Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2010. Том 51, № 6

УДК 517.987+519.216

МАРТИНГАЛЬНО–ЭРГОДИЧЕСКАЯ ТЕОРЕМА

И. В. Подвигин

Аннотация. Получено доказательство мартингально-эргодической теоремы Качуровского, унифицирующей эргодические теоремы и теоремы о сходимости мартингалов, без использовавшегося ранее дополнительного условия интегрируемости супремума процесса. Это условие заменено условием коммутируемости операторов условного ожидания и эргодического усреднения, эквивалентным для автоморфизмов условию инвариантности фильтрации; при этом унификация остается в силе.

Ключевые слова: эргодическое среднее, обращенный мартингал, измеримое разбиение пространства Лебега, естественное расширение эндоморфизма.

Введенные в $[1, 2]$ мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные процессы унифицируют (содержат как частные вырожденные случаи) обычные эргодические средние и регулярные мартингалы, прямые и обращенные. Для них доказаны теоремы сходимости п. в. и по норме: мартингально-эргодическая и эргодико-мартингальная теоремы. Однако при доказательстве сходимости п. в. использовалось условие интегрируемости супремума каждого из унифицируемых процессов, которого нет ни в теоремах о сходимости мартингалов, ни в индивидуальной эргодической теореме. Аргирис и Розенблатт показали в своей работе [3], что убрать это условие без дополнительных допущений нельзя. Оказывается, в случае, когда рассматриваемая фильтрация убывает (а пространство с мерой является пространством Лебега), достаточным для сходимости является предложенное А. Г. Качуровским условие коммутируемости операторов условного математического ожидания и операторов эргодического усреднения, т. е. условие инвариантности фильтрации. В этом случае эргодико-мартингальные процессы совпадают с мартингально-эргодическими, а унификация остается в силе.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ — вероятностное пространство, $\{\mathfrak{F}_s\}_{s\in S}$ — убывающее семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{F}$, т. е. убывающая фильтрация. В дискретном случае $S = \mathbb{N}$, в непрерывном — $S = \mathbb{R}^+$.

Для $f \in L_1(\Omega)$ будем рассматривать эргодические средние

$$A_n f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} \mathrm{T}^k f = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\circ\tau^k, \quad \mathscr{A}_t f = \frac{1}{t}\int_0^t \mathrm{T}_s f\,ds = \frac{1}{t}\int_0^t f\circ\tau_s\,ds,$$

где τ — автоморфизм или эндоморфизм, а τ_s — полупоток на $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$. Оператор условного математического ожидания будем обозначать через $\mathfrak{E}_s f = \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_s)$, $s \geq 0$. Не ограничивая общности, будем считать все σ-подалгебры $\mathfrak{F}_s$ полными, т. е. что мера λ, рассматриваемая на $\mathfrak{F}_s$, является полной (поскольку условные математические ожидания по σ-алгебре и по ее пополнению совпадают [4, гл. I, § 7]).

Мартингально-эргодическими и эргодико-мартингальными процессами называются процессы вида $\mathfrak{E}_n A_m f$ и $A_m \mathfrak{E}_n f$ в дискретном случае, $\mathfrak{E}_s \mathscr{A}_t f$ и $\mathscr{A}_t \mathfrak{E}_s f$ в случае непрерывного времени. Отметим, что в $[1, 2]$ эти процессы рассматривались и с возрастающей фильтрацией. Если τ — тождественный автоморфизм (τ_s — поток из тождественных автоморфизмов), то оба процесса вырождаются в обращенный мартингал; если же все $\mathfrak{F}_s$ совпадают с $\mathfrak{F}$, то получаются эргодические средние.

Для доказательства теоремы сходимости п. в. в случае дискретного времени нам будет необходимо обобщение принципа Банаха, полученное Данфордом и Миллером.

Пусть $TM(\Omega)$ — линейное метрическое пространство классов эквивалентности измеримых функций с метрикой

$$\rho(f, g) = \int\limits_{\Omega} \frac{|f - g|}{1 + |f - g|}\, d\lambda.$$

Лемма 1 [5, с. 542]. *Пусть $D_1 \supseteq D_2 \supseteq \cdots$ — счетные множества индексов и для каждого $\alpha \in D_1$ непрерывный оператор T_α действует из $L_1(\Omega)$ в $TM(\Omega)$. Пусть выполнены условия:*

(a) $\sup\limits_{\alpha \in D_1} |\mathrm{T}_\alpha f(\omega)| < \infty$ *при каждой $f \in L_1(\Omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$,*

(b) *для каждой f из плотного в $L_1(\Omega)$ множества*

$$\lim_{n \to \infty} \sup_{\alpha, \beta \in D_n} |\mathrm{T}_\alpha f(\omega) - \mathrm{T}_\beta f(\omega)| = 0 \quad \text{для п. в. } \omega \in \Omega. \tag{1}$$

Тогда равенство (1) *выполняется для всех $f \in L_1(\Omega)$.*

Пусть $\mathfrak{F}'$ — σ-подалгебра σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Определим условия, при которых возможна коммутируемость операторов T и $\mathfrak{E}(\cdot|\mathfrak{F}')$. Оказывается, для автоморфизмов справедлив следующий критерий.

Лемма 2. *Оператор $\mathfrak{E}(\cdot|\mathfrak{F}')$ и оператор T, порожденный автоморфизмом τ, действующие в $L_1(\Omega)$, коммутируют тогда и только тогда, когда $\tau^{-1}\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'$, т. е. когда τ — автоморфизм $(\Omega, \mathfrak{F}', \lambda)$.*

Доказательство леммы 2. Пусть $\mathrm{T}\mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}') = \mathfrak{E}(\mathrm{T}f|\mathfrak{F}')$ для любой функции $f \in L_1(\Omega)$. Тогда по определению оператора условного ожидания функция $g = \mathrm{T}\mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}')$ будет $\mathfrak{F}'$-измеримой для любой $f \in L_1(\Omega)$. Взяв $f = I_A$, $A \in \mathfrak{F}'$, получим $\mathfrak{F}'$-измеримость $g = \mathrm{T}I_A = I_{\tau^{-1}A}$, откуда следует, что $\tau^{-1}A \in \mathfrak{F}'$. Таким образом, получили включение $\tau^{-1}\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}'$, т. е. τ — эндоморфизм $(\Omega, \mathfrak{F}', \lambda)$.

Рассмотрим теперь операторы T и $\mathfrak{E}(\cdot|\mathfrak{F}')$, действующие в $L_2(\Omega)$. Тогда их сопряженные также будут коммутировать. Так как оператор условного ожидания самосопряжен, а T^* порождается автоморфизмом τ^{-1}, обратным к τ, аналогично предыдущим рассуждениям получим $\tau\mathfrak{F}' \subset \mathfrak{F}'$. Тем самым необходимость доказана.

Пусть теперь $\tau^{-1}\mathfrak{F}' = \mathfrak{F}'$. По определению оператора условного ожидания нужно показать, что функция $g = \mathrm{T}\mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}')$ $\mathfrak{F}'$-измерима и $\int\limits_A g\, d\lambda = \int\limits_A \mathrm{T}f\, d\lambda$ для любого $A \in \mathfrak{F}'$.

Измеримость следует из равенства $\{g < a\} = \tau^{-1}\{\mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}') < a\}$, $a \in \mathbb{R}$, а совпадение интегралов — из цепочки равенств

$$\int\limits_A g\,d\lambda = \int\limits_A \mathrm{T}\mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}')\,d\lambda = \int\limits_{\tau A} \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}')\,d\lambda = \int\limits_{\tau A} f\,d\lambda = \int\limits_A \mathrm{T}f\,d\lambda,$$

где $A \in \mathfrak{F}'$. $\square$

Теперь мы можем сформулировать и доказать теорему сходимости мартингально-эргодических процессов в важном случае атомических σ-алгебр $\mathfrak{F}_n$.

Напомним, что σ-алгебра называется *атомической*, если она порождена счетным числом непересекающихся ненулевых (по мере λ) множеств, называемых *атомами*.

Теорема 1. *Пусть τ — автоморфизм вероятностного пространства $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ и $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 1}$ — убывающая последовательность атомических σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда если $\mathrm{T}\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_n\mathrm{T}$ для любого n, то $A_m\mathfrak{E}_n f = \mathfrak{E}_n A_m f$ сходится п. в. при $n, m \to \infty$ для любой $f \in L_1(\Omega)$.*

Доказательство теоремы 1. Схема доказательства проста: сначала докажем конечность п. в. $\sup\limits_{n,m}|A_m\mathfrak{E}_n f|$, а затем воспользуемся леммой 1.

Без ограничения общности считаем, что $f \geq 0$. Пусть $\mathfrak{F}_1 = \sigma\{M_i, i \geq 1\}$, т. е. $\mathfrak{F}_1$ порождена атомами M_i, $i \geq 1$. Так как $\mathrm{T}\mathfrak{E}_1 = \mathfrak{E}_1\mathrm{T}$, из леммы 2 следует, что $\tau^{-1}\mathfrak{F}_1 = \mathfrak{F}_1$. Иными словами, τ сохраняет разбиение $\{M_i, i \geq 1\}$. Тогда множество атомов $\{M_i, i \geq 1\}$ распадается на счетное количество непересекающихся конечных множеств атомов $G_i = \{M_j,\ j \in P_i\}$ таких, что $\tau M_j \in G_i$, $j \in P_i$. После подходящей нумерации можно получить, что τ переставляет атомы $M_j \in G_i$ циклически: $\tau M_j = M_{j+1}$, $K_{i-1} < j < K_i$ и $\tau M_{K_i} = M_{K_{i-1}+1}$. Будем говорить, что атомы M_j *образуют τ-орбиту длины* $\operatorname{card} P_i = K_i - K_{i-1}$, $i > 1$. Такая же картина будет в каждой σ-алгебре $\mathfrak{F}_n$.

Всякая последующая σ-алгебра получается из предыдущей объединением ее атомов, а в конечном итоге — объединением атомов M_j. Пусть общее их количество в $\mathfrak{F}_n$ равно N_n; заметим, что N_n может быть бесконечностью. Пусть $\mathfrak{F}_n = \sigma\{B_{n,j},\ 1 \leq j \leq N_n,\ n \geq 1\}$, а $\mathfrak{J} = \sigma\{A \in \mathfrak{F},\ \tau^{-1}A = A\}$ — σ-алгебра инвариантных относительно τ множеств. Покажем, что найдется п. в. конечная τ-инвариантная (соответственно $\mathfrak{J}$-измеримая) функция G такая, что

$$\mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n) \leq G \cdot \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J}). \tag{2}$$

Если мы это покажем, то

$$A_m\mathfrak{E}_n f \leq A_m(G \cdot \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J})) = G \cdot \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J}).$$

Так как $\mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J})$ — обращенный мартингал, сходящийся п. в., супремум правой части последнего неравенства конечен п. в.; следовательно, и $\sup\limits_{n,m} A_m\mathfrak{E}_n f$ будет конечен п. в.

Итак, ясно, что

$$\mathfrak{E}_n f = \sum_{i=1}^{N_n} c_{n,i} I_{B_{n,i}}, \quad \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J}) = \sum_{j=1}^{N'_n} c'_{n,j} I_{B'_{n,j}},$$

где

$$c_{n,i} = \frac{1}{\lambda\{B_{n,i}\}} \int\limits_{B_{n,i}} f\,d\lambda, \quad c'_{n,j} = \frac{1}{\lambda\{B'_{n,j}\}} \int\limits_{B'_{n,j}} f\,d\lambda.$$

Кроме того, атомы $B'_{n,j}$ σ-алгебры $\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J}$ суть τ-орбиты, состоящие из атомов $B_{n,i}$ σ-алгебры $\mathfrak{F}_n$. Поэтому если $B_{n,i} \subset B'_{n,j}$, то сумма по таким атомам

$$\sum_i c_{n,i} I_{B_{n,i}} \leq k_j c'_{n,j} I_{B'_{n,j}} = \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J}) \cdot k_j I_{B'_{n,j}},$$

где k_j — длина τ-орбиты $B'_{n,j}$.

Суммируя по τ-орбитам в формуле для $\mathfrak{E}_n f$, получим цепочку неравенств

$$\mathfrak{E}_n f = \sum_{i=1}^{N_n} c_{n,i} I_{B_{n,i}} \leq \sum_{j=1}^{N'_n} k_j c'_{n,j} I_{B'_{n,j}} = \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J}) \cdot \sum_{j=1}^{N'_n} k_j I_{B'_{n,j}}.$$

Пусть

$$G_n = \sum_{j=1}^{N'_n} k_j I_{B'_{n,j}}.$$

Ясно, что G_n — τ-инвариантная функция и $G_{n+1} \leq G_n$; тогда возьмем $G = G_1$, и неравенство (2) доказано.

Пусть $D_n = \{(i,j), n \leq i, j\}$ и $\mathrm{T}_{i,j} = A_i \mathfrak{E}_j$. Оператор $\mathrm{T}_{i,j}$ действует из $L_1(\Omega)$ в $L_1(\Omega) \subseteq TM(\Omega)$ и непрерывен. Кроме того, было показано, что $\sup\limits_{i,j} |\mathrm{T}_{i,j} f(\omega)| < \infty$ для любой $f \in L_1(\Omega)$ для п. в. $\omega \in \Omega$. Таким образом, п. (a) леммы 1 выполнен. Покажем, что выполняется и п. (b).

Для $f \in L_p(\Omega)$, $p > 1$ сходимость $\mathrm{T}_{i,j} f$ к некоторой функции f^* следует из [2]. Тогда

$$\begin{aligned} 0 &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{(i_1,j_1),(i_2,j_2)\in D_n} |\mathrm{T}_{i_1,j_1} f(\omega) - \mathrm{T}_{i_2,j_2} f(\omega)| \\ &\leq \lim_{n\to\infty} \sup_{(i_1,j_1)\in D_n} |\mathrm{T}_{i_1,j_1} f(\omega) - f^*(\omega)| + \lim_{n\to\infty} \sup_{(i_2,j_2)\in D_n} |\mathrm{T}_{i_2,j_2} f(\omega) - f^*(\omega)| \\ &= 2 \lim_{n\to\infty} \sup_{i,j\geq n} |\mathrm{T}_{i,j} f(\omega) - f^*(\omega)| = 0. \end{aligned}$$

По лемме 1 равенство (1) выполнено для каждой $f \in L_1(\Omega)$. Это означает, что для п. в. $\omega \in \Omega$ обобщенная последовательность $\mathrm{T}_{i,j} f(\omega)$ фундаментальна и, следовательно, сходится. $\square$

Естественное обобщение предыдущего результата должно быть связано с σ-алгебрами, удовлетворяющими какому-нибудь подходящему условию сепарабельности. Достаточно широким классом таких σ-алгебр являются полные σ-подалгебры пространства Лебега. Ключевым здесь выступает существование естественного взаимно однозначного соответствия таких подалгебр с измеримыми разбиениями этого пространства.

Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ — пространство Лебега и $\mathfrak{F}_n$ — полные (как уже отмечалось, мы можем без ограничения общности это предполагать) σ-подалгебры σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда, как известно [6], найдется убывающая последовательность ζ_n измеримых разбиений таких, что $\mathfrak{F}_n$ состоит из всех измеримых ζ_n-множеств, в частности, каждый элемент этого разбиения принадлежит $\mathfrak{F}_n$. Пусть ζ'_n — разбиение, состоящее из всех ненулевых (по мере λ) элементов разбиения ζ_n и оставшегося дополнительного до Ω множества, если оно ненулевое. Это разбиение играет такую же роль, как и разбиение на атомы в атомическом случае. Сформулируем теперь основной результат для автоморфизмов.

Теорема 2. *Пусть τ — автоморфизм пространства Лебега $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ и $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 1}$ — убывающая последовательность σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда если $\mathrm{T}\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_n\mathrm{T}$ для любого n, то $A_m\mathfrak{E}_n f = \mathfrak{E}_n A_m f$ сходится п. в. при $n, m \to \infty$ для любой $f \in L_1(\Omega)$.*

Доказательство теоремы 2. Как и в теореме 1, достаточно доказать конечность супремума $\sup\limits_{n,m} |A_m\mathfrak{E}_n f|$. Будем считать, что $f \geq 0$. Положим

$$f_n = \sum_{i=1}^{N_n} c_{n,i} I_{B_{n,i}} + f I_{B_{n,N_n+1}},$$

где $c_{n,i} = \frac{1}{\lambda\{B_{n,i}\}} \int\limits_{B_{n,i}} f\, d\lambda$, а $B_{n,i}$ — элементы разбиения ζ'_n, причем B_{n,N_n+1} есть объединение всех нулевых элементов разбиения ζ_n. Покажем, что $\mathfrak{E}_n f = f_n$. Если это будет сделано, то, используя неравенство, аналогичное неравенству (2), получим

$$\mathfrak{E}_n f = \sum_{i=1}^{N_n} c_{n,i} I_{B_{n,i}} + f I_{B_{n,N_n+1}} \leq G \cdot \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J})) I_{\Omega \setminus B_{n,N_n+1}} + f I_{B_{n,N_n+1}},$$

$$A_m\mathfrak{E}_n f \leq G \cdot \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J})) I_{\Omega \setminus B_{n,N_n+1}} + A_m f I_{B_{n,N_n+1}}.$$

Поэтому конечность $\sup\limits_{n,m} A_m\mathfrak{E}_n f$ следует из конечности $\sup\limits_{m} A_m f$ и $\sup\limits_{n} \mathfrak{E}(f|\mathfrak{F}_n \cap \mathfrak{J})$.

Итак, нужно показать, что f_n $\mathfrak{F}_n$-измерима и $\int\limits_A f_n\, d\lambda = \int\limits_A f\, d\lambda$ для любого $A \in \mathfrak{F}_n$. Равенство интегралов легко проверяется, поэтому достаточно доказать $\mathfrak{F}_n$-измеримость функции $f I_{B_{n,N_n+1}}$. Она ввиду полноты $\mathfrak{F}_n$ следует из того, что каждое измеримое подмножество множества B_{n,N_n+1} является ζ_n-множеством и, следовательно, $\mathfrak{F}_n$-измеримо. $\square$

Полученный результат для автоморфизмов можно распространить на эндоморфизмы. Для этого достаточно воспользоваться понятием естественного расширения эндоморфизма [7]. Опишем необходимую конструкцию.

Пусть τ — эндоморфизм пространства Лебега $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$. Построим по нему автоморфизм τ' пространства Лебега $(\Omega', \mathfrak{F}', \lambda')$, где

$$\Omega' = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid \omega_n \in \Omega, \tau\omega_{n+1} = \omega_n\};$$

σ-алгебра $\mathfrak{F}'$ порождена множествами $X'_n = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid \omega_n \in X \in \mathfrak{F}\}$, $n \geq 1$; на порождающем семействе мера $\lambda'\{X'_n\}$ совпадает с $\lambda\{X\}$ и продолжается до меры Лебега на все $(\Omega', \mathfrak{F}', \lambda')$. Наконец,

$$\tau'(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) = (\tau\omega_1, \tau\omega_2, \tau\omega_3, \dots) = (\tau\omega_1, \omega_1, \omega_2, \dots).$$

Автоморфизм τ' и есть естественное расширение эндоморфизма τ.

Рассмотрим убывающую последовательность σ-подалгебр $\mathfrak{F}'_n$ σ-алгебры $\mathfrak{F}'$, где $\mathfrak{F}'_n$ строится аналогично $\mathfrak{F}'$, а именно $\mathfrak{F}'_n$ порождается множествами

$$X'_m = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid \omega_m \in X \in \mathfrak{F}_n\}, \quad m \geq 1.$$

Пусть автоморфизм τ'_n, действующий на пространстве $(\Omega', \mathfrak{F}'_n, \lambda')$, есть естественное расширение эндоморфизма τ пространства $(\Omega, \mathfrak{F}_n, \lambda)$ (по лемме 2 из условия $\mathrm{T}\mathfrak{E}_n f = \mathfrak{E}_n\mathrm{T} f$ следует, что τ является эндоморфизмом $(\Omega, \mathfrak{F}_n, \lambda)$). Из определения естественного расширения ясно, что автоморфизм τ'_n есть сужение автоморфизма τ' на $(\Omega', \mathfrak{F}'_n, \lambda')$. По той же лемме 2 отсюда вытекает, что $\mathrm{T}'\mathfrak{E}'_n f' = \mathfrak{E}'_n \mathrm{T}' f'$ (здесь $\mathfrak{E}'_n = \mathfrak{E}(\cdot|\mathfrak{F}'_n)$). Тогда по уже доказанной теореме 2 для любой $f' \in L_1(\Omega')$ есть сходимость λ'-п. в. для $A_m(\mathrm{T}')\mathfrak{E}'_n f'$ при $n, m \to \infty$. Используя этот факт для специальных функций, мы можем доказать основной результат для эндоморфизмов.

Теорема 3. *Пусть τ — эндоморфизм пространства Лебега $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ и $\{\mathfrak{F}_n\}_{n\geq 1}$ — убывающая последовательность σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{F}$. Тогда если $\mathrm{T}\mathfrak{E}_n = \mathfrak{E}_n \mathrm{T}$ для любого n, то $A_m \mathfrak{E}_n f = \mathfrak{E}_n A_m f$ сходится п. в. при $n, m \to \infty$ для любой $f \in L_1(\Omega)$.*

Для доказательства нам понадобится одна техническая

Лемма 3. *Пусть $g \in L_1(\Omega)$ и $B \in \mathfrak{F}$. Тогда для любого $k \geq 1$ верно равенство*

$$\int\limits_{\Omega'} g(\omega_1) I_B(\omega_k)\, d\lambda' = \int\limits_B \mathrm{T}^{k-1} g\, d\lambda.$$

Доказательство. Пусть $g = I_A$, $A \in \mathfrak{F}$, тогда

$$\int\limits_{\Omega'} I_A(\omega_1) I_B(\omega_k)\, d\lambda' = \lambda'\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid \omega_1 \in A, \omega_k \in B\}$$

$$= \lambda'\{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) \mid \omega_k \in \tau^{-k+1} A, \omega_k \in B\} = \lambda\{\tau^{-k+1} A \cap B\}$$

$$= \int\limits_B I_{\tau^{-k+1} A}\, d\lambda = \int\limits_B \mathrm{T}^{k-1} I_A\, d\lambda.$$

Ввиду линейности интеграла и оператора T^{k-1} утверждение верно для простых функций, а по теореме о мажорируемой сходимости — и для всех $g \in L_1(\Omega)$. $\square$

