*Сибирский математический журнал*
*Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6*

*УДК 514.113+514.772.35*

# ИССЛЕДОВАНИЕ ИЗГИБАНИЙ АЛГОРИТМИЧЕСКИ 1–ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОГРАННИКОВ И ОПИСАНИЕ ОДНОГО МНОЖЕСТВА НЕИЗГИБАЕМЫХ ВЛОЖЕННЫХ МНОГОГРАННИКОВ

**И. Г. Максимов**

**Аннотация.** Получены формулы для описания зависимости длин диагоналей алгоритмически 1-параметрических многогранников и их объемов от параметра изгибания. В качестве приложения приведены уравнения изгибаемости и доказана неизгибаемость вложенных многогранников, полученных склейкой двух подвесок (бипирамид).

**Ключевые слова:** изгибаемый многогранник, изгибание, объем многогранника.

В статье получим некоторые формулы для исследования возможных изгибаний алгоритмически 1-параметрических многогранников. Эти формулы описывают зависимость длин диагоналей и объемов от параметра изгибаний и позволяют получить как необходимые, так и достаточные условия изгибаемости рассматриваемых многогранников. Представленные результаты позволяют доказать неизгибаемость вложенных многогранников, полученных склейкой двух подвесок (бипирамид).

Напомним, что алгоритмически 1-параметрические многогранники в общем положении локально однозначно определены набором длин ребер и одним дополнительным параметром, что и позволяет получить необходимые зависимости.

Вначале рассмотрим определения и конструкции, на которых основано понятие $p$-параметрических многогранников, введенное в [1].

Пусть $K$ — двумерный геометрический симплициальный комплекс, тело которого гомеоморфно некоторому компактному двумерному многообразию $M$. Под *многогранником с комбинаторным строением* $K$ будем понимать непрерывное в целом и линейное на каждом симплексе отображение $P : K \to R^3$. Многогранник *вложенный*, если $P$ — вложение.

Будем использовать классическое определение изгибаемости многогранников, предполагая, что при изгибании многогранника его комбинаторное строение остается одним и тем же, а грани движутся как абсолютно твердые тела, оставаясь конгруэнтными своим исходным положениям. *Изгибанием* назовем непрерывную и нетривиальную (не сводящуюся к движению в $R^3$) деформацию многогранника $P$, т. е. непрерывное по параметру $t \in [0, 1]$ семейство

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 09–01–00179).

многогранников $P_t : K \to R^3$ такое, что $P_0 = P$ и все $P_t(K)$ в $R^3$ нетривиально изометричны между собой в индуцированной из $R^3$ метрике, причем для любого двумерного симплекса $\sigma \subset K$ все $P_t(\sigma)$ конгруэнтны $P(\sigma)$. *Изгибаемым* называется многогранник, допускающий изгибания.

Для исключения изгибаний, которые сводятся к вращению одной части многогранника относительно второй его части, наложим на отображение $P$ требование «общего положения». Будем говорить, что многогранник $P(K)$ *находится в общем положении*, если для всех троек вершин комплекса $K$ верно, что их образы при отображении $P$ суть точки, не лежащие на одной прямой.

Обозначим через $n$ число вершин многогранника, через $E$ — множество неупорядоченных пар $(i, j)$, $1 \le i, j \le n$, для которых вершины с номерами $i, j$ соединены ребром. Пусть $l_{ij}$, $(i, j) \in E$ — длины его ребер.

Тогда набор длин ребер $(l_{ij})$, $(i, j) \in E$, многогранника $P(K)$ задает метрику многогранника как поверхности в $R^3$.

Напомним, что в соответствии с теоремой Глюка (см. [2]) почти все многогранники типа сферы неизгибаемы, т. е. локально однозначно определены длинами своих ребер. Однако для изгибаемых многогранников это неверно.

Будем называть *диагоналями* многогранника неупорядоченные пары $(i, j)$, $1 \le i, j \le n$, если $(i, j) \notin E$. Обозначим через $r_{ij}$, $(i, j) \notin E$, длины диагоналей многогранника.

Заметим, что полный набор длин ребер и всевозможных диагоналей $(l_{ij}, r_{km})$, $(i, j) \in E$, $(k, m) \notin E$, $l_{ij} > 0$, $r_{km} \ge 0$, однозначно определяет реализацию многогранника в $R^3$ с точностью до его движения в пространстве как твердого тела.

Мы предполагаем, что длины всех ребер положительные, так как будем рассматривать только невырожденные многогранники в общем положении.

Будем говорить, что точка $A$ *опирается* на треугольник $T$, если известны расстояния от $A$ до всех трех вершин треугольника $T$, который в этом случае называется *базовым* или опорным.

Пусть даны две точки $A$ и $B$ с опорой на один и тот же невырожденный треугольник $T$. Тогда мы можем найти расстояние между $A$ и $B$. При этом возможны два ответа в зависимости от расположения точек $A$ и $B$ по отношению к плоскости треугольника $T$ (соответствующие формулы можно найти в [3]).

По-другому это можно описать так: если для пяти точек известны девять расстояний между ними, тогда десятое расстояние вычисляется и оно может иметь одно или два значения. Если расстояние между какими-нибудь двумя точками найдено по этому способу, то будем говорить, что расстояние найдено по *стандартному алгоритму с базой*. В некоторых случаях такой способ вычисления расстояний позволяет вычислять неизвестные диагонали многогранника.

Обозначим через $\Delta_0$ множество диагоналей $\{(k_1, m_1), \dots, (k_p, m_p)\}$, длины которых считаются изначально известными. Теперь предположим, что мы имеем на $r$-м шаге некоторое множество диагоналей $\Delta_r$, и построим множество $\Delta_{r+1} \supseteq \Delta_r$. Для этого переберем все возможные пятерки вершин из $K$. Если для рассматриваемых пяти вершин $(i, j, k, m, s)$ из десяти возможных пар девять принадлежат множеству $\Delta_r \cup E$, то включим десятую пару в $\Delta_{r+1}$.

Определение. Назовем многогранник $P : K \to R^3$ *алгоритмически $p$-параметрическим в грубом смысле*, если найдется множество $\Delta_0$ из $p$ диагоналей многогранника такое, что остальные диагонали могут быть вычислены по стандартному алгоритму с базой[1)].

Алгоритмически 1-параметрическими многогранниками являются все подвески (бипирамиды). Для них в качестве множества $\Delta_0$ достаточно взять диагональ, соединяющую полюса.

*Подвеской $k$-го порядка* будем называть многогранник с $k+2$ вершинами со следующим комбинаторным строением: над замкнутой ломаной $L$ с $k$ звеньями строятся две пирамиды с вершинами соответственно в некоторых точках $N$ и $S$. Ломаная $L$ называется *экватором* подвески, точки $N$ и $S$ — ее *полюсами.*

Оказывается, подвески позволяют построить все алгоритмически 1-параметрические многогранники типа сферы (см. [4]). Для этого может потребоваться некоторая специальная последовательность склеек подвесок.

Дадим определение операции *склейки подвесок.* Пусть имеем подвеску $k$-го порядка с вершинами экватора $P_1, \dots, P_k$ и полюсами $N$, $S$. Удалим одно ребро экватора $P_1P_k$ и инцидентные ему грани $P_1P_kN$ и $P_1P_kS$ (левая часть рис. 1 и рис. 2). Предположим, что есть еще одна подвеска $m$-го порядка с вершинами экватора $P'_1, \dots, P'_m$ и полюсами $N'$, $S'$, у которой также удалены ребро $P'_1P'_m$ и инцидентные ему грани (правая часть рис. 1). Определим операцию склейки таких подвесок следующим образом. При этой операции выполняется склейка вершины $N'$ с вершиной $P_k$, вершины $S'$ с вершиной $P_1$, вершины $P'_1$ с вершиной $N$ и совместятся ребра $P_1N$ с $S'P'_1$ и $P_kN$ с $N'P'_1$ (рис. 1).

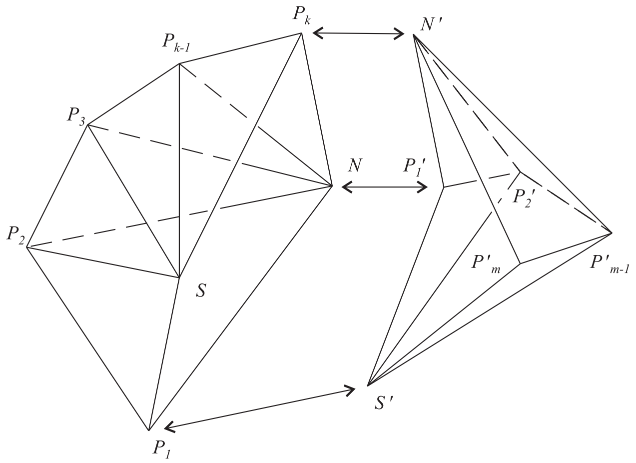


Рис. 1. Операция склейки двух подвесок.

Важным моментом является выбор совмещаемых вершин: полюс одной подвески совмещается с вершиной экватора второй подвески. Второй возможный способ склейки, когда совмещаются полюса подвесок, не является интересным, так как результатом будет подвеска большего порядка. В дополнение к трем парам вершин можно выполнить еще склейку вершины $P'_m$ с вершиной $S$. При этом получится замкнутый многогранник. Такая операция также разрешена, но она выполняется последней в последовательности склеек и завершает ее.

[1)] Обратим внимание, что отсутствие требования минимальности числа $p$ объясняется практической пользой определения (см. [1]). С одной стороны, в области практических применений знание минимального числа $p$ часто излишне (например, для целей настоящей статьи). С другой стороны, проверка минимальности является гораздо более трудной задачей.

Определим *последовательность склеек подвесок.* Если совмещаются только три пары вершин, то после склейки опять получаем многогранник $\widetilde{P}$ с четырехугольным краем и последовательность склеек может быть продолжена. Два смежных ребра этого края принадлежат краю одной подклеенной подвески. Пусть имеем еще одну подвеску с полюсами $N''$, $S''$, у которой также удалено ребро экватора и две инцидентные ему грани. Для операции склейки берутся полюса и одна вершина экватора $P_1''$, а также два смежных ребра подвески $P_1''N''$ и $P_1''S''$, образующие край подвески. На крае многогранника $\widetilde{P}$ для склейки также выбираются два смежных ребра. Если окажется, что выбранные ребра принадлежат одной подвеске, составляющей многогранник, то требуется соблюдение условия, что полюс одной подвески совмещается с вершиной экватора другой. Например, можно выбрать ребра $P_1S$ и $P_kS$ (рис. 1), концами которых являются один полюс и две вершины экватора исходной подвески. С другой стороны, взять ребра $P_m'N'$ и $P_m'S'$, концы которых — это два полюса и одна вершина экватора, нельзя. Далее выполняется склейка многогранников по выбранным ребрам. Заметим, что после склейки опять два смежных ребра края полученного многогранника $\widetilde{\widetilde{P}}$ принадлежат краю составляющей подвески, причем две вершины — это ее полюса, одна вершина принадлежит экватору. Процесс склейки продолжается, пока сохраняется четырехугольный край. Последняя склейка совмещает четыре пары вершин, и в результате получается замкнутый многогранник.

Для удобства будем разрешать случай $m = 2$ («подвески 2-го порядка»), т. е. склейку с фигурой из двух инцидентных треугольников $P_1'P_2'N'$ и $P_1'P_2'S'$.

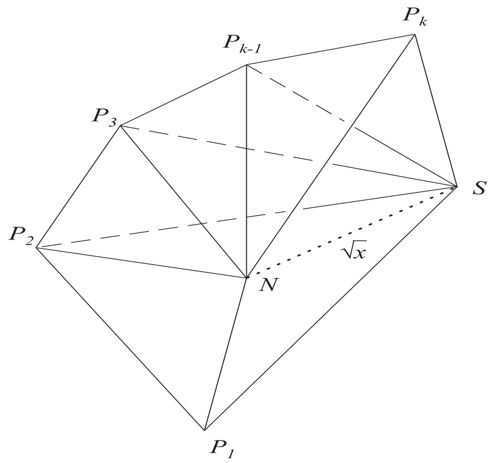


Рис. 2. Подвеска.

Переходя к исследованию изгибаний алгоритмически 1-параметрических многогранников, начнем с исследования изгибаний подвесок, являющихся основой конструкции указанных многогранников. Данные ниже формулы могут быть использованы для описания возможных изгибаний многогранников, полученных последовательностью склеек подвесок и любых 1-параметрических многогранников.

Рассмотрим изгибания подвески с $k$ вершинами на экваторе, у которой отсутствуют 2 грани $P_1P_kN$, $P_1P_kS$ (рис. 2). Мы предполагаем, что подвеска находится в общем положении, как сказано выше.

Обозначим через $d_{P_iP_j}$ расстояние между точками $P_i$, $P_j$. Длины ребер подвески считаем известными. В качестве параметра, задающего изгибание, возьмем квадрат расстояния между полюсами: $x = d_{NS}^2$. Наша цель — исследовать зависимость диагоналей и частичных объемов от указанного параметра изгибания.

В дальнейшем будем использовать для скалярного произведения обозначение $(\overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3})$ или просто $\overline{P_1P_2}\,\overline{P_1P_3}$ для более краткой записи в достаточно понятных случаях. Далее через $[\overline{P_1P_2} \times \overline{P_1P_3}]$ будем обозначать векторное произведение, а через $\langle \overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_4} \rangle$ — смешанное произведение векторов.

Введем обозначения для некоторых выражений, являющихся многочленами по $x$, коэффициенты которых вычисляются через длины ребер.

Пусть $S_i(x) = 4S^2_{P_iNS} = [\overline{P_iN} \times \overline{P_iS}]^2$, $1 \le i \le k$. Каждый из многочленов в области геометрического смысла представляет собой квадрат площади параллелограмма, построенного по двум ребрам многогранника $P_iN$, $P_iS$.

Легко вычислить явный вид этих многочленов. Нас, в первую очередь, будут интересовать старший член и корни этих многочленов.

**Лемма 1.** *Каждое выражение $S_i(x)$ является многочленом 2-й степени и имеет два действительных корня $0 \le s'_i < s''_i$:*

$$S_i(x) = -\frac{1}{4}(x - s'_i)(x - s''_i), \quad s'_i = (d_{P_iN} - d_{P_iS})^2, \quad s''_i = (d_{P_iN} + d_{P_iS})^2.$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} S_i(x) &= \begin{vmatrix} d^2_{P_iN} & \overline{P_iNP_iS} \\ \overline{P_iNP_iS} & d^2_{P_iS} \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} d^2_{P_iN} & \frac{d^2_{P_iN}+d^2_{P_iS}-x}{2} \\ \frac{d^2_{P_iN}+d^2_{P_iS}-x}{2} & d^2_{P_iS} \end{vmatrix} = d^2_{P_iN}d^2_{P_iS} - \left(\frac{d^2_{P_iN}+d^2_{P_iS}-x}{2}\right)^2 \\ &= \left(d_{P_iN}d_{P_iS} - \frac{d^2_{P_iN}+d^2_{P_iS}-x}{2}\right) \end{aligned}$$

$$\left(d_{P_iN}d_{P_iS} + \frac{d^2_{P_iN}+d^2_{P_iS}-x}{2}\right) = -\frac{1}{4}(x-(d_{P_iN}-d_{P_iS})^2)(x-(d_{P_iN}+d_{P_iS})^2). \quad \square$$

Введем обозначения $V_{i,i+1}$ и $\varepsilon_{i,i+1}$, где $1 \le i \le k$, причем для $i = k$ будем $i+1$ заменять на 1:

$$\langle \overline{P_iP_{i+1}}, \overline{P_iN}, \overline{P_iS} \rangle = \varepsilon_{i,i+1}\sqrt{36V^2_{P_iP_{i+1}NS}(x)} = \varepsilon_{i,i+1}\sqrt{V_{i,i+1}(x)}, \quad 1 \le i \le k-1,$$

$$\langle \overline{P_kP_1}, \overline{P_kN}, \overline{P_kS} \rangle = \varepsilon_{k,1}\sqrt{36V^2_{P_kP_1NS}(x)} = \varepsilon_{k,1}\sqrt{V_{k,1}(x)}.$$

Каждый из многочленов $V_{i,i+1}$ в области геометрического смысла представляет собой квадрат объема параллелепипеда, построенного по трем ребрам многогранника $P_iP_{i+1}$, $P_iN$, $P_iS$, а числа $\varepsilon_{i,i+1} = \pm 1$ показывают его ориентацию.

В первую очередь, нас снова будут интересовать старший член и корни этих многочленов.

**Лемма 2.** *Каждое выражение $V_{i,i+1}(x)$ является многочленом 2-й степени и имеет два действительных корня $0 \le s'_i, s'_{i+1} \le v'_{i,i+1} < v''_{i,i+1} \le s''_i, s''_{i+1}$:*

$$V_{i,i+1}(x) = 36V^2_{P_iP_{i+1}NS}(x) = -\frac{d^2_{P_iP_{i+1}}}{4}(x - v'_{i,i+1})(x - v''_{i,i+1}).$$

Доказательство. Имеем

$$V_{i,i+1}(x) = \langle \overline{P_iP_{i+1}}, \overline{P_iN}, \overline{P_iS} \rangle^2 = \begin{vmatrix} \overline{P_iP_{i+1}P_iP_{i+1}} & \overline{P_iP_{i+1}P_iN} & \overline{P_iP_{i+1}P_iS} \\ \overline{P_iP_{i+1}P_iN} & \overline{P_iNP_iN} & \overline{P_iNP_iS} \\ \overline{P_iP_{i+1}P_iS} & \overline{P_iNP_iS} & \overline{P_iSP_iS} \end{vmatrix}$$

$$
= \begin{vmatrix} d^2_{P_iP_{i+1}} & \frac{d^2_{P_iP_{i+1}}+d^2_{P_iN}-d^2_{P_{i+1}N}}{2} & \frac{d^2_{P_iP_{i+1}}+d^2_{P_iS}-d^2_{P_{i+1}S}}{2} \\ \frac{d^2_{P_iP_{i+1}}+d^2_{P_iN}-d^2_{P_{i+1}N}}{2} & d^2_{P_iN} & \frac{d^2_{P_iN}+d^2_{P_iS}-x}{2} \\ \frac{d^2_{P_iP_{i+1}}+d^2_{P_iS}-d^2_{P_{i+1}S}}{2} & \frac{d^2_{P_iN}+d^2_{P_iS}-x}{2} & d^2_{P_iS} \end{vmatrix}
$$

$$
= -\frac{d^2_{P_iP_{i+1}}}{4}(x - v'_{i,i+1})(x - v''_{i,i+1}).
$$

Из предпоследней формулы видно, что $V_{i,i+1}$ — многочлен 2-й степени, а информация о корнях многочлена достаточно очевидна из геометрического смысла корней $0 \le v'_{i,i+1} < v''_{i,i+1}$ функции объема: при $x = v'_{i,i+1}$ и $x = v''_{i,i+1}$ треугольники $P_iP_{i+1}N$ и $P_iP_{i+1}S$ лежат в одной плоскости (рис. 3). $\square$

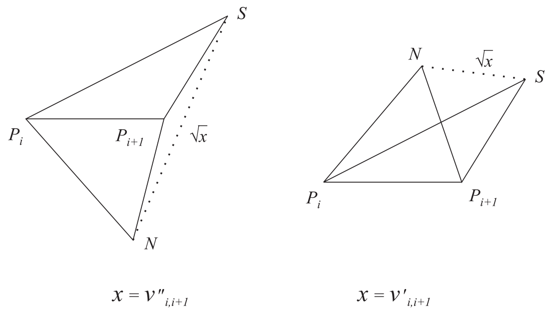


Рис. 3. Корни объема.

Введем обозначение $R_{i,i+1}$ (где так же, как и выше, $1 \le i \le k$, причем для $i = k$ будем $i+1$ заменять на 1) для следующих многочленов, которые нам понадобятся ниже:

$$
R_{i,i+1}(x) = \begin{vmatrix} \overline{NSNS} & \overline{NSNP_{i+1}} \\ \overline{NSNP_i} & \overline{NP_iNP_{i+1}} \end{vmatrix}
$$

$$
= -\frac{x^2}{4} + \frac{x}{2}(\overline{P_iNP_{i+1}N} + \overline{P_iSP_{i+1}S}) - \frac{d^2_{P_iN} - d^2_{P_iS}}{2}\,\frac{d^2_{P_{i+1}N} - d^2_{P_{i+1}S}}{2}, \ 1 \le i \le k-1,
$$

$$
R_{k,1}(x) = \begin{vmatrix} \overline{NSNS} & \overline{NSNP_1} \\ \overline{NSNP_k} & \overline{NP_kNP_1} \end{vmatrix}.
$$

Нашей ближайшей целью является вычисление зависимости от параметра $x$ длин диагоналей $P_1P_i$ и объемов $\langle \overline{P_1P_i}, \overline{P_1N}, \overline{P_1S} \rangle$ в предположении, что длины ребер многогранника известны. Ниже будут получены рекуррентные формулы.

Для удобства обозначим $y_i(x) = d^2_{P_1P_i}(x)$ и $W_i(x,y) = \langle \overline{P_1P_i}, \overline{P_1N}, \overline{P_1S} \rangle$.

Ясно, что $y_2 \equiv d^2_{P_1P_2}$, $W_2 \equiv \varepsilon_{12}\sqrt{V_{12}}$.

**Предложение 1.** *Для подвески в общем положении зависимость от параметра изгибания $x$ длин диагоналей $y_k$ и частичных объемов $W_k$ выражается следующими формулами.*

*Для $k = 2$ имеем $y_2 \equiv d^2_{P_1P_2}$, $W_2 \equiv \varepsilon_{12}\sqrt{V_{12}}$. При $k > 2$*

$$
y_k(x) = d^2_{P_{k-1}P_k} + \frac{y_{k-1}(x)}{S_{k-1}}R_{k-1,k}
$$

$$
+ \frac{2}{S_{k-1}} \left\{ \frac{d^2_{P_{k-1}N} - d^2_{P_1N}}{2} \begin{vmatrix} \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}N} \\ d^2_{P_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}S} \end{vmatrix} \right.
$$

$$-\frac{d^2_{P_{k-1}S}-d^2_{P_1S}}{2}\left|\begin{matrix}\dfrac{d^2_{P_{k-1}N}}{\overline{P_{k-1}NP_{k-1}S}} & \dfrac{\overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}N}}{\overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}S}}\end{matrix}\right|\Bigg\}+\frac{2}{S_{k-1}}W_{k-1}\varepsilon_{k-1,k}\sqrt{V_{k-1,k}},$$

$$W_k=\frac{1}{S_{k-1}}\left\{\left|\begin{matrix}\dfrac{x}{\overline{NSNP_{k-1}}} & \dfrac{\overline{NSNP_1}}{\frac{d^2_{P_1N}+d^2_{NP_{k-1}}-y_{k-1}}{2}}\end{matrix}\right|\varepsilon_{k-1,k}\sqrt{V_{k-1,k}}+R_{k-1,k}W_{k-1}\right\}.$$

*Здесь $x$ заключено в пределах от* $x_0=\max\limits_{1\le i\le k-1}v'_{i,i+1}$ *до* $x_1=\min\limits_{1\le i\le k-1}v''_{i,i+1}$.

Доказательство основано на применении следующих векторных формул:

$$(\overline{a},\overline{b})\overline{n}^2=([\overline{a}\times\overline{n}],[\overline{b}\times\overline{n}])+(\overline{a},\overline{n})(\overline{b},\overline{n});$$

$$\langle\overline{a},\overline{b},\overline{c}\rangle\Big|[\overline{a}\times\overline{n}]\Big|^2=([\overline{a}\times\overline{n}],[\overline{a}\times\overline{b}])\langle\overline{a},\overline{n},\overline{c}\rangle-([\overline{a}\times\overline{n}],[\overline{a}\times\overline{c}])\langle\overline{a},\overline{n},\overline{b}\rangle.$$

Эти формулы являются простым следствием общеизвестных формул

$$([\overline{a}\times\overline{b}],[\overline{c}\times\overline{d}])=\begin{vmatrix}\overline{ac} & \overline{ad}\\ \overline{bc} & \overline{bd}\end{vmatrix},\quad [\overline{a}\times[\overline{b}\times\overline{c}]]=\overline{b}(\overline{ac})-\overline{c}(\overline{ab}).$$

Действительно, первая формула получается из равенства

$$([\overline{a}\times\overline{n}],[\overline{b}\times\overline{n}])=\begin{vmatrix}\overline{ab} & \overline{an}\\ \overline{nb} & \overline{nn}\end{vmatrix}=(\overline{a},\overline{b})\overline{n}^2-(\overline{a},\overline{n})(\overline{b},\overline{n}).$$

Вторая формула — следствие предыдущей:

$$(\overline{a},[\overline{b}\times\overline{c}])|[\overline{a}\times\overline{n}]|^2=([\overline{a}\times[\overline{a}\times\overline{n}]],[\overline{b}\times\overline{c}]\times[\overline{a}\times\overline{n}])+(\overline{a},[\overline{a}\times\overline{n}])([\overline{b}\times\overline{c}],[\overline{a}\times\overline{n}])$$
$$=([\overline{a}\times[\overline{a}\times\overline{n}]],\overline{c}\langle\overline{a},\overline{n},\overline{b}\rangle-\overline{b}\langle\overline{a},\overline{n},\overline{c}\rangle)=([\overline{a}\times\overline{n}],[\overline{c}\times\overline{a}])\langle\overline{a},\overline{n},\overline{b}\rangle-([\overline{a}\times\overline{n}],[\overline{b}\times\overline{a}])\langle\overline{a},\overline{n},\overline{c}\rangle.$$

Далее,

$$\begin{aligned}
y_k(x)=d^2_{P_1P_k}&=\overline{P_1P_kP_1P_k}=(\overline{P_{k-1}P_k}-\overline{P_{k-1}P_1})^2\\
&=d^2_{P_1P_{k-1}}+d^2_{P_kP_{k-1}}-2(\overline{P_{k-1}P_k},\overline{P_{k-1}P_1})
\end{aligned}$$
$$=y_{k-1}(x)+d^2_{P_{k-1}P_k}-\frac{2}{[\overline{P_{k-1}N}\times\overline{P_{k-1}S}]^2}(\overline{P_{k-1}P_1},\overline{P_{k-1}P_k})[\overline{P_{k-1}N}\times\overline{P_{k-1}S}]^2$$
$$=y_{k-1}(x)+d^2_{P_{k-1}P_k}-\frac{2}{S_{k-1}}\{([\overline{P_{k-1}P_1}\times[\overline{P_{k-1}N}\times\overline{P_{k-1}S}]],[\overline{P_{k-1}P_k}\times[\overline{P_{k-1}N}\times\overline{P_{k-1}S}]])$$
$$+\langle\overline{P_{k-1}P_1},\overline{P_{k-1}N},\overline{P_{k-1}S}\rangle\langle\overline{P_{k-1}P_k},\overline{P_{k-1}N},\overline{P_{k-1}S}\rangle\}$$
$$=d^2_{P_{k-1}P_k}+y_{k-1}(x)-\frac{2}{S_{k-1}}\{(\overline{P_{k-1}N}(\overline{P_{k-1}P_1},\overline{P_{k-1}S})-\overline{P_{k-1}S}(\overline{P_{k-1}P_1},\overline{P_{k-1}N}),$$

$$\overline{P_{k-1}N}(\overline{P_{k-1}P_k},\overline{P_{k-1}S})-\overline{P_{k-1}S}(\overline{P_{k-1}P_k},\overline{P_{k-1}N}))$$
$$+\langle\overline{P_{k-1}P_1},\overline{P_1N},\overline{P_1S}\rangle\varepsilon_{k-1,k}\sqrt{V_{k-1,k}}\}$$
$$\begin{aligned}
=d^2_{P_{k-1}P_k}+y_{k-1}(x)-\frac{2}{S_{k-1}}\{&d^2_{P_{k-1}N}(\overline{P_{k-1}P_1},\overline{P_{k-1}S})(\overline{P_{k-1}P_k},\overline{P_{k-1}S})\\
&-(\overline{P_{k-1}N},\overline{P_{k-1}S})(\overline{P_{k-1}P_1},\overline{P_{k-1}S})(\overline{P_{k-1}P_k},\overline{P_{k-1}N})\\
&-(\overline{P_{k-1}N},\overline{P_{k-1}S})(\overline{P_{k-1}P_1},\overline{P_{k-1}N})(\overline{P_{k-1}P_k},\overline{P_{k-1}S})\\
&+d^2_{P_{k-1}S}(\overline{P_{k-1}P_1},\overline{P_{k-1}N})(\overline{P_{k-1}P_k},\overline{P_{k-1}N})
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&- \langle \overline{P_1P_{k-1}}, \overline{P_1N}, \overline{P_1S}\rangle \varepsilon_{k-1,k}\sqrt{V_{k-1,k}}\} = d^2_{P_{k-1}P_k} + y_{k-1}(x) \\
&+ \frac{2}{S_{k-1}}\left\{ \frac{d^2_{P_1P_{k-1}} + d^2_{P_{k-1}N} - d^2_{P_1N}}{2} \begin{vmatrix} \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}N} \\ d^2_{P_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}S} \end{vmatrix} \right. \\
&\left. - \frac{d^2_{P_1P_{k-1}} + d^2_{P_{k-1}S} - d^2_{P_1S}}{2} \begin{vmatrix} d^2_{P_{k-1}N} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}N} \\ \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}S} \end{vmatrix} \right\} \\
&+ \frac{2}{S_{k-1}} W_{k-1}\varepsilon_{k-1,k}\sqrt{V_{k-1,k}}.
\end{aligned}
$$

Чтобы получить требуемую формулу для $y_k(x)$, соберем вместе слагаемые, содержащие $y_{k-1}(x) = d^2_{P_1P_{k-1}}$, и преобразуем:

$$
\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} d^2_{P_{k-1}N} & \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} \\ \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & d^2_{P_{k-1}S} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}N} \\ d^2_{P_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}S} \end{vmatrix} \\
&\qquad - \begin{vmatrix} d^2_{P_{k-1}N} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}N} \\ \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}S} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} d^2_{P_{k-1}N} & \overline{P_{k-1}NP_kS} \\ \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}SP_kS} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}N} \\ d^2_{P_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}P_kP_{k-1}S} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} d^2_{P_{k-1}N} & \overline{P_{k-1}NP_kS} \\ \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}SP_kS} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}NSP_k} \\ d^2_{P_{k-1}S} & \overline{P_{k-1}SSP_k} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \overline{P_{k-1}NSN} & \overline{P_{k-1}NP_kS} \\ \overline{P_{k-1}SSN} & \overline{P_{k-1}SP_kS} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{P_{k-1}NSN} & \overline{P_{k-1}NP_kN} \\ \overline{P_{k-1}SSN} & \overline{P_{k-1}SP_kN} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \overline{P_{k-1}NSN} & \overline{P_{k-1}NP_kN} \\ \overline{NSSN} & \overline{NSP_kN} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \overline{NP_{k-1}NS} & \overline{NP_{k-1}NP_k} \\ -\overline{NSNS} & -\overline{NSNP_k} \end{vmatrix} \\
&= \begin{vmatrix} \overline{NSNS} & \overline{NSNP_k} \\ \overline{NSNP_{k-1}} & \overline{NP_{k-1}NP_k} \end{vmatrix} = R_{k-1,k}.
\end{aligned}
$$

Теперь получим формулу для обобщенного объема. Имеем

$$
\begin{aligned}
W_k &= \langle \overline{P_1P_k}, \overline{P_1N}, \overline{P_1S}\rangle = \langle \overline{NP_k}, \overline{P_1N}, \overline{NS}\rangle \\
&= \langle \overline{NS}, \overline{NP_1}, \overline{NP_k}\rangle = \frac{1}{S_{k-1}}\langle \overline{NS}, \overline{NP_1}, \overline{NP_k}\rangle [\overline{NS}\times\overline{NP_{k-1}}]^2 \\
&= \frac{1}{S_{k-1}}\{([\overline{NS}\times\overline{NP_{k-1}}], [\overline{NS}\times\overline{NP_1}])\langle \overline{NS}, \overline{NP_{k-1}}, \overline{NP_k}\rangle \\
&\qquad - ([\overline{NS}\times\overline{NP_{k-1}}], [\overline{NS}\times\overline{NP_k}])\langle \overline{NS}, \overline{NP_{k-1}}, \overline{NP_1}\rangle\} \\
&= \frac{1}{S_{k-1}}\left\{ \begin{vmatrix} \overline{NSNS} & \overline{NSNP_1} \\ \overline{NSNP_{k-1}} & \overline{NP_{k-1}NP_1} \end{vmatrix} \langle \overline{P_{k-1}S}, \overline{NP_{k-1}}, \overline{P_{k-1}P_k}\rangle \right. \\
&\qquad \left. - \begin{vmatrix} \overline{NSNS} & \overline{NSNP_k} \\ \overline{NSNP_{k-1}} & \overline{NP_{k-1}NP_k} \end{vmatrix} \langle \overline{P_1S}, \overline{P_1P_{k-1}}, \overline{NP_1}\rangle \right\} \\
&= \frac{1}{S_{k-1}}\left\{ \begin{vmatrix} x & \overline{NSNP_1} \\ \overline{NSNP_{k-1}} & \overline{NP_{k-1}NP_1} \end{vmatrix} \langle \overline{P_{k-1}P_k}, \overline{P_{k-1}N}, \overline{P_{k-1}S}\rangle \right. \\
&\qquad \left. + R_{k-1,k}\langle \overline{P_1P_{k-1}}, \overline{P_1N}, \overline{P_1S}\rangle \right\}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{1}{S_{k-1}}\left\{ \begin{vmatrix} x & \overline{NSNP_1} \\ \overline{NSNP_{k-1}} & \frac{d^2_{P_1N} + d^2_{NP_{k-1}} - y_{k-1}}{2} \end{vmatrix} \varepsilon_{k-1,k}\sqrt{V_{k-1,k}} + R_{k-1,k}W_{k-1} \right\}. \quad \square
$$

Итак, зависимость выражается алгебраическими функциями, причем в формулах отсутствует вложение квадратных корней. Это позволяет выяснить основные свойства функций.

**Теорема 1.** *Функция $y_k(x)$ является аналитической алгебраической функцией. Ее возможные точки ветвления — это корни многочленов $V_{i,i+1}$, возможные полюса — корни многочленов $S_{i,i+1}$. В бесконечно удаленной точке функция $y_k(x)$ имеет конечное значение.*

Доказательство. Рассмотрим случай $k = 3$. В соответствии с предложением 1 имеем

$$y_3(x) = d^2_{P_2P_3} + \frac{d^2_{P_1P_2}}{S_2}R_{23} + \frac{2}{S_2}\left\{\frac{d^2_{P_2N} - d^2_{P_1N}}{2}\begin{vmatrix} \overline{P_2NP_2S} & \overline{P_2P_3P_2N} \\ d^2_{P_2S} & \overline{P_2P_3P_2S}\end{vmatrix}\right.$$
$$\left. - \frac{d^2_{P_2S} - d^2_{P_1S}}{2}\begin{vmatrix} d^2_{P_2N} & \overline{P_2P_3P_2N} \\ \overline{P_2NP_2S} & \overline{P_2P_3P_2S}\end{vmatrix}\right\} + \frac{2}{S_2}\varepsilon_{12}\varepsilon_{23}\sqrt{V_{12}V_{23}},$$

$$W_3 = \frac{1}{S_2}\{R_{12}\varepsilon_{23}\sqrt{V_{23}} + R_{23}\varepsilon_{12}\sqrt{V_{12}}\}.$$

В соответствии с леммой 2 возможными точками ветвления являются корни многочленов $V_{12}$ и $V_{23}$. Из леммы 1 следует, что возможными полюсами являются корни многочленов $S_{12}$ и $S_{23}$.

Перейдем к рассмотрению бесконечно удаленной точки. Для этого исследуем степени многочленов в числителях и знаменателях всех слагаемых. В соответствии с леммами 1 и 2 заключаем, что многочлены $V_{i,i+1}$, $S_{i,i+1}$, $R_{i,i+1}$ являются квадратичными по $x$. Значит, второе и последнее слагаемые в выражении для $y_3(x)$ имеют вторую степень $x$ в числителе и знаменателе. В числителе третьего слагаемого $x$ участвует только в $\overline{P_2NP_2S} = \frac{d^2_{P_2N}+d^2_{P_2S}-x}{2}$, т. е. имеем первую степень по $x$. Таким образом, при $x \to \infty$ предел $y_3(x)$ будет конечным независимо от выбранного листа функции.

Заметим для дальнейшего, что при $x \to \infty$ функция $W_3(x, y(x))$ имеет $x$ не выше первой степени.

Итак, для $k = 3$ теорема верна. Теперь предположим, что теорема верна для некоторого $y_{k-1}(x)$, и докажем истинность для $y_k(x)$.

В силу предложения 1 и лемм 1, 2 в $y_k(x)$ могут добавиться к имеющимся в $y_{k-1}(x)$ точки ветвления при $x$, равном корням многочлена $V_{k-1,k}$, и полюса при $x$, равном корням многочлена $S_{k-1,k}$.

