Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 512.554

ГОМОМОРФИЗМЫ, СЕПАРАБЕЛЬНЫЕ РАСШИРЕНИЯ И ОТОБРАЖЕНИЯ МОРИТА ДЛЯ СЛАБЫХ МОДУЛЬНЫХ АЛГЕБР

Л. Чжан, Ю. Ли

Аннотация. С использованием элемента с единичным следом один дано необходимое и достаточное условие того, что слабая модульная алгебра A является проективным левым $A\#H$-модулем, где $A\#H$ — слабое смеш-произведение, и обобщены некоторые условия того, что слабое смеш-произведение является сепарабельным расширением на слабой модульной алгебре A, и слабая структурная теорема в категории слабых (H, A)-модулей Хопфа.

Ключевые слова: слабая модульная алгебра, слабое смеш-произведение, сепарабельное расширение, слабый модуль Хопфа, отображение Морита.

Введение

Слабые алгебры Хопфа, определенные в [1], представляют собой обобщение обычных алгебр Хