поверхность возможных разрывов по переменной y функции $g(x,y,\omega)$. Актуальность этой задачи объясняется тем, что именно к подобным уравнениям сводится ряд важных проблем для уравнений математической физики, если при постановках задач не пользоваться существенной априорной информацией о неизвестном объекте. Такова ситуация, например, в рентгеновской томографии, если считать все радиационные характеристики исследуемого объекта неизвестными. В последнем примере множество $\partial G_0 \backslash \partial G$ означает совокупность границ между различными материалами, входящими в состав комплексной среды G.

Предположим, что множество $\partial G_0 \backslash \partial G$ является $(n-1)$-мерной кусочно гладкой поверхностью класса $\mathbb{C}^2$ в следующем смысле. Будем говорить, что точка $z \in \partial G_j \cap \partial G_l$, $1 \le j,\, l \le p$, является *контактной*, если она принадлежит какому-либо контактному участку границ двух множеств, как это определялось в разд. 1 для множеств T_1 и T_2, если $G_j = T_1$, $G_l = T_2$. Считаем, что в достаточно малой окрестности точки z нет элементов из множеств G_i, $i \ne j,l$. Потребуем, чтобы множество контактных точек было плотно в $\partial G_0 \backslash \partial G$.

В начале этого раздела при более строгих ограничениях, чем в разд. 1, 2, будет получено представление сингулярного интеграла $U(x)$ типа (2.3), но более простое и не содержащее произвольной точки u. Возьмем произвольную контактную точку $z \in \partial G_j \cap \partial G_l$, $1 \le j,\, l \le p$, и точки $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \le \delta$, где $n_j(z)$ означает единичный вектор внутренней нормали к поверхности ∂G_j в точке z, а число δ выбирается, как и в разд. 1, достаточно малым, чтобы $x \in G_j$, $\tilde{x} = z - \tau n_j(z) \in G_l$, шары $B(x,\tau)$, $B(\tilde{x},\tau)$ целиком лежали в G_j и G_l соответственно, а сферы $\partial B(x,\tau)$, $\partial B(\tilde{x},\tau)$ имели единственную общую точку z с поверхностью ∂G_0. Для таких точек при выполнении условия (3.1) верна следующая

Теорема 3.1. *Для любой контактной точки $z \in \partial G_0 \backslash \partial G$ и точек $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \le \delta$, справедливо равенство*

$$U(x) = f_{j,l}(z)|\ln \rho(x, \partial G_0)| + O(1), \tag{3.3}$$

где

$$f_{j,l}(z) = \int\limits_{\Omega^+(z)} g_j(z,z,\omega)\,d\omega + \int\limits_{\Omega^-(z)} g_l(z,z,\omega)\,d\omega. \tag{3.4}$$

Кроме того, функция $U(x)$ ограничена на всяком непустом множестве $\{x : x \in G_0,\ \rho(x, \partial G_0) > \epsilon > 0\}$.

Доказательство. Докажем сначала равенство (3.3). Для этого рассмотрим точки $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \le \delta$, и представим $U(x)$ в виде суммы

$$U(x) = U_1(x) + \dots + U_p(x), \quad U_i(x) = \int\limits_{G_i} \frac{g(x,y,s)\,dy}{|y-x|^n}. \tag{3.5}$$

Будем использовать обозначения и результаты предыдущих разделов, полагая $\widetilde{T} = T$, $\widetilde{\Omega} = \Omega$, $G_j = T_1$, $G_l = T_2$. Поскольку в шаре $B(x,\sigma)$ $(2\delta < \sigma < 1)$ нет точек из множеств G_i, $i \ne j, l$, то для $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \le \delta$, все функции $U_i(x)$ ограничены, кроме, быть может, $U_j(x)$, $U_l(x)$. Иначе говоря, верно равенство $U(x) = U_j(x) + U_l(x) + O(1)$. Используя равенства (2.2), (2.3) и полагая в них $V_1(x) = U_j(x)$, $V_2(x) = U_l(x)$, получаем

$$U(x) = |\ln \rho(x, \partial G_0)| \Bigg(\int\limits_{\Omega^+(z)} g_j(x,x,\omega)\,d\omega + \int\limits_{\Omega^-(z)} g_l(x,u,\omega)\,d\omega \Bigg) + O(1), \tag{3.6}$$

где u — произвольная точка из $B(x, 2\tau) \cap G_l$. Ввиду равенств $\rho(x, \partial G_0) = |x - z| = \tau$ имеем $|u - z| < 3\tau = 3|x - z|$ и далее из условия (3.1) получаем

$$|g(x,x,\omega) - g_j(z,z,\omega)| \le \text{const}\ \tau^\alpha, \quad |g(x,u,\omega) - g_l(z,z,\omega)| \le \text{const}\ \tau^\alpha.$$

Отсюда легко следует, что

$$\int\limits_{\Omega^+(z)} g_j(x,x,\omega)\,d\omega + \int\limits_{\Omega^-(z)} g_l(x,u,\omega)\,d\omega$$
$$= \int\limits_{\Omega^+(z)} g_j(z,z,\omega)\,d\omega + \int\limits_{\Omega^-(z)} g_l(z,z,\omega)\,d\omega + \tau^\alpha O(1). \tag{3.7}$$

Таким образом, из (3.6), (3.7) с учетом равенства $\tau^\alpha \ln \tau = O(1)$ получаем (3.3). Тот факт, что функция $U(x)$ ограничена на непустом множестве $\{x : x \in G_0,\ \rho(x, \partial G_0) > \epsilon > 0\}$, легко следует из аналогичного свойства, доказанного для $V_1(x)$, $V_2(x)$ в теореме 2.1. Тем самым теорема 3.1 полностью доказана.

Замечание 3.1. Из формулы (3.3) следует, что если

$$f_{j,l}(z) \ne 0, \tag{3.8}$$

то $|U(x)| \to \infty$ при $x \to z$ $(\tau \to 0)$.

Теперь докажем единственность решения поставленной задачи. Пусть в G имеются две системы множеств $\{G_i^m\}$, $m = 1, 2$, $i = 1, \dots, p_m$, и соответственно определены множества G_0^m и две функции $g^m(x,y,\omega)$, $(x,y,\omega) \in G \times G \times \Omega$. Подставляя в равенство (3.2) на место функции $g(x,y,\omega)$ функции $g^m(x,y,\omega)$, получаем в правой части функции $U^m(x)$. Аналогично из (3.4) получаем $f_{j,l}^m(z)$, $m = 1, 2$.

Теорема 3.2. *Если $U^1(x) = U^2(x)$, $x \in G_0^1 \cap G_0^2$, то $\partial G_0^1 = \partial G_0^2$ при условии выполнения неравенства* (3.8) *при каждом* $m = 1, 2$, *т. е.*

$$f_{j,l}^{m(z)} \neq 0 \tag{3.9}$$

для любой контактной точки $z \in \partial G_j^m \cup \partial G_l^m$, $1 \leq j,\ l \leq p_m$, $m = 1, 2$.

Доказательство. Возьмем произвольную контактную точку $z \in \partial G_0^1 \backslash \partial G$ и предположим, что $z \notin \partial G_0^2 \backslash \partial G$. Тогда существует шар $B(z, \varepsilon)$, не содержащий точек из ∂G_0^2. Точка z принадлежит пересечению $\partial G_j^1 \cap \partial G_l^1$ при некоторых j, l, $1 \leq j,\ l \leq p_1$, $j \neq l$. Выбирая число $\delta < \varepsilon$, рассмотрим точки $x = z + \tau n_j(z)$, $0 < \tau \leq \delta$. Согласно условию (3.9) и замечанию 3.1 имеем $|U(x)| \to \infty$ при $x \to z$ $(\tau \to 0)$. С другой стороны, $U_2(x)$ ограничена при всех τ, $0 < \tau \leq \delta$, поскольку $x \in G_0^2$, $\rho\big(x, \partial G_0^2\big) > \epsilon$. Следовательно, $U_1(x)$ и $U_2(x)$ не могут совпадать при всех указанных x, что противоречит условию теоремы. Полученное противоречие доказывает, что все контактные точки из $\partial G_0^1 \backslash \partial G$ принадлежат $\partial G_0^2 \backslash \partial G$. По симметрии рассуждений и все контактные точки из $\partial G_0^2 \backslash \partial G$ принадлежат $\partial G_0^1 \backslash \partial G$. Отсюда в силу плотности контактных точек в $\partial G_0^m \backslash \partial G$, $m = 1, 2$, следует совпадение $\partial G_0^1 \backslash \partial G$ и $\partial G_0^2 \backslash \partial G$. Теорема доказана.

Замечание 3.2. Нетрудно видеть, что из условий (1.4) и (3.8) следует наличие разрыва функции $g(x, y, \omega)$ по переменной y при $y = z$, где z — контактная точка, $z \in \partial G_0 \backslash \partial G$.

Замечание 3.3. Для подтверждения существенности достаточного условия (3.8) рассмотрим следующий случай. Пусть функция $g(x, y, \omega)$ непрерывна по Гёльдеру везде в $G \times G \times \Omega$. Тогда $f_{j,l}(z) = 0$ и теорема 3.2 оказывается неприменимой. Однако в этом же случае и сами границы ∂G_i будут фиктивными, т. е. отсутствует объект поиска и задача теряет смысл. Таким образом, хотя необходимость условия (3.8) и не доказана, его нельзя просто отбросить в теореме 3.2.

Замечание 3.4. Условие $f_{j,l}(z) = 0$, означающее невыполнение (3.8), будучи равенством, свидетельствует о наличии специальной связи между величинами, входящими в выражение $f_{j,l}(z)$. Поэтому можно надеяться, что оно вряд ли будет выполняться в широком классе случаев. Иначе говоря, есть основания полагать, что для ряда конкретных задач условие (3.8) будет выполнено, если на поверхности $\partial G_0 \backslash \partial G$ функция $g(x, y, \omega)$ действительно имеет разрывы по y.

Замечание 3.5. Доказанная здесь теорема единственности относится к уравнению (3.2), которое можно классифицировать как недоопределенное сингулярное интегральное уравнение первого рода, т. е. объект, о котором вряд ли возможно утверждать что-либо определенное, находясь в рамках традиционных подходов.

В заключение коснемся хронологии вопроса. Вероятно, впервые подобное исследование выполнено в работе Стефана [2], посвященной поиску неизвестной линии разрыва кусочно постоянного коэффициента уравнения теплопроводности. Позже аналогичные постановки задач появились в публикациях П. С. Новикова, В. К. Иванова, А. И. Прилепко, В. Н. Страхова, В. М. Исакова, В. Г. Чередниченко и в других многочисленных работах, посвященных обратным задачам теории потенциала. Настоящая работа возникла как обобщение подходов к обратным задачам для уравнения переноса. Впервые автор использовал подобные идеи еще в статьях [3, 4]. Позже этот метод получил развитие при исследовании проблем рентгеновской томографии и интегральной геометрии [5–10]. Сейчас постановка задач о неизвестных границах не является редкостью. Так, она активно используется при исследовании различных задач для уравнений математической физики. В качестве примеров подобных работ можно упомянуть, в частности, [11–15].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Михлин С. Г.* Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962.

2. *Stefan J.* Sitzungsber // Wien. Akad. Math.-Naturwiss. 1890. Bd 98a. S. 473–484.

3. *Аниконов Д. С.* Обратная задача об определении тела для уравнения переноса // Дифференц. уравнения. 1976. Т. 12, № 1. С. 567–570.

4. *Аниконов Д. С.* Об ограниченности сингулярного интегрального оператора в пространстве $C^{\alpha}(G)$ // Мат. сб. 1977. Т. 104, № 4. С. 515–534.

5. *Аниконов Д. С.* Задача типа Стефана для уравнения переноса // Докл. РАН. 1994. Т. 338, № 1. С. 25–28.

6. *Anikonov D. S.* Integro-differentiation indicator of non-homogeneity in a tomography problem // J. Inverse Ill-Posed Probl. 1999. V. 7, N 1. P. 17–59.

7. *Аниконов Д. С., Ковтанюк А. Е., Прохоров И. В.* Использование уравнения переноса в томографии. М.: Логос, 2000.

8. *Anikonov D. S., Kovtanyuk A. E., Prokhorov I. V.* Transport equation and tomography. Utrecht; Boston: VSP, 2002.

9. *Аниконов Д. С.* Специальная задача интегральной геометрии // Докл. РАН. 2007. Т. 415, № 1. С. 7–9.

10. *Аниконов Д. С.* Индикатор контактных границ для одной задачи интегральной геометрии // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49. С. 739–755.

11. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. М.: Наука, 1972.

12. *Faridani A., Keinert F., Ritman T. L., Smith K. T.* Local and global tomography // Signal processing. New York: Springer-Verl., 1990. P. 241–245.

13. *Louis A. K., Maass P.* Contour reconstruction in 3D X-Ray CT // IEEE Trans. Med. Imag. 1993. V. 12, N 4. P. 109–115.

14. *Ratsevich A. I., Ramm A. G.* New methods for finding jumpsoft a function from its local tomography // Inverse Probl. 1995. V. 11. P. 1005–1023.

15. *Лаврентьев М. М.* Математические задачи томографии и гиперболические отображения // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 5. С. 1094–1105.

Статья поступила 2 июля 2009 г.

Аниконов Дмитрий Сергеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
anik@math.nsc.ru