Доказательство теоремы 3. Возьмем $f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) = f(\omega_1)$, тогда из леммы 3 (при $g = f$, $B = \Omega$, $k = 1$) следует, что

$$\int\limits_{\Omega'} f'\, d\lambda' = \int\limits_{\Omega} f\, d\lambda.$$

Покажем, что для такой функции

$$A_m(\mathrm{T}')\mathfrak{E}'_n f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) = A_m(\mathrm{T})\mathfrak{E}_n f(\omega_1).$$

Тогда из того, что левая часть этого равенства сходится λ'-п. в., следует, что и правая будет сходиться λ-п. в. Достаточно показать по отдельности, что

$$A_m(\mathrm{T}') f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) = A_m(\mathrm{T}) f(\omega_1)$$

и

$$\mathfrak{E}'_n f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) = \mathfrak{E}_n f(\omega_1).$$

Первое следует из равенства

$$\mathrm{T}' f'(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \dots) = f'(\tau\omega_1, \omega_1, \omega_2, \dots) = f(\tau\omega_1) = \mathrm{T} f(\omega_1).$$

Для второго нужно показать $\mathfrak{F}'_n$-измеримость функции $\mathfrak{E}_n f(\omega_1)$ и равенство интегралов

$$\int\limits_{B'} f'\, d\lambda' = \int\limits_{B'} \mathfrak{E}_n f(\omega_1)\, d\lambda', \quad B' \in \mathfrak{F}'_n.$$

Измеримость очевидна. Равенство интегралов достаточно доказать для множеств из порождающего $\mathfrak{F}'_n$ семейства.

Пусть $k \geq 1$ и $B \in \mathfrak{F}_n$, тогда по лемме 3

$$\int\limits_{\{\omega_k \in B\}} f'\,d\lambda' = \int\limits_B \mathrm{T}^{k-1} f\,d\lambda$$
$$= \int\limits_B \mathfrak{E}_n \mathrm{T}^{k-1} f\,d\lambda = \int\limits_B \mathrm{T}^{k-1}\mathfrak{E}_n f\,d\lambda = \int\limits_{\{\omega_k \in B\}} \mathfrak{E}_n f(\omega_1)\,d\lambda'. \quad \square$$

Теорема 3 остается справедливой, если дискретную фильтрацию $\mathfrak{F}_n$ заменить непрерывной $\mathfrak{F}_s$, что следует из сепарабельности процесса $A_m\mathfrak{E}_s f = \mathfrak{E}_s A_m f$ [4]. Это замечание позволяет сделать переход на непрерывное время и по параметру m.

Случай непрерывного времени легко выводится из предыдущего применением техники Данфорда — Шварца [8, с. 151].

Теорема 4. *Пусть $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ — пространство Лебега, $\{\mathfrak{F}_s\}_{s\geq 0}$ — убывающее семейство σ-подалгебр σ-алгебры $\mathfrak{F}$ и $\{\tau_t, t \geq 0\}$ — полупоток на $(\Omega, \mathfrak{F}, \lambda)$ такой, что $\mathrm{T}_t\mathfrak{E}_s = \mathfrak{E}_s\mathrm{T}_t$, $t, s \geq 0$. Тогда $\mathscr{A}_t\mathfrak{E}_s f = \mathfrak{E}_s\mathscr{A}_t f$ сходится п. в. при $t, s \to \infty$ для любой $f \in L_1(\Omega)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что

$$\frac{\mathrm{T}_1^n\mathfrak{E}_s f}{n} = \frac{n+1}{n}A_{n+1}(\mathrm{T}_1)\mathfrak{E}_s f - A_n(\mathrm{T}_1)\mathfrak{E}_s f \to 0 \quad \text{при } s, n \to \infty. \tag{3}$$