Исследуем слагаемые в выражении для $y_k(x)$ при $x \to \infty$. Для второго слагаемого в числителе и знаменателе есть $x$ во второй степени, так как предел $y_{k-1}(x)$ конечен. В числителе третьего слагаемого $x$ участвует только в $\overline{P_{k-1}NP_{k-1}S} = \frac{d^2_{P_{k-1}N}+d^2_{P_{k-1}S}-x}{2}$, т. е. имеем первую степень по $x$, в знаменателе $x$ участвует во второй степени, в итоге имеем нулевой предел в бесконечно удаленной точке. В числителе четвертого слагаемого, учитывая первую степень по $x$ функции $W_{k-1}(x, y(x))$, получаем вторую степень по $x$ так же, как и в знаменателе. Таким образом, при $x \to \infty$ предел $y_k(x)$ будет конечным независимо от выбранного листа функции.

Исследуем выражение $W_k(x, y(x))$ при $x \to \infty$. Так как предел $y_{k-1}(x)$ конечен, определитель в первом слагаемом имеет вторую степень по $x$. Поскольку $W_{k-1}$ имеет порядок $x$, получаем для $W_k$ такой же порядок. $\square$

Применим полученные формулы для доказательства неизгибаемости некоторого множества 1-параметрических многогранников.

Рассмотрим изгибания многогранников, полученных склейкой двух подвесок (рис. 4), т. е. будем считать, что при операции склейки дополнительно склеивается вершина $P'_m$ с вершиной $S$, ребро $SP_k$ с ребром $P'_mN'$ и ребро $SP_1$ с ребром $P'_mS'$. Заметим, что достаточно брать склеиваемые подвески порядка 4 или выше ($k, m \geq 4$), так как в противном случае склейка снова дает подвеску. Факт неизгибаемости вложенных подвесок известен (см. [5]).

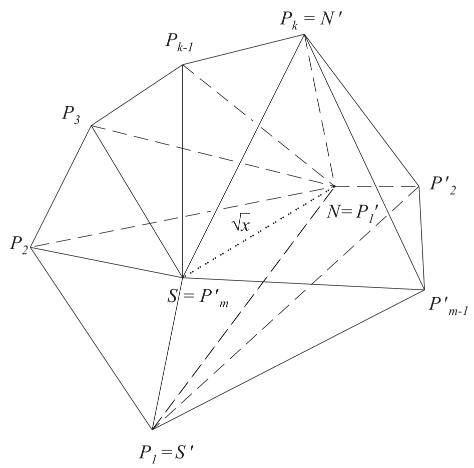


Рис. 4. Многогранник, полученный операцией склейки двух подвесок.

Сначала получим уравнение изгибаемости для таких многогранников (см. [4, 6]).

В качестве параметра изгибания будем использовать $x = d^2_{NS}$. Тогда на первом шаге обозначим $y = d^2_{P_1P_k}$ и с помощью предложения 1 получим зависимость $y = y(x)$. Далее, аналогичным образом рассмотрим вторую подвеску. Заметим, что для нее естественно использовать в качестве параметра изгибания $y = d^2_{N'S'} = d^2_{P_1P_k}$. Поэтому для второй подвески получим зависимость квадрата длины диагонали $P'_1P'_m$ от параметра изгибания $d^2_{P'_1P'_m}(y)$. Теперь заметим, что многогранник будет изгибаемым тогда и только тогда, когда $x = d^2_{P'_1P'_m}(y(x))$, т. е. функции $y = d^2_{P_1P_k}(x)$ и $x = d^2_{P'_1P'_m}(y)$ взаимно обратны.

В силу теоремы 1 можем считать, что это — взаимно обратные аналитические функции на единой римановой поверхности $M$.

Теперь рассмотрим зависимость объема от параметра изгибаний. Для второй подвески будем использовать обозначения, аналогичные введенным выше, добавляя к ним знак тильды:

$$\tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\sqrt{\widetilde{V}_{i,i+1}(y)} = \tilde{\varepsilon}_{i,i+1}\sqrt{36\widetilde{V}^2_{P'_iP'_{i+1}N'S'}(y)} = \langle \overline{P'_iP'_{i+1}}, \overline{P'_iN'}, \overline{P'_iS'} \rangle.$$

**Предложение 2.** *Обобщенный объем $V$ многогранника, полученного склейкой двух подвесок, равен*

$$V = \varepsilon_{12}\sqrt{V_{12}(x)} + \varepsilon_{23}\sqrt{V_{23}(x)} + \dots + \varepsilon_{k-1,k}\sqrt{V_{k-1,k}(x)}$$
$$- \tilde{\varepsilon}_{12}\sqrt{\widetilde{V}_{12}(y)} - \tilde{\varepsilon}_{23}\sqrt{\widetilde{V}_{23}(y)} - \dots - \tilde{\varepsilon}_{m-1,m}\sqrt{\widetilde{V}_{m-1,m}(y)} - W_k(x, y).$$

Доказательство. Выбрав за начало отсчета точку $P_1 = S'$, получим выражение для обобщенного объема (определение см. в [5]):

$$
\begin{aligned}
V = {} & \langle \overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}, \overline{P_1S} \rangle + \langle \overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_4}, \overline{P_1S} \rangle + \dots \\
& + \langle \overline{P_1P_{k-2}}, \overline{P_1P_{k-1}}, \overline{P_1S} \rangle + \langle \overline{P_1P_{k-1}}, \overline{P_1P_k}, \overline{P_1S} \rangle \\
& + \langle \overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_2}, \overline{P_1N} \rangle + \langle \overline{P_1P_4}, \overline{P_1P_3}, \overline{P_1N} \rangle + \dots \\
& + \langle \overline{P_1P_{k-1}}, \overline{P_1P_{k-2}}, \overline{P_1N} \rangle + \langle \overline{P_1P_k}, \overline{P_1P_{k-1}}, \overline{P_1N} \rangle \\
& + \langle \overline{S'P'_1}, \overline{S'P'_2}, \overline{S'N'} \rangle + \dots + \langle \overline{S'P'_{m-1}}, \overline{S'P'_m}, \overline{S'N'} \rangle \\
= {} & \langle \overline{P_1P_2}, \overline{P_1P_3}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{P_1P_3}, \overline{P_1P_4}, \overline{NS} \rangle + \dots \\
& + \langle \overline{P_1P_{k-2}}, \overline{P_1P_{k-1}}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{P_1P_{k-1}}, \overline{P_1P_k}, \overline{NS} \rangle \\
& - \langle \overline{P'_1P'_2}, \overline{P'_1N'}, \overline{P'_1S'} \rangle - \dots - \langle \overline{P'_{m-1}P'_m}, \overline{P'_{m-1}N'}, \overline{P'_{m-1}S'} \rangle \\
= {} & \langle (\overline{P_1S} + \overline{SP_2}), (\overline{P_1S} + \overline{SP_3}), \overline{NS} \rangle + \langle (\overline{P_1S} + \overline{SP_3}), (\overline{P_1S} + \overline{SP_4}), \overline{NS} \rangle + \dots \\
& + \langle (\overline{P_1S} + \overline{SP_{k-2}}), (\overline{P_1S} + \overline{SP_{k-1}}), \overline{NS} \rangle + \langle (\overline{P_1S} + \overline{SP_{k-1}}), (\overline{P_1S} + \overline{SP_k}), \overline{NS} \rangle \\
& - \tilde{\varepsilon}_{12} \sqrt{\widetilde{V}_{12}(y)} - \dots - \tilde{\varepsilon}_{m-1,m} \sqrt{\widetilde{V}_{m-1,m}(y)} \\
= {} & \langle \overline{P_1S}, \overline{SP_3}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_2}, \overline{P_1S}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_2}, \overline{SP_3}, \overline{NS} \rangle \\
& + \langle \overline{P_1S}, \overline{SP_4}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_3}, \overline{P_1S}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_3}, \overline{SP_4}, \overline{NS} \rangle + \dots \\
& + \langle \overline{P_1S}, \overline{SP_{k-1}}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_{k-2}}, \overline{P_1S}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_{k-2}}, \overline{SP_{k-1}}, \overline{NS} \rangle \\
& + \langle \overline{P_1S}, \overline{SP_k}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_{k-1}}, \overline{P_1S}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_{k-1}}, \overline{SP_k}, \overline{NS} \rangle \\
& - \tilde{\varepsilon}_{12} \sqrt{\widetilde{V}_{12}(y)} - \dots - \tilde{\varepsilon}_{m-1,m} \sqrt{\widetilde{V}_{m-1,m}(y)}.
\end{aligned}
$$

После приведения подобных слагаемых имеем

$$
\begin{aligned}
V = {} & \langle \overline{SP_2}, \overline{P_1S}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_2}, \overline{SP_3}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_3}, \overline{SP_4}, \overline{NS} \rangle + \dots \\
& + \langle \overline{SP_{k-2}}, \overline{SP_{k-1}}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{P_1S}, \overline{SP_k}, \overline{NS} \rangle + \langle \overline{SP_{k-1}}, \overline{SP_k}, \overline{NS} \rangle \\
& - \tilde{\varepsilon}_{12} \sqrt{\widetilde{V}_{12}(y)} - \dots - \tilde{\varepsilon}_{m-1,m} \sqrt{\widetilde{V}_{m-1,m}(y)} \\
= {} & \varepsilon_{12} \sqrt{V_{12}(x)} + \dots + \varepsilon_{k-1,k} \sqrt{V_{k-1,k}(x)} - W_k(x,y) \\
& - \tilde{\varepsilon}_{12} \sqrt{\widetilde{V}_{12}(y)} - \dots - \tilde{\varepsilon}_{m-1,m} \sqrt{\widetilde{V}_{m-1,m}(y)}. \quad \square
\end{aligned}
$$

В силу предложения 1 и теоремы 1 функции $y(x)$, $W(x, y)$, $x(y)$, $V$ в случае изгибаемых многогранников имеют одни и те же возможные точки ветвления — корни объемов $V_{i,i+1}(x)$, $\widetilde{V}_{j,j+1}(y)$. Их можно рассматривать как аналитические функции на римановой поверхности $M$.

Рассмотрим изменение этих функций при обходе по замкнутому контуру, содержащему все возможные точки ветвления внутри. Из формул предложения 1 нетрудно получить, что $y(x)$ не меняется при возвращении в начальную точку обхода (лист римановой поверхности не меняется), а функции $W(x, y(x))$ и $V(x, y)$ меняют знак. Действительно, для $y_2(x)$, $W_2$ это очевидно. Далее утверждение легко доказывается по индукции, исходя из вида рекуррентных формул.

С другой стороны, объем многогранника постоянен в силу теоремы Сабитова (см. [7]). Следовательно, объем равен нулю.

**Теорема.** *Обобщенный объем изгибаемого многогранника, полученного операцией склейки двух подвесок, равен* 0.

**Следствие.** *Вложенный многогранник, полученный склейкой двух подвесок, неизгибаем.*

Заметим, что эта теорема является обобщением известной теоремы Р. Коннелли (см. [5]), так как подвески можно рассматривать как частный случай склейки двух подвесок. Аналогичное утверждение для всего множества 1-параметрических многогранников неверно. Контрпримером является вложенный изгибаемый многогранник Штеффена, который может быть получен последовательностью из двух склеек.

В заключение автор выражает свою благодарность д. ф.-м. н., профессору И. Х. Сабитову за постоянное внимание и сотрудничество.

## *ЛИТЕРАТУРА*

**1.** *Максимов И. Г., Сабитов И. Х.* О понятии комбинаторной $p$-параметричности многогранников // Сиб. мат. журн. 2002. Т. 43, № 4. С. 823–839.

**2.** *Глюк Г.* Почти все односвязные замкнутые поверхности неизгибаемы // Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980. С. 148–163.

**3.** *Сабитов И. Х.* Алгоритмическая проверка изгибаемости подвесок // Укр. геометр. сб. 1987. Вып. 30. С. 109–112.

**4.** *Максимов И. Г.* Описание строения алгоритмически 1-параметрических многогранников и исследование их изгибаемости. М., 2008. 13 с. Деп. в ВИНИТИ РАН, 518-В 2008.

**5.** *Коннелли Р.* Об одном подходе к проблеме неизгибаемости // Исследования по метрической теории поверхностей. М.: Мир, 1980 С. 164–209.

**6.** *Максимов И. Г.* Неизгибаемые многогранники с малым числом вершин // Фунд. и прикл. математика. 2006. Т. 12, № 1. С. 143–165.

**7.** *Сабитов И. Х.* Объем многогранника как функция его метрики // Фунд. и прикл. математика. 1996. Т. 2, № 4. С. 1235–1246.

*Статья поступила 4 сентября 2009 г., окончательный вариант — 18 января 2010 г.*

Максимов Игорь Гаврилович
МИОМО, отдел программного и технического обеспечения,
бульвар Строителей, 1, Красногорск Московской обл.
igmaksimov@rambler.ru, igmaximov@mail.ru, maksimov@miomo.ru