*Сибирский математический журнал*
*Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1*

*УДК 517.977*

# РЕЛАКСАЦИЯ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ СИСТЕМОЙ ГУРСА — ДАРБУ

**Н. И. Погодаев**

**Аннотация.** Рассматривается задача оптимального управления для системы, описываемой уравнением Гурса — Дарбу. Система управляется с помощью распределенного и граничных управлений, подчиненных невыпуклым смешанным ограничениям. Для данной задачи доказан аналог классической теоремы Н. Н. Боголюбова о релаксации.

**Ключевые слова:** непрерывный селектор, граничные и распределенные управления, релаксация, расширение.

## 1. Постановка задачи

В своей работе 1930 г. [1] Н. Н. Боголюбов доказал теорему о релаксации для простейшей задачи классического вариационного исчисления. В дальнейшем эту теорему обобщали в различных направлениях многие авторы, среди которых можно отметить А. Д. Иоффе и В. М. Тихомирова [2], И. Экланда и Р. Темама [3], А. А. Толстоногова [4] и др. В данной статье мы доказываем аналог теоремы Боголюбова для следующей задачи.

Пусть $a, b > 0$, $x \in I_1 = [0, a]$, $y \in I_2 = [0, b]$, $\Omega = I_1 \times I_2$, $z, u^1, u^2 \in X = \mathbb{R}^N$, $u \in Y = \mathbb{R}^M$. Рассмотрим задачу минимизации функционала

$$J(z, u, u^1, u^2) = \int\limits_{\Omega} g(x, y, z(x, y), u(x, y))\, dxdy + \int\limits_{I_1} g_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x), u^1(x))\, dx + \int\limits_{I_2} g_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y), u^2(y))\, dy \quad (1)$$

на множестве решений управляемой системы Гурса — Дарбу

$$z_{xy} = c_1(x, y, z)z_x + c_2(x, y, z)z_y + c_3(x, y, z)u + c_4(x, y, z), \quad (2)$$

$$z(x, 0) = \varphi_1(x) + \int\limits_0^x u^1(s)\, ds, \quad z(0, y) = \varphi_2(y) + \int\limits_0^y u^2(t)\, dt, \quad (3)$$

$$u(x, y) \in U(x, y, z(x, y)), \quad u^1(x) \in U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)), \quad u^2(y) \in U_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)), \quad (4)$$

где $c_1, c_2 : \Omega \times X \to \mathscr{L}(X; X)$, $c_3 : \Omega \times X \to \mathscr{L}(Y; X)$, $c_4 : \Omega \times X \to X$, $g : \Omega \times X \times Y \to \mathbb{R}$, $g_i : I_i \times X \times X \to \mathbb{R}$, $i = 1, 2$, — заданные функции, $U : \Omega \times X \to Y$, $U_i : I_i \times X \to X$, $i = 1, 2$, — многозначные отображения с замкнутыми

Работа выполнена при поддержке СО РАН (интеграционный проект СО РАН — УрО РАН № 85).

ограниченными значениями, $\mathscr{V}_i : C(\Omega; X) \to C(I_i; X)$, $i = 1, 2$, — непрерывные операторы, $\varphi_i : I_i \to X$, $i = 1, 2$, — абсолютно непрерывные функции и $\varphi_1(0) = \varphi_2(0)$. Здесь $\mathscr{L}(X; Y)$ — пространство линейных операторов (матриц) из $Y$ в $X$, $C(\Omega; X)$ — пространство непрерывных функций из $\Omega$ в $X$.

Обобщенное решение уравнения Гурса — Дарбу, как правило, ищут в пространстве абсолютно непрерывных функций двух переменных $AC^p(\Omega; X)$ $(1 < p < \infty)$. Это пространство состоит из непрерывных функций $z : \Omega \to X$, для которых имеет место представление

$$z(x,y) = z(0,0) + \int\limits_0^x v^1(s)\,ds + \int\limits_0^y v^2(t)\,dt + \int\limits_0^x \int\limits_0^y v(s,t)\,dtds,$$

$$v \in L^p(\Omega; X), \quad v^1 \in L^p(I_1; X), \quad v^2 \in L^p(I_2; X).$$

Известно, что если $z \in AC^p(\Omega; X)$, то существуют производные $z_x$, $z_y$, $z_{xy}$ и п. в. на $\Omega$

$$z_x(x,y) = v^1(x) + \int\limits_0^y v(x,t)\,dt, \quad z_y(x,y) = v^2(y) + \int\limits_0^x v(s,y)\,ds, \quad z_{xy}(x,y) = v(x,y).$$

Поэтому естественным будет следующее

Определение 1.1. Под *решением* системы (2)–(4) будем понимать четверку $(z, u, u^1, u^2)$, $z \in AC^p(\Omega; X)$, $u \in L^p(\Omega; Y)$, $u^1 \in L^p(I_1; X)$, $u^2 \in L^p(I_2; X)$ такую, что для всех $(x, y) \in \Omega$

$$z(x,y) = \varphi(x) + \psi(y) - \varphi(0) + \int\limits_0^x u^1(s)\,ds + \int\limits_0^y u^2(t)\,dt + \int\limits_0^x \int\limits_0^y v(s,t)\,dsdt,$$

где

$$\begin{aligned} v(x,y) = c_1(x,y,z(x,y))z_x(x,y) + c_2(x,y,z(x,y))z_y(x,y) \\ + c_3(x,y,z(x,y))u(x,y) + c_4(x,y,z(x,y)) \end{aligned}$$

и почти всюду имеют место включения (4).

Обозначим через $\mathscr{R}$ множество решений системы (2)–(4) и запишем задачу (1)–(4) в виде

$$\inf_{r \in \mathscr{R}} J(r). \tag{P}$$

Рассмотрим так называемую релаксированную задачу: минимизировать интегральный функционал

$$\begin{aligned} J^{**}(z,u,u^1,u^2) = \int\limits_\Omega g^{**}(x,y,z(x,y),u(x,y))\,dxdy \\ + \int\limits_{I_1} g_1^{**}(x,\mathscr{V}_1(z)(x),u^1(x))\,dx + + \int\limits_{I_2} g_2^{**}(y,\mathscr{V}_2(z)(y),u^2(y))\,dy \end{aligned}$$

на множестве решений управляемой системы (2), (3) с ограничениями на управления

$$\begin{gathered} u(x,y) \in \operatorname{co} U(x,y,z(x,y)), \quad u^1(x) \in \operatorname{co} U_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x)), \\ u^2(y) \in \operatorname{co} U_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y)). \end{gathered} \tag{5}$$

Здесь через $\operatorname{co} E$ обозначена выпуклая оболочка множества $E$, а через $g^{**}$ — биполяра [3] функции $u \mapsto g_U(x,y,z,u)$, определенной равенством

$$g_U(x,y,z,u) = \begin{cases} g(x,y,z,u), & \text{если } u \in U(x,y,z), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Аналогично $g_1^{**}$ и $g_2^{**}$ — биполяры функций $v \mapsto g_{U_1}(x,z,v)$ и $v \mapsto g_{U_2}(y,z,v)$, заданных формулами

$$g_{U_1}(x,z,v) = \begin{cases} g_1(x,z,v), & \text{если } v \in U_1(x,z), \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

$$g_{U_2}(y,z,v) = \begin{cases} g_2(y,z,v), & \text{если } v \in U_2(y,z), \\ +\infty & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Обозначим через $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ множество решений системы (2), (3), (5) и запишем релаксированную задачу в виде

$$\inf_{r \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}} J^{**}(r). \tag{RP}$$

Введем еще ряд обозначений и определений. Пусть $Z$, $V$ — сепарабельные банаховы пространства, $T$ — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, $\Sigma$ — $\sigma$-алгебра борелевских множеств на $T$.

Если $A, B \subset V$ — замкнутые ограниченные множества, то $\operatorname{dist}(x, A)$ — расстояние от точки $x \in V$ до множества $A$, $\operatorname{Dist}(A, B)$ — метрика Хаусдорфа.

Многозначное отображение $F : Z \to V$, значениями которого являются замкнутые ограниченные подмножества пространства $V$, называют *непрерывным по Хаусдорфу*, если оно непрерывно в метрике Хаусдорфа.

Многозначное отображение $F : T \to V$ называют *измеримым*, если $\{t \in T \mid F(t) \cap \mathscr{C} \neq \varnothing\} \in \Sigma$ для любого замкнутого $\mathscr{C} \subset V$.

Многозначное отображение $F : T \times Z \to V$ с замкнутыми ограниченными значениями называют *отображением Каратеодори*, если $t \mapsto F(t, z)$ измеримо для всех $z \in Z$ и $z \mapsto F(t, z)$ непрерывно по Хаусдорфу для п. в. $t \in T$.

Через $L^p_w(T; V)$ обозначим пространство $L^p(T; V)$ с нормой

$$\|v\|_{L^p_w(T;V)} = \sup_{E \in \mathscr{D}} \left\| \int\limits_{E \cap T} v(t)\, dt \right\|_V, \tag{6}$$

где $\mathscr{D}$ — семейство всех $E \subset \mathbb{R}^n$ вида $E = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$.

Для пространства $L^p(T; V)$, снабженного слабой топологией, будем применять обозначение $w$-$L^p(T; V)$. Если множество $K \subset L^p(T; V)$ снабжено слабой топологией, будем обозначать его через $w$-$K$; если же оно снабжено топологией, индуцированной топологией пространства $L^p_w(T; V)$, будем писать $K_w$.

На прямом произведении $L^p_w(\Omega; X) \times L^p_w(I_1; X) \times L^p_w(I_2; X)$ введем норму

$$\|(v, v^1, v^2)\|_w = \|v\|_{L^p_w(\Omega;X)} + \|v^1\|_{L^p_w(I_1;X)} + \|v^2\|_{L^p_w(I_2;X)}.$$

Евклидову норму в конечномерных пространствах $X$ и $Y$ будем обозначать соответственно через $|\cdot|_X$ и $|\cdot|_Y$.

Пространство $L^p(\Omega; X)$, снабженное нормой

$$\|v\|_{L^p_k(\Omega;X)} = \left( \int\limits_0^a \int\limits_0^b e^{-k(x+y)} |v(x,y)|^p_X\, dxdy \right)^{\frac{1}{p}}, \quad k > 0, \tag{7}$$

эквивалентной стандартной $\|\cdot\|_{L^p(\Omega;X)}$, обозначим через $L^p_k(\Omega;X)$.

Всюду в дальнейшем будем считать, что имеют место следующие предположения.

$\mathscr{A}(\varphi)$: $\varphi_i : I_i \to X$ — абсолютно непрерывные функции с производными из $L^p(I_i;X)$, $i=1,2$.

$\mathscr{A}(c)$: $c_1, c_2 : \Omega\times X \to \mathscr{L}(X;X)$, $c_3 : \Omega\times X \to \mathscr{L}(Y;X)$, $c_4 : \Omega\times X \to X$ — функции Каратеодори, для которых существует такое $C>0$, что для всех $z\in X$

$$\|c_1(x,y,z)\|_{\mathscr{L}(X;X)} \le C, \quad \|c_2(x,y,z)\|_{\mathscr{L}(X;X)} \le C,$$
$$\|c_3(x,y,z)\|_{\mathscr{L}(Y;X)} \le C(1+|z|_X), \quad |c_4(x,y,z)|_X \le C(1+|z|_X)$$

п. в. на $\Omega$.

$\mathscr{A}(U)$: $U : \Omega\times X \to Y$, $U_1 : I_1\times X \to X$, $U_2 : I_2\times X\to X$ — многозначные отображения с замкнутыми значениями, являющиеся отображениями Каратеодори; кроме того, для них существуют такие $m>0$, $m_1(\cdot)\in L^1(I_1;\mathbb{R}_+)$, $m_2(\cdot)\in L^1(I_2;\mathbb{R}_+)$, что для всех $z\in X$

$$\|U(x,y,z)\|_Y = \{\sup|u|_Y \mid u\in U(x,y,z)\} \le m \quad \text{п. в. на } \Omega,$$
$$\|U_1(x,z)\|_X \le m_1(x) \quad \text{п. в. на } I_1, \quad \|U_2(y,z)\|_X \le m_2(y) \quad \text{п. в. на } I_2.$$

$\mathscr{A}(g)$: $g : \Omega\times(X\times Y)\to\mathbb{R}$, $g_i : I_i\times(X\times X)\to\mathbb{R}$, $i=1,2$, — функции Каратеодори, для которых существует $\zeta>0$ такое, что для всех $z,v\in X$, $u\in Y$

$$|g(x,y,z,u)| \le \zeta(1+|z|_X+|u|_Y) \quad \text{п. в. на} \quad \Omega,$$
$$|g_1(x,z,v)| \le \zeta(1+|z|_X+|v|_X) \quad \text{п. в. на} \quad I_1,$$
$$|g_2(y,z,v)| \le \zeta(1+|z|_X+|v|_X) \quad \text{п. в. на} \quad I_2.$$

## 2. Предварительные сведения

В данном разделе кратко изложены результаты работы [5], необходимые в дальнейшем.

Рассмотрим операторы

$$\mathscr{T} : L^p(\Omega;X)\times L^p(I_1;X)\times L^p(I_2;X) \to AC^p(\Omega;X),$$
$$\mathscr{T}_1 : L^p(\Omega;X)\times L^p(I_1;X) \to L^p(\Omega;X),$$
$$\mathscr{T}_2 : L^p(\Omega;X)\times L^p(I_2;X) \to L^p(\Omega;X),$$

определенные по формулам

$$\mathscr{T}(v,u^1,u^2)(x,y) = \varphi_1(x)+\varphi_2(y)-\varphi_1(0)+\int_0^x u^1(s)\,ds + \int_0^y u^2(t)\,dt \int_0^x\int_0^y v(s,t)\,dsdt, \tag{8}$$

$$\mathscr{T}_1(v,u^1)(x,y) = \varphi_1'(x)+u^1(x)+\int_0^y v(x,t)\,dt, \tag{9}$$

$$\mathscr{T}_2(v,u^2)(x,y) = \varphi_2'(y)+u^2(y)+\int_0^x v(s,y)\,ds. \tag{10}$$

**Лемма 2.1.** *Пусть $K$ — произвольное слабо компактное подмножество пространства $L^p(\Omega;X)\times L^p(I_1;X)\times L^p(I_2;X)$. Тогда операторы*

$$\mathscr{T}: w\text{-}K \to C(\Omega;X),$$

$$\mathscr{T}_1: w\text{-}L^p(\Omega;X)\times w\text{-}L^p(I_1;X)\to w\text{-}L^p(\Omega;X),$$
$$\mathscr{T}_2: w\text{-}L^p(\Omega;X)\times w\text{-}L^p(I_2;X)\to w\text{-}L^p(\Omega;X)$$

*непрерывны.*

Положим

$$\mathscr{C}_0(z,v)(x,y)=c_3(x,y,z(x,y))v(x,y)+c_4(x,y,z(x,y)), \tag{11}$$

$$\mathscr{C}_i(z,v)(x,y)=c_i(x,y,z(x,y))v(x,y),\quad i=1,2. \tag{12}$$

Из предположения $\mathscr{A}(c)$ вытекает, что $\mathscr{C}_0$ отображает $C(\Omega;X)\times L^p(\Omega;Y)$ в $L^p(\Omega;X)$, а $\mathscr{C}_1$ и $\mathscr{C}_2$ отображают $C(\Omega;X)\times L^p(\Omega;X)$ в $L^p(\Omega;X)$. Справедлива следующая

**Лемма 2.2.** *Операторы*

$$\mathscr{C}_0: C(\Omega;X)\times w\text{-}L^p(\Omega;Y)\to w\text{-}L^p(\Omega;X),$$

$$\mathscr{C}_i: C(\Omega;X)\times w\text{-}L^p(\Omega;X)\to w\text{-}L^p(\Omega;X),\quad i=1,2,$$

*секвенциально непрерывны.*

Ниже приведены две теоремы, которыми мы будем постоянно пользоваться (их доказательства могут быть найдены в работах [6, 7].

Пусть $Z$, $V$ — сепарабельные банаховы пространства, $T$ — компактное подмножество $\mathbb{R}^n$, $S$ — компакт из $C(T;Z)$.

**Теорема 2.1.** *Пусть $F: T\times Z\to V$ — многозначное отображение Каратеодори с замкнутыми ограниченными значениями, удовлетворяющее условию подлинейного роста: для всех $z\in Z$*

$$\|F(t,z)\|\le \delta(t)(1+\|z\|)\quad \text{п. в. на } T,$$

*где $\delta(\cdot)\in L^p(T;\mathbb{R}_+)$. Тогда для любых $z_*(\cdot)\in S$ и $v_*(\cdot)\in L^p(T;V)$, удовлетворяющих условию*

$$v_*(t)\in F(t,z_*(t))\quad \text{п. в. на } T,$$

*найдется непрерывная функция $f: S\to L^p(T;V)$ такая, что для всех $z(\cdot)\in S$*

$$f(z)(t)\in F(t,z(t))\quad \text{п. в. на } t\in T \quad \text{и}\quad f(z_*)=v_*.$$

**Теорема 2.2.** *Пусть $F: T\times Z\to V$ — некоторое многозначное отображение с замкнутыми значениями. Предположим, что многозначное отображение $\overline{\mathrm{co}}F$, определенное равенством $\overline{\mathrm{co}}F(t,z)=\overline{\mathrm{co}\,F(t,z)}$, удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Тогда для любой полунепрерывной снизу функции $\epsilon: S\to\mathbb{R}_+$ и любой непрерывной функции $f: S\to L^p(T;V)$ такой, что*

$$f(z)(t)\in \overline{\mathrm{co}}F(t,z(t))\quad \text{п. в. на } t\in T,$$

*найдется непрерывная функция $g: S\to L^p(T;V)$ со следующим свойством: для всех $z(\cdot)\in S$*

$$g(z)(t)\in F(t,z(t))\quad \text{п. в. на } t\in T\quad \text{и}\quad \|f(z)-g(z)\|_{L^p_w(T;V)}\le\epsilon(z),\quad z(\cdot)\in S.$$

Пусть $K$ — произвольное слабо компактное подмножество пространства

$$L^p(\Omega;Y)\times L^p(I_1;X)\times L^p(I_2;X).$$

Положим $S=\mathscr{T}(K)$. Согласно лемме 2.1 $S$ является компактным подмножеством пространства $C(\Omega;X)$. Поэтому из теоремы 2.1 вытекает, что найдутся такие непрерывные отображения $\alpha:S\to L^p(\Omega;Y)$, $\alpha^1:S\to L^p(I_1;X)$, $\alpha^2:S\to L^p(I_2;X)$, что для любого $z\in S$

$$\begin{gathered}\alpha(z)(x,y)\in U(x,y,z(x,y))\quad\text{для п. в. }(x,y)\in\Omega,\\ \alpha^1(z)(x)\in U_1(x,\mathscr{V}_1(z)(x))\quad\text{для п. в. }x\in I_1,\\ \alpha^2(z)(y)\in U_2(y,\mathscr{V}_2(z)(y))\quad\text{для п. в. }y\in I_2.\end{gathered}\tag{13}$$

Положим

$$f=\begin{pmatrix}\mathscr{C}_0\circ(\mathscr{T}\times(\alpha\circ\mathscr{T}))+\mathscr{C}_1\circ(\mathscr{T}\times\mathscr{T}_1)+\mathscr{C}_2\circ(\mathscr{T}\times\mathscr{T}_2)\\ \alpha^1\circ\mathscr{T}\\ \alpha^2\circ\mathscr{T}\end{pmatrix}.\tag{14}$$

Из лемм 2.1 и 2.2 следует, что отображение $f$ является непрерывным из $w$-$K$ в

$$w\text{-}L^p(\Omega;Y)\times w\text{-}L^p(I_1;X)\times w\text{-}L^p(I_2;X).$$

Всюду в дальнейшем будем считать, что множество $K$ имеет вид

$$K=Q\times Q_1\times Q_2,\tag{15}$$

где

$$\begin{gathered}Q=\{v\in L^p(\Omega;X)\mid \|v\|_{L^p_k(\Omega;Y)}\le d/(1-r\kappa)\},\\ Q_1=\{u^1\in L^p(I_1;X)\mid \|u^1\|_{L^p(I_1;X)}\le\|m_1\|_{L^p(I_1;\mathbb{R})}\},\\ Q_2=\{u^2\in L^p(I_2;X)\mid \|u^2\|_{L^p(I_2;X)}\le\|m_2\|_{L^p(I_2;\mathbb{R})}\}.\end{gathered}$$

Здесь

$$\kappa=k^{-\frac{2}{p}}(ab)^{\frac{1}{q}}+k^{-\frac{1}{p}}a^{\frac{1}{q}}+k^{-\frac{1}{p}}b^{\frac{1}{q}},\tag{16}$$

$$\begin{gathered}d=C(b^{\frac1p}\|\varphi_1\|_{L^p(I_1;X)}+a^{\frac1p}\|\varphi_2\|_{L^p(I_2;X)}+b^{\frac1p}\|m_1\|_{L^p(I_1;\mathbb{R})}+a^{\frac1p}\|m_2\|_{L^p(I_2;\mathbb{R})})\\ +(ab)^{\frac1p}m\big(1+\max_{\Omega}|\varphi_1+\varphi_2-\varphi_1(0)|+a^{\frac1q}\|m_1\|_{L^p(I_1;\mathbb{R})}+b^{\frac1q}\|m_2\|_{L^p(I_2;\mathbb{R})}),\\ r=\max\{C,m\},\end{gathered}$$

$C$, $m$, $m_1(\cdot)$, $m_2(\cdot)$ — константы и функции из предположений $\mathscr{A}(c)$ и $\mathscr{A}(U)$.

Из (16) вытекает, что при достаточно большом $k$ справедливо неравенство $r\kappa<1$ и, следовательно, множество $Q$ непусто.

**Лемма 2.3.** *Множество $K$ обладает следующими свойствами:*

1°) $f(K)\subset K$;

2°) *если* $(z,u,u^1,u^2)\in\mathscr{R}$, *то* $(z_{xy},u^1,u^2)\in K$.

В силу лемм 2.1–2.3 $f$ непрерывно отображает $w$-$K$ в себя и, следовательно, по теореме Шаудера имеет неподвижные точки, т. е. $\mathrm{Fix}(f)\ne\varnothing$. Пусть $\big(v_*,u^1_*,u^2_*\big)\in\mathrm{Fix}(f)$ и $z_*=\mathscr{T}\big(v_*,u^1_*,u^2_*\big)$, тогда $(z_*,\alpha(z_*),\alpha^1(z_*),\alpha^2(z_*))\in\mathscr{R}$. Таким образом, каждой функции $f$ вида (14) можно сопоставить множество

$$\mathscr{R}_f=\big\{(z_*,\alpha(z_*),\alpha^1(z_*),\alpha^2(z_*))\mid z_*=\mathscr{T}\big(v_*,u^1_*,u^2_*\big),\big(v_*,u^1_*,u^2_*\big)\in\mathrm{Fix}(f)\big\}.\tag{17}$$

С другой стороны, каждая точка $\big(z_*,u_*,u^1_*,u^2_*\big)\in\mathscr{R}$ содержится в некотором $\mathscr{R}_f$. В самом деле, достаточно с помощью теоремы 2.1 выбрать такие $\alpha$, $\alpha^1$, $\alpha^2$, что

$$\alpha(z_*)=u_*,\quad \alpha^1(z_*)=u^1_*,\quad \alpha^2(z_*)=u^2_*.$$

Таким образом, имеет место следующая

**Теорема 2.3.** *$\mathscr{R} = \bigcup\limits_{f\in\mathscr{F}} \mathscr{R}_f \neq \varnothing$, где $\mathscr{F}$ — семейство всех функций $f$ вида (14) таких, что $\alpha : S \to L^p(\Omega; X)$, $\alpha^1 : S \to L^p(I_1; X)$, $\alpha^2 : S \to L^p(I_2; X)$, входящие в определение $f$, непрерывны и удовлетворяют ограничениям* (13).

Для множества $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ справедливо более сильное утверждение.

**Теорема 2.4.** *$\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ компактно в пространстве*

$$C(\Omega; X) \times w\text{-}L^p(\Omega; Y) \times w\text{-}L^p(I_1; X) \times w\text{-}L^p(I_2; X). \tag{18}$$

## 3. Теорема Боголюбова

Прежде всего установим взаимосвязь между слабой топологией в пространстве $L^p(\Omega; X)$ и топологией, порожденной нормой $\|\cdot\|_{L^p_w(\Omega;X)}$.

**Лемма 3.1.** *Пусть $B$ — слабо компактное подмножество $L^p(\Omega; X)$, $1 < p < \infty$. Тогда топологии на множествах $w\text{-}B$ и $B_w$ совпадают.*

Доказательство. Положим

$$\mathscr{P}(v)(x,y) = \int\limits_0^x \int\limits_0^y v(s,t)\,dt\,ds, \quad v \in L^p(\Omega; X).$$

Согласно лемме 2.1 оператор $\mathscr{P} : w\text{-}B \to C(\Omega, X)$ непрерывен. Для любых $0 \le x_1 < x_2 \le a$, $0 \le y_1 < y_2 \le b$ и $v \in w\text{-}B$ имеем

$$\int\limits_{x_1}^{x_2}\int\limits_{y_1}^{y_2} v\,dxdy = \int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{y_2} v\,dxdy - \int\limits_0^{x_2}\int\limits_0^{y_1} v\,dxdy - \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_2} v\,dxdy + \int\limits_0^{x_1}\int\limits_0^{y_1} v\,dxdy$$
$$= \mathscr{P}(v)(x_2,y_2) - \mathscr{P}(v)(x_2,y_1) - \mathscr{P}(v)(x_1,y_2) + \mathscr{P}(v)(x_1,y_1).$$

Следовательно,

$$\|\mathscr{P}(v)\|_{C(\Omega,X)} \le \|v\|_{L^p_w(\Omega;X)} \le 4\|\mathscr{P}(v)\|_{C(\Omega,X)}. \tag{19}$$

Так как $1 < p < \infty$, то $w\text{-}B$ — метризуемое компактное подмножество пространства $w\text{-}L^p(\Omega; X)$. Пусть $i : w\text{-}B \to B_w$ — тождественное отображение. Покажем, что $i$ непрерывно. Если $v_n \to v$ в $w\text{-}B$, то $\mathscr{P}(v_n) \to \mathscr{P}(v)$ в $C(\Omega, X)$ в силу непрерывности $\mathscr{P}$. Теперь из (19) следует, что $v_n \to v$ в $B_w$. Следовательно, $i$ секвенциально непрерывно, а поскольку множество $w\text{-}B$ метризуемо, $i$ непрерывно.

Таким образом, $i$ является непрерывным взаимно однозначным отображением метризуемого компактного множества $w\text{-}B$ на множество $B_w$ и, следовательно, гомеоморфизмом [8]. Лемма доказана. □

Аналогичный результат справедлив и для слабо компактных подмножеств пространств $L^p(I_i; X)$, $i = 1, 2$.

Для доказательства теоремы Боголюбова применим метод, основанный на использовании вспомогательных многозначных отображений (см. [4]). Пусть $\widetilde{Y} = Y \times \mathbb{R}$, $\tilde{u} = (u, \lambda) \in \widetilde{Y}$, $|\tilde{u}|_{\widetilde{Y}} = \left(|u|^2_Y + |\lambda|^2\right)^{1/2}$. Аналогично $\widetilde{X} = X \times \mathbb{R}$, $\tilde{v} = (v, \lambda) \in \widetilde{X}$, $|\tilde{v}|_{\widetilde{X}} = \left(|v|^2_X + |\lambda|^2\right)^{1/2}$. Рассмотрим вспомогательные многозначные отображения

$$G(x,y,z) = \{(u,\lambda) \in \widetilde{Y} \mid u \in U(x,y,z), \lambda = g(x,y,z,u)\},$$
$$G_1(x,z) = \{(v,\lambda) \in \widetilde{X} \mid v \in U_1(x,z), \lambda = g_1(x,z,v)\},$$
$$G_2(y,z) = \{(v,\lambda) \in \widetilde{X} \mid v \in U_2(y,z), \lambda = g_2(y,z,v)\}.$$

**Лемма 3.2.** *Отображение $G : \Omega \times X \to Y$ обладает следующими свойствами:*

(i) $(x, y) \mapsto G(x, y, z)$ *измеримо для каждого* $z \in X$;

(ii) $z \mapsto G(x, y, z)$ *непрерывно по Хаусдорфу для п. в.* $(x, y) \in \Omega$;

(iii) $\|G(x, y, z)\|_{\widetilde{Y}} \le r(1 + |z|_X)$, $z \in X$, $(x, y) \in \Omega$ *п. в. при некотором* $r > 0$.

**Лемма 3.3.** *Справедливы следующие утверждения:*

(a) $(u, \lambda) \in \operatorname{co} G(x, y, z)$ *влечет* $u \in \operatorname{co} U(x, y, z)$;

(b) $u \in \operatorname{co} U(x, y, z)$ *влечет* $(u, \lambda) \in \operatorname{co} G(x, y, z)$ *для некоторого* $\lambda \in \mathbb{R}$;

(c) $g^{**}(x, y, z, u) = \begin{cases} \min\{\lambda \mid (u, \lambda) \in \operatorname{co} G(x, y, z), & \text{если } u \in \operatorname{co} U(x, y, z), \\ +\infty & \text{в противном случае,} \end{cases}$
*в частности,*

$$(u, g^{**}(x, y, z, u)) \in \operatorname{co} G(x, y, z) \quad \text{для любого} \;\; u \in \operatorname{co} U(x, y, z).$$

(d) *для любого* $\varepsilon > 0$ *существует измеримое множество* $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, $\mu_2(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$, *такое, что функция* $g^{**}$ *полунепрерывна снизу на* $\Omega_\varepsilon \times X \times Y$.

Доказательство этих лемм можно найти, например, в [4]. Для $G_1$, $G_2$, $g_1^{**}$ и $g_2^{**}$ справедливы аналогичные леммы.

Пусть $\big(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\big) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$. В силу леммы 3.3(c)

$$(u_*(x, y), g^{**}(x, y, z_*(x, y), u_*(x, y))) \in \operatorname{co} G(x, y, z_*(x, y)) \quad \text{п. в. на} \;\; \Omega,$$

$$\big(u_*^1(x), g_1^{**}\big(x, \mathscr{V}_1(z_*)(x), u_*^1(x)\big)\big) \in \operatorname{co} G_1(x, \mathscr{V}_1(z_*)(x)) \quad \text{п. в. на} \;\; I_1,$$

$$\big(u_*^2(y), g_2^{**}\big(y, \mathscr{V}_2(z_*)(y), u_*^2(y)\big)\big) \in \operatorname{co} G_2(y, \mathscr{V}_2(z_*)(y)) \quad \text{п. в. на} \;\; I_2.$$

Из леммы 3.3(d) следует, что $g^{**}$ — борелевская функция с точностью до множества нулевой меры из $\Omega$. Следовательно, функция $g^{**}(\cdot, z_*(\cdot), u_*(\cdot))$ измерима. Более того, в силу предположения $\mathscr{A}(g)$ она принадлежит пространству $L^p(\Omega; \mathbb{R})$. Аналогично можно показать, что функции $g_1^{**}\big(\cdot, \mathscr{V}_1(z_*)(\cdot), u_*^1(\cdot)\big)$ и $g_2^{**}\big(\cdot, \mathscr{V}_2(z_*)(\cdot), u_*^2(\cdot)\big)$ принадлежат пространствам $L^p(I_1; \mathbb{R})$ и $L^p(I_2; \mathbb{R})$ соответственно. Поэтому согласно теореме 2.1 существуют непрерывные отображения

$$\gamma : S \to L^p(\Omega; \widetilde{Y}), \quad \gamma^1 : S \to L^p(I_1; \widetilde{X}), \quad \gamma^2 : S \to L^p(I_2; \widetilde{X})$$

такие, что

$$\begin{aligned} \gamma(z)(x, y) &\in \operatorname{co} G(x, y, z(x, y)) \quad \text{п. в. на} \;\; \Omega, \\ \gamma^1(z)(x) &\in \operatorname{co} G_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \quad \text{п. в. на} \;\; I_1, \\ \gamma^2(z)(x) &\in \operatorname{co} G_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)) \quad \text{п. в. на} \;\; I_2 \end{aligned} \tag{20}$$

и

$$\begin{aligned} \gamma(z_*)(\cdot) &= (u_*(\cdot), g^{**}(\cdot, z_*(\cdot), u_*(\cdot))), \\ \gamma^1(z_*)(\cdot) &= \big(u_*^1(\cdot), g_1^{**}\big(\cdot, \mathscr{V}_1(z_*)(\cdot), u_*^1(\cdot)\big)\big), \\ \gamma^2(z_*)(\cdot) &= \big(u_*^2(\cdot), g_2^{**}\big(\cdot, \mathscr{V}_2(z_*)(\cdot), u_*^2(\cdot)\big)\big). \end{aligned} \tag{21}$$

Напомним, что здесь $S = \mathscr{T}(K)$, где $K$ определено формулой (15).

Запишем $\gamma$ в виде

$$\gamma = (\alpha, \beta),$$

где $\alpha : S \to L^p(\Omega; Y)$, $\beta : S \to L^p(\Omega; \mathbb{R})$ — непрерывные отображения. Поскольку для каждого $z \in S$

$$(\alpha(z)(x, y), \beta(z)(x, y)) \in \operatorname{co} G(x, y, z(x, y)) \quad \text{п. в. на} \;\; \Omega,$$

из леммы 3.3(a) вытекает, что для каждого $z \in S$

$$\alpha(z)(x,y) \in \operatorname{co} U(x,y,z(x,y)) \quad \text{п. в. на } \ \Omega.$$

Аналогично пусть

$$\gamma^i = (\alpha^i, \beta^i), \quad i = 1, 2,$$

где $\alpha_i : S \to L^p(I_i; X)$, $\beta_i : S \to L^p(I_i; \mathbb{R})$, $i = 1, 2$. Тогда

$$\alpha^1(z)(x) \in \operatorname{co} U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \quad \text{п. в. на } \ I_1,$$

$$\alpha^2(z)(y) \in \operatorname{co} U_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)) \quad \text{п. в. на } \ I_2.$$

Определение 3.1. Будем говорить, что для задачи оптимального управления $(P)$ *выполняется условие единственности*, если для каждого решения $\left(z_*, u_*, u^1_*, u^2_*\right) \in \mathscr{R}_{\text{co}}$ системы (2)–(4) существуют непрерывные функции

$$\gamma = (\alpha, \beta), \quad \gamma^1 = (\alpha^1, \beta^1), \quad \gamma^2 = (\alpha^2, \beta^2),$$

удовлетворяющие включениям (20) и равенствам (21) и такие, что множество $\mathscr{R}_f$, соответствующее отображению $f : K \to K$, определенному формулой (14), состоит из одной точки $\left(z_*, u_*, u^1_*, u^2_*\right)$.

Замечание 3.1. Для задачи оптимального управления системой (2), (3) с постоянными ограничениями на управления

$$u(x,y) \in \operatorname{co} U, \quad u^1(x) \in \operatorname{co} U_1, \quad u^2(y) \in \operatorname{co} U_2$$

свойство единственности выполняется, если каждой тройке допустимых управлений $(u, u^1, u^2)$ соответствует единственное решение $z$ системы (2), (3). Как известно [9], последнее справедливо, например, для линейной системы

$$z_{xy} = c_1(x,y) z_x + c_2(x,y) z_y + c_3(x,y) z + c_4(x,y) u.$$

Следовательно, задача оптимального управления этой системой обладает свойством единственности. Другие примеры задач, обладающих свойством единственности, будут приведены в разд. 5.

**Теорема 3.1.** *Пусть задача оптимального управления* (P) *обладает свойством единственности. Тогда для любой точки* $\left(z_*, u_*, u^1_*, u^2_*\right) \in \mathscr{R}_{\text{co}}$ *существует последовательность* $\left(z_n, u_n, u^1_n, u^2_n\right) \in \mathscr{R}$, *сходящаяся к* $\left(z_*, u_*, u^1_*, u^2_*\right)$ *в пространстве* (18) *и такая, что*

$$\begin{gathered}
\lim_{n\to\infty} \|g^{**}(\cdot, z_*(\cdot), u_*(\cdot)) - g(\cdot, z_n(\cdot), u_n(\cdot))\|_{L^p_w(\Omega;\mathbb{R})} = 0, \\
\lim_{n\to\infty} \left\|g^{**}_1\left(\cdot, \mathscr{V}_1(z_*)(\cdot), u^1_*(\cdot)\right) - g_1\left(\cdot, \mathscr{V}_1(z_n)(\cdot), u^1_n(\cdot)\right)\right\|_{L^p_w(I_1;\mathbb{R})} = 0, \\
\lim_{n\to\infty} \left\|g^{**}_2\left(\cdot, \mathscr{V}_2(z_*)(\cdot), u^2_*(\cdot)\right) - g_2\left(\cdot, \mathscr{V}_2(z_n)(\cdot), u^2_n(\cdot)\right)\right\|_{L^p_w(I_2;\mathbb{R})} = 0.
\end{gathered} \tag{22}$$

*Здесь* $\|\cdot\|_{L^p_w(\Omega;\mathbb{R})}$, $\|\cdot\|_{L^p_w(I_i;\mathbb{R})}$, $i = 1, 2$, — *нормы, определенные формулой* (6).

Доказательство. Шаг 1. Пусть $\gamma$, $\gamma^1$, $\gamma^2$ — функции из определения 3.1, соответствующие точке $\left(z_*, u_*, u^1_*, u^2_*\right) \in \mathscr{R}_{\text{co}}$. Согласно теореме 2.2 для любого $n \geq 1$ существуют непрерывные отображения

$$\gamma_n : S \to L^p(\Omega; \widetilde{Y}), \quad \gamma^1_n : S \to L^p(I_1; \widetilde{X}), \quad \gamma^2_n : S \to L^p(I_2; \widetilde{X})$$

такие, что для всех $z \in S$

$$\gamma_n(z)(x,y) \in G(x,y,z(x,y)) \quad \text{п. в. на } \ \Omega,$$

$$\gamma_n^1(z)(x) \in G_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \quad \text{п. в. на } \ I_1,$$
$$\gamma_n^2(z)(y) \in G_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)) \quad \text{п. в. на } \ I_2$$

и

$$\|\gamma(z) - \gamma_n(z)\|_{L^p_w(\Omega;\widetilde{Y})} \le 1/n, \quad \left\|\gamma^1(z) - \gamma_n^1(z)\right\|_{L^p_w(I_1;\widetilde{X})} \le 1/n,$$
$$\left\|\gamma^2(z) - \gamma_n^2(z)\right\|_{L^p_w(I_2;\widetilde{X})} \le 1/n. \tag{23}$$

Из определения отображений $G$, $G_1$, $G_2$ следует, что функции $\gamma_n$, $\gamma_n^1$, $\gamma_n^2$ можно записать в виде

$$\gamma_n(z)(\cdot) = (\alpha_n(z)(\cdot), g(\cdot, z(\cdot), \alpha_n(z)(\cdot))),$$
$$\gamma_n^1(z)(\cdot) = \big(\alpha_n^1(z)(\cdot), g_1\big(\cdot, \mathscr{V}_1(z)(\cdot), \alpha_n^1(z)(\cdot)\big)\big),$$
$$\gamma_n^2(z)(\cdot) = \big(\alpha_n^2(z)(\cdot), g_2\big(\cdot, \mathscr{V}_2(z)(\cdot), \alpha_n^2(z)(\cdot)\big)\big),$$

где $\alpha_n : S \to L^p(\Omega; Y)$, $\alpha_n^1 : S \to L^p(\Omega; X)$, $\alpha_n^2 : S \to L^p(\Omega; X)$ — непрерывные отображения такие, что

$$\alpha_n(z)(x,y) \in U(x,y,z(x,y)) \quad \text{п. в. на } \ \Omega,$$
$$\alpha_n^1(z)(x) \in U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)) \quad \text{п. в. на } \ I_1, \tag{24}$$
$$\alpha_n^2(z)(y) \in U_2(y, \mathscr{V}_2(z)(y)) \quad \text{п. в. на } \ I_2.$$

Поскольку

$$\left|\int\limits_{\Pi} (\gamma(z)(x,y) - \gamma(z)(x,y))\, d\mu_2\right|_{\tilde{Y}} = \Bigg(\left|\int\limits_{\Pi} (\alpha(z)(x,y) - \alpha_n(z)(x,y))\, d\mu_2\right|_Y^2$$
$$+ \left|\int\limits_{\Pi} (\beta(z)(x,y) - g(x,y,z(x,y),\alpha(z)(x,y)))\, d\mu_2\right|_{\mathbb{R}}^2\Bigg)^{\frac{1}{2}}$$

для любого прямоугольника $\Pi \subset \Omega$ со сторонами, параллельными осям $Ox$ и $Oy$, из (23) вытекает, что для всех $z \in S$

$$\|\alpha(z) - \alpha_n(z)\|_{L^p_w(\Omega;Y)} \le 1/n, \tag{25}$$

$$\|\beta(z)(\cdot) - g(\cdot, z(\cdot), \alpha_n(z)(\cdot))\|_{L^p_w(\Omega;\mathbb{R})} \le 1/n. \tag{26}$$

Аналогично получим

$$\left\|\alpha^1(z) - \alpha_n^1(z)\right\|_{L^p_w(I_1;X)} \le 1/n, \quad \left\|\alpha^2(z) - \alpha_n^2(z)\right\|_{L^p_w(I_2;X)} \le 1/n, \tag{27}$$

$$\left\|\beta^1(z)(\cdot) - g_1\big(\cdot, \mathscr{V}_1(z)(\cdot), \alpha_n^1(z)(\cdot)\big)\right\|_{L^p_w(I_1;\mathbb{R})} \le 1/n,$$
$$\left\|\beta^2(z)(\cdot) - g_2\big(\cdot, \mathscr{V}_2(z)(\cdot), \alpha_n^2(z)(\cdot)\big)\right\|_{L^p_w(I_2;\mathbb{R})} \le 1/n. \tag{28}$$

Шаг 2. Положим

$$f_n = \begin{pmatrix} \mathscr{C}_0 \circ (\mathscr{T} \times (\alpha_n \circ \mathscr{T})) + \mathscr{C}_1 \circ (\mathscr{T} \times \mathscr{T}_1) + \mathscr{C}_2 \circ (\mathscr{T} \times \mathscr{T}_2) \\ \alpha_n^1 \circ \mathscr{T} \\ \alpha_n^2 \circ \mathscr{T} \end{pmatrix}.$$

Функции $f_n$, $n \in \mathbb{N}$, непрерывно отображают множество $w$-$K$ в себя. Поэтому по теореме Шаудера существуют точки $\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big) \in \mathrm{Fix}(f_n)$. Поскольку $\mathrm{Fix}(f_n)$ — подмножество компакта $w$-$K$, переходя, если необходимо, к подпоследовательностям, получаем, что

$$\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big) \to (v, u^1, u^2) \quad \text{в } w\text{-}K.$$

Покажем, что $(v, u^1, u^2) \in \mathrm{Fix}(f)$. Действительно, $f\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big) \to f(v, u^1, u^2)$ в $w$-$K$, так как $f : w\text{-}K \to w\text{-}K$ непрерывна. Теперь нужно только показать, что $f\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big) \to (v, u^1, u^2)$ в $w$-$K$.

Положим $z_n = \mathscr{T}\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big)$. Ясно, что

$$\begin{aligned}
&\big\|f\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big) - (v, u^1, u^2)\big\|_w \\
&\qquad \le \big\|f\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big) - f_n\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big)\big\|_w + \big\|\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big) - (v, u^1, u^2)\big\|_w \\
&\qquad \le \|\mathscr{C}_0(z_n, \alpha(z_n)) - \mathscr{C}_0(z_n, \alpha_n(z_n))\|_{L^p_w(\Omega;X)} + \big\|\alpha^1(z_n) - \alpha^1_n(z_n)\big\|_{L^p_w(I_1;X)} \\
&\qquad\qquad + \big\|\alpha^2(z_n) - \alpha^2_n(z_n)\big\|_{L^p_w(I_2;X)} + \big\|\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big) - (v, u^1, u^2)\big\|_w.
\end{aligned}$$

Из (27) и совпадения топологий на $w$-$K$ и $K_w$ следует, что три последних слагаемых стремятся к нулю. Покажем, что $\|\mathscr{C}_0(z_n, \alpha(z_n)) - \mathscr{C}_0(z_n, \alpha_n(z_n))\|_{L^p_w(\Omega;X)}$ также стремится к нулю. В самом деле, согласно (25) последовательность $\alpha(z_n) - \alpha_n(z_n)$ сходится к нулю в топологии пространства $L^p_w(\Omega; Y)$. Кроме того, в силу предположения $\mathscr{A}(U)$ она лежит в некотором замкнутом ограниченном и, следовательно, слабо компактном подмножестве пространства $L^p(\Omega; Y)$. Поэтому по лемме 3.1 $\alpha(z_n) - \alpha_n(z_n)$ слабо сходится к нулю. Тогда из равенства

$$\begin{aligned}
&\mathscr{C}_0(z_n, \alpha(z_n))(x, y) - \mathscr{C}_0(z_n, \alpha_n(z_n))(x, y) \\
&\qquad\qquad\qquad = c_3(x, y, z_n(x, y))[\alpha(z_n)(x, y) - \alpha_n(z_n)(x, y)],
\end{aligned}$$

предположения $\mathscr{A}(c)$ и ограниченности последовательности $z_n$ заключаем, что $\mathscr{C}_0(z_n, \alpha(z_n)) - \mathscr{C}_0(z_n, \alpha_n(z_n))$ также слабо сходится к нулю. Но любая слабо сходящаяся последовательность элементов пространства $L^p(\Omega; X)$ ограничена и, следовательно, лежит в некотором слабо компактном множестве. Поэтому согласно лемме 3.1 $\mathscr{C}_0(z_n, \alpha(z_n)) - \mathscr{C}_0(z_n, \alpha_n(z_n))$ сходится к нулю и в топологии пространства $L^p_w(\Omega; X)$. Итак, $f\big(v_n, u_n^1, u_n^2\big) \to (v, u^1, u^2)$ в $w$-$K$, а потому $(v, u^1, u^2) \in \mathrm{Fix}(f)$. Отсюда следует, что точка $(z, \alpha(z), \alpha^1(z), \alpha^2(z))$, $z = \mathscr{T}(v, u^1, u^2)$, принадлежит $\mathscr{R}_f$. Поэтому согласно свойству единственности эта точка совпадает с $\big(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\big)$.

Таким образом, мы построили последовательность $\big(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\big) \in \mathscr{R}$, сходящуюся к $\big(z_*, u_*, u_*^1, u_*^2\big) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ в топологии пространства (18) и такую, что

$$u_n = \alpha_n(z_n), \quad u_n^1 = \alpha_n^1(z_n), \quad u_n^2 = \alpha_n^2(z_n).$$

Поскольку функции $\beta$, $\beta^1$, $\beta^2$ непрерывны в соответствующих пространствах, можно считать, что

$$\begin{gathered}
\|\beta(z_*) - \beta(z_n)\|_{L^p_w(\Omega;\mathbb{R})} \le 1/n, \quad \|\beta^1(z_*) - \beta^1(z_n)\|_{L^p_w(I_1;\mathbb{R})} \le 1/n, \\
\|\beta^2(z_*) - \beta^2(z_n)\|_{L^p_w(I_2;\mathbb{R})} \le 1/n.
\end{gathered} \tag{29}$$

Комбинируя неравенства (29), (26) и (28), а также учитывая равенства (21), получим

$$\begin{gathered}
\|g^{**}(\cdot, z_*(\cdot), u_*(\cdot)) - g(\cdot, z_n(\cdot), u_n(\cdot))\|_{L^p_w(\Omega;\mathbb{R})} \le 2/n, \\
\big\|g_1^{**}\big(\cdot, \mathscr{V}_1(z_*)(\cdot), u_*^1(\cdot)\big) - g_1\big(\cdot, \mathscr{V}_1(z_n)(\cdot), u_n^1(\cdot)\big)\big\|_{L^p_w(I_1;\mathbb{R})} \le 2/n, \\
\big\|g_2^{**}\big(\cdot, \mathscr{V}_2(z_*)(\cdot), u_*^2(\cdot)\big) - g_2\big(\cdot, \mathscr{V}_2(z_n)(\cdot), u_n^2(\cdot)\big)\big\|_{L^p_w(I_2;\mathbb{R})} \le 2/n.
\end{gathered}$$

Отсюда при $n \to \infty$ следует (22). Теорема доказана. $\square$

## 4. Релаксационная теорема

**Теорема 4.1.** *Пусть задача оптимального управления* (P) *обладает свойством единственности. Тогда*

$$\min(\mathrm{R}P) = \inf(P). \tag{30}$$

*Более того, для любого решения* $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{u}^1, \bar{u}^2)$ *задачи* (RP) *существует минимизирующая последовательность* $\big(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\big)$ *задачи* (P) *такая, что*

(i) $\big(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\big) \to (\bar{z}, \bar{u}, \bar{u}^1, \bar{u}^2)$ *в пространстве* (18),

(ii) $J\big(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\big) \to J^{**}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{u}^1, \bar{u}^2)$.

*Обратно, если* $\big(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\big)$ — *минимизирующая последовательность задачи* (P), *то существуют подпоследовательность* $\big(z_{n_k}, u_{n_k}, u_{n_k}^1, u_{n_k}^2\big)$ *и решение* $\big(\bar{z}, \bar{u}, \bar{u}^1, \bar{u}^2\big)$ *задачи* (RP), *для которых выполняются соотношения* (i) *и* (ii).

Доказательство. Согласно предположению $\mathscr{A}(g)$ для всех $z, v \in X$ и $u \in Y$

$$-\zeta(1 + |z|_X + |u|_Y) \le g(x, y, z, u) \quad \text{п. в. на } \Omega,$$

$$-\zeta(1 + |z|_X + |v|_X) \le g_1(x, z, v) \quad \text{п. в. на } I_1,$$

$$-\zeta(1 + |z|_X + |v|_X) \le g_2(y, z, v) \quad \text{п. в. на } I_2.$$

Отсюда и из свойств биполяр следует, что для всех $z, v \in X$ и $u \in Y$

$$\begin{aligned} -\zeta(1 + |z|_X + |u|_Y) \le g^{**}(x, y, z, u) \le g_U(x, y, z, u) \quad &\text{п. в. на } \Omega, \\ -\zeta(1 + |z|_X + |v|_X) \le g_1^{**}(x, z, v) \le g_{U_1}(x, z, u) \quad &\text{п. в. на } I_1, \\ -\zeta(1 + |z|_X + |v|_X) \le g_2^{**}(y, z, v) \le g_{U_2}(y, z, u) \quad &\text{п. в. на } I_2. \end{aligned} \tag{31}$$

В силу леммы 3.3(d) для любого $\varepsilon > 0$ существует такое измеримое множество $\Omega_\varepsilon \subset \Omega$, $\mu_2(\Omega \setminus \Omega_\varepsilon) < \varepsilon$, что функция $g^{**}$ полунепрерывна снизу на $\Omega_\varepsilon \times X \times Y$. Следовательно, $g^{**}$ является нормальным интегрантом (см. [3, теорема 1.1, с. 231]). Отсюда и из (31) следует, что $g^{**}$ удовлетворяет всем условиям теоремы 2.1 из [10]. Согласно этой теореме интегральный функционал

$$(z(\cdot), u(\cdot)) \mapsto \int\limits_\Omega g^{**}(x, y, z(x, y), u(x, y))\, dxdy \tag{32}$$

является секвенциально полунепрерывным снизу на $L^1(\Omega; X) \times w\text{-}L^1(\Omega; Y)$.

Аналогично можно показать, что функционалы

$$(z(\cdot), u^1(\cdot)) \mapsto \int\limits_{I_1} g_1^{**}(x, \mathscr{V}_1(z)(x), u^1(x))\, dx,$$

$$(z(\cdot), u^2(\cdot)) \mapsto \int\limits_{I_2} g_2^{**}(y, \mathscr{V}_2(z)(y), u^1(y))\, dy$$

секвенциально полунепрерывны снизу на $L^1(\Omega; X) \times w\text{-}L^1(I_1; X)$ и $L^1(\Omega; X) \times w\text{-}L^1(I_2; X)$ соответственно. Отсюда следует, что интегральный функционал $J^{**}$ секвенциально полунепрерывен снизу на пространстве (18). Кроме того, из (31) и $\mathscr{A}(g)$ вытекает, что для любых $(z, u, u^1, u^2) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$

$$-\infty < J^{**}(z, u, u^1, u^2) < +\infty.$$

Так как согласно теореме 2.4 множество $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ компактно в пространстве (18), $J^{**}$ достигает на $\mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ минимума.

Из свойств биполяр и определения функций $g_U$, $g_{U_1}$, $g_{U_2}$ следует, что

$$\min(\mathrm{RP}) \le \inf(P). \tag{33}$$

Пусть $(\bar z, \bar u, \bar u^1, \bar u^2) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ — точка минимума в задаче (RP). Согласно теореме 3.1 существует последовательность $\big(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\big) \in \mathscr{R}$, сходящаяся к $(\bar z, \bar u, \bar u^1, \bar u^2)$ в пространстве (18) и такая, что

$$\inf(P) \le \lim_{n\to\infty} J\big(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\big) = J^{**}(\bar z, \bar u, \bar u^1, \bar u^2) = \min(\mathrm{RP}). \tag{34}$$

Из неравенств (33) и (34) вытекает, что

$$\min(\mathrm{RP}) = \inf(\mathrm{P})$$

и последовательность $\big(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\big)$ является минимизирующей. Первая часть теоремы доказана.

Пусть $\big(z_n, u_n, u_n^1, u_n^2\big)$ — минимизирующая последовательность задачи (P). Согласно теореме 2.4 и предположению $\mathscr{A}(g)$ существует подпоследовательность $\big(z_{n_k}, u_{n_k}, u_{n_k}^1, u_{n_k}^2\big)$, сходящаяся к некоторой точке $(\bar z, \bar u, \bar u^1, \bar u^2) \in \mathscr{R}_{\mathrm{co}}$ в пространстве (18) и такая, что

$$g(\cdot, z_{n_k}(\cdot), u_{n_k}(\cdot)) \to \phi(\cdot) \quad \text{в } w\text{-}L^p(\Omega;\mathbb{R}),$$

$$g_i(\cdot, \mathscr{V}_i(z_{n_k})(\cdot), u_{n_k}^i(\cdot)) \to \phi_i(\cdot) \quad \text{в } w\text{-}L^p(I_i;\mathbb{R}), \quad i = 1, 2,$$

где $\phi(\cdot) \in L^p(\Omega;\mathbb{R})$, $\phi_i(\cdot) \in L^p(I_i;\mathbb{R})$, $i = 1, 2,$ — некоторые функции.

Рассмотрим многозначное отображение $\mathscr{G} : S \to L^p(\Omega;\widetilde Y)$, определенное по формуле

$$\mathscr{G}(z) = \{\tilde u(\cdot) \in L^p(\Omega;\widetilde Y) \mid \tilde u(x,y) \in \operatorname{co} G(x,y,z(x,y)) \text{ п. в.}\}, \quad z \in S.$$

Из леммы 3.2 и следствия 1.5.31 из [11] вытекает, что значения многозначного отображения $\mathscr{G}$ непусты и его график замкнут в пространстве $S \times w\text{-}L^p(\Omega;\widetilde Y)$. Поэтому из $(u_{n_k}(\cdot), g(\cdot, z_{n_k}(\cdot), u_{n_k}(\cdot))) \in \mathscr{G}(z_{n_k})$, следует $(\bar u(\cdot), \phi(\cdot)) \in \mathscr{G}(\bar z)$ или, что то же самое,

$$(\bar u(x,y), \phi(x,y)) \in \operatorname{co} G(x,y,\bar z(x,y)) \quad \text{п. в.}$$

Отсюда согласно лемме 3.3(c) вытекает, что

$$g^{**}(x,y,\bar z(x,y), \bar u(x,y)) \le \phi(x,y) \quad \text{п. в.}$$

Учитывая, что функционал (32) секвенциально полунепрерывен снизу на $L^1(\Omega;X) \times w\text{-}L^1(\Omega;Y)$, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_\Omega g^{**}(x,y,\bar z(x,y),\bar u(x,y))\,dxdy &\le \int\limits_\Omega \phi(x,y)\,dxdy \\ &\le \lim_{n_k\to\infty} \int\limits_\Omega g(x,y,z_{n_k}(x,y),u_{n_k}(x,y))\,dxdy.\end{aligned}$$

Аналогично

$$\int\limits_{I_1} g_1^{**}(x, \mathscr{V}_1(\bar z)(x), \bar u^1(x))\,dx \le \lim_{n_k\to\infty} \int\limits_{I_1} g_1\big(x, \mathscr{V}_1(z_{n_k})(x), u_{n_k}^1(x)\big)\,dx,$$

$$\int\limits_{I_2} g_2^{**}(y, \mathscr{V}_2(\bar{z})(y), \bar{u}^2(y))\, dy \le \varliminf_{n_k\to\infty} \int\limits_{I_2} g_2\big(y, \mathscr{V}_2(z_{n_k})(y), u^2_{n_k}(y)\big)\, dy.$$

Таким образом,

$$J^{**}(\bar{z}, \bar{u}, \bar{u}^1, \bar{u}^2) \le \lim_{n_k\to\infty} J\big(z_{n_k}, u_{n_k}, u^1_{n_k}, u^2_{n_k}\big) = \inf(P).$$

Теперь из (30) вытекает, что точка $(\bar{z}, \bar{u}, \bar{u}^1, \bar{u}^2)$ является решением задачи (RP). Теорема доказана. $\square$

## 5. Примеры

В этом разделе мы приведем (без доказательства) примеры задач оптимального управления, обладающих свойством единственности.

Пример 5.1. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{gathered} z_{xy} = c_1(y) z_x + c_2(x) z_y + c_3(x,y,z)u + c_4(x,y,z), \\ u(x,y) \in U(x,y,z(x,y)), \quad u^1(x) \in U_1(x), \quad u^2(y) \in U_2(y) \end{gathered} \tag{35}$$

с граничными условиями (3). Множество ее решений обозначим через $\mathscr{R}^1$.

Пусть наряду с предположениями $\mathscr{A}(\varphi)$, $\mathscr{A}(c)$, $\mathscr{A}(U)$, $\mathscr{A}(g)$ выполняются следующие предположения:

$\mathscr{A}_1(c)$: существуют такие $\xi_i(\cdot) \in L^1(I_1;\mathbb{R}^+)$, $\eta_i(\cdot) \in L^1(I_2;\mathbb{R}^+)$, $i = 3, 4$, что

$$\|c_3(x,y,z_1) - c_3(x,y,z_2)\|_{\mathscr{L}(Y;X)} \le \xi_3(x)\eta_3(y)|z_1 - z_2|_X,$$

$$|c_4(x,y,z_1) - c_4(x,y,z_2)|_X \le \xi_4(x)\eta_4(y)|z_1 - z_2|_X$$

для любых $z_1, z_2 \in X$ п. в. на $\Omega$;

$\mathscr{A}_1(U)$: существуют такие $\xi(\cdot) \in L^1(I_1;\mathbb{R}^+)$, $\eta(\cdot) \in L^1(I_2;\mathbb{R}^+)$, что

$$\mathrm{Dist}_Y(U(x,y,z_1), U(x,y,z_2)) \le \xi(x)\eta(y)|z_1 - z_2|_X$$

для любых $z_1, z_2 \in X$ п. в. на $\Omega$;

$\mathscr{A}_1(g)$: функции $(x,y,z,u) \mapsto g(x,y,z,u)$, $(x,z,u) \mapsto g_1(x,z,u)$, $(x,z,u) \mapsto g_2(x,z,u)$ липшицевы по $z$ и $u$ с константой Липшица $L$.

Тогда задача $\inf\limits_{r\in\mathscr{R}^1} J(r)$ обладает свойством единственности.

Пример 5.2. Рассмотрим управляемую систему

$$\begin{gathered} z_{xy} = c_2(x) z_y + c_3(x,y,z)u + c_4(x,y,z), \\ u(x,y) \in U(x,y,z(x,y)), \quad u^1(x) \in U_1(x, \mathscr{V}_1(z)(x)), \quad u^2(y) \in U_2(y) \end{gathered} \tag{36}$$

с граничными условиями (3). Множество ее решений обозначим через $\mathscr{R}^2$.

Пусть наряду с предположениями $\mathscr{A}(\varphi)$, $\mathscr{A}(c)$, $\mathscr{A}(U)$, $\mathscr{A}(g)$ выполняются следующие предположения:

$\mathscr{A}_2(c)$: существуют такие $l_i(\cdot) \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^+)$, $i = 3, 4$, что

$$\|c_3(x,y,z_1) - c_3(x,y,z_2)\|_{\mathscr{L}(Y;X)} \le l_3(x,y)|z_1 - z_2|_X,$$

$$|c_4(x,y,z_1) - c_4(x,y,z_2)|_X \le l_4(x,y)|z_1 - z_2|_X$$

для любых $z_1, z_2 \in X$ п. в. на $\Omega$;

$\mathscr{A}_2(U)$: существуют такие $l(\cdot) \in L^1(\Omega; \mathbb{R}^+)$, $l_1(\cdot) \in L^1(I_1; \mathbb{R}^+)$, что

$$\mathrm{Dist}_Y(U(x,y,z_1), U(x,y,z_2)) \leq l(x,y)|z_1 - z_2|_X,$$

$$\mathrm{Dist}_X(U_1(x,z_1), U_1(x,z_2)) \leq l_1(x)|z_1 - z_2|_X$$

для любых $z_1, z_2 \in X$ п. в. на $\Omega$;

$\mathscr{A}_2(g)$: функции $(x,y,z,u) \mapsto g(x,y,z,u)$, $(x,z,u) \mapsto g_1(x,z,u)$, $(x,z,u) \mapsto g_2(x,z,u)$ липшицевы по $z$ и $u$ с константой Липшица $L$;

$\mathscr{A}_2(\mathscr{V})$: существует такое $q_1 > 0$, что

$$|\mathscr{V}_1(z_1)(x) - \mathscr{V}_1(z_2)(x)|_X \leq q_1 \sup_{y \in I_2} |z_1(x,y) - z_2(x,y)|_X$$

для любых $z_1, z_2 \in C(\Omega; X)$ и $x \in I_1$.

При сделанных предположениях задача $\inf\limits_{r \in \mathscr{R}^2} J(r)$ обладает свойством единственности. Отметим, что примеры отображений $\mathscr{V}_1$, удовлетворяющих условию $\mathscr{A}_2(\mathscr{V})$, можно найти в [12].

Автор выражает признательность А. А. Толстоногову за постановку задачи и постоянное внимание к работе.

## *ЛИТЕРАТУРА*


1. *Bogolyubov N. N.* Sur quelques method nouvelles dans le calculus des variations // Ann. Math. Pura Appl. Ser. 4. 1930. V. 7. P. 249–271.
2. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Расширение вариационных задач // Тр. Моск. мат. о-ва. 1968. Т. 18. С. 187–246.
3. *Экланд И., Темам Р.* Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.: Мир, 1979.
4. *Tolstonogov A. A.* Relaxation in nonconvex optimal control problems with subdifferential operators // J. Math. Sci. 2007. V. 140, N 6. P. 850–872.
5. *Погодаев Н. И.* О решениях включения типа Гурса — Дарбу со смешанными ограничениями на граничные и распределенные управления // Сиб. журн. индустр. математики. 2008. Т. 11, № 1. С. 96–110.
6. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* $L_p$-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: existence theorems // Set-valued Anal. 1996. V. 4, N 2. P. 173–203.
7. *Tolstonogov A. A., Tolstonogov D. A.* $L_p$-continuous extreme selectors of multifunctions with decomposable values: relaxation theorems // Set-alued Anal. 1996. V. 4, N 3. P. 237–269.
8. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. М.: Мир, 1972.
9. *Idczak D., Walczak S.* On some properties of Goursat–D arboux systems with distributed and boundary controls // Int. J. Control. 2004. V. 77, N 9. P. 837–846.
10. *Balder E.* Necessary and sufficient conditions for $L_1$-strong–weak lower semicontinuity of integral functionals // Nonlinear Anal. Theory Methods Appl. 1987. V. 11, N 12. P. 1399–1404.
11. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. М.: КомКнига, 2005.
12. *Погодаев Н. И.* О свойствах решений задачи Гурса — Дарбу с граничными и распределенными управлениями // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1116–1133.


*Статья поступила 3 февраля 2010 г.*

Погодаев Николай Ильич
Институт динамики систем и теории управления СО РАН,
ул. Лермонтова, 134, Иркутск 664033
nickpogo@gmail.com