Пусть $n = [t]$, тогда $t = n + r$, $0 \leq r < 1$. Для любых $t > 0$ и $s \geq 0$ получаем

$$\mathscr{A}_t\mathfrak{E}_s f = \frac{1}{t}\int\limits_0^t \mathrm{T}_\tau\mathfrak{E}_s f\,d\tau = \frac{1}{t}\int\limits_0^n \mathrm{T}_\tau\mathfrak{E}_s f\,d\tau + \frac{1}{t}\int\limits_n^{n+r} \mathrm{T}_\tau\mathfrak{E}_s f\,d\tau$$
$$= \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_k^{k+1} \mathrm{T}_\tau\mathfrak{E}_s f\,d\tau + \frac{1}{t}\int\limits_n^{n+r} \mathrm{T}_\tau\mathfrak{E}_s f\,d\tau = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{n-1}\int\limits_0^1 \mathrm{T}_{\tau+k}\mathfrak{E}_s f\,d\tau + \frac{1}{t}\int\limits_0^r \mathrm{T}_{\tau+n}\mathfrak{E}_s f\,d\tau$$
$$= \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{T}_k\int\limits_0^1 \mathrm{T}_\tau\mathfrak{E}_s f\,d\tau + \frac{1}{t}\mathrm{T}_n\int\limits_0^r \mathrm{T}_\tau\mathfrak{E}_s f\,d\tau = \frac{1}{t}\sum_{k=0}^{n-1}\mathrm{T}_1^k\mathfrak{E}_s(\mathscr{A}_1 f) + \frac{r}{t}\mathrm{T}_1^n\mathscr{A}_r\mathfrak{E}_s f$$
$$= \frac{n}{t}\left[A_n(\mathrm{T}_1)\mathfrak{E}_s g_1 + \frac{r}{n}\mathrm{T}_1^n\mathscr{A}_r\mathfrak{E}_s f\right],$$

где $g_1 = \mathscr{A}_1 f$. Первое слагаемое последнего равенства сходится п. в. при $t, s \to \infty$, а второе $\frac{r}{n}\mathrm{T}_1^n\mathscr{A}_r\mathfrak{E}_s f \leq \frac{1}{n}\mathrm{T}_1^n\mathfrak{E}_s g_2$, где $g_2 = \mathscr{A}_1|f|$, — п. в. к нулю по (3). $\square$

Отметим, что в отличие от работы [9] выбора представителей из класса совпадающих п. в. с $\mathscr{A}_t\mathfrak{E}_s f$ функций здесь не происходит (исключая замечания о сепарабельности $\mathfrak{E}_s A_m f$). Коммутируемость потока с семейством операторов условного ожидания нивелирует различия между представителями, сохраняя свойство сходимости для каждого из них.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Качуровский А. Г.* Мартингально-эргодическая теорема // Мат. заметки. 1998. Т. 64, № 2. С. 311–314.

2. *Качуровский А. Г.* Единые теории, унифицирующие эргодические средние и мартингалы // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2007. Т. 256. С. 172–200.

3. *Argiris G., Rosenblatt J. M.* Forcing divergence when the supremum is not integrable // Positivity. 2006. V. 10, N 2. P. 261–284.

4. *Дуб Дж. Л.* Вероятностные процессы. И.: Изд-во иностр. лит., 1956.

5. *Dunford N., Miller D. S.* On the ergodic theorem // Trans. Amer. Math. Soc. 1946. V. 60. P. 538–549.

6. *Рохлин В. А.* Об основных понятиях теории меры // Мат. сб. 1949. Т. 25, № 1. С. 107–150.

7. *Рохлин В. А.* Точные эндоморфизмы пространства Лебега // Изв. АН СССР. Сер. мат. 1961. Т. 25, № 4. С. 499–530.

8. *Dunford N., Schwartz J. T.* Convergence almost everywhere of operator averages // J. Rational Mech. Anal. 1956. V. 5, N 1. P. 129–178.

9. *Подвигин И. В.* Мартингально-эргодические и эргодико-мартингальные процессы с непрерывным временем // Мат. сб. 2009. Т. 200, № 5. С. 55–70.

Статья поступила 9 сентября 2009 г.

Подвигин Иван Викторович
Новосибирский гос. университет, физический факультет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
ivan_podvigin@ngs.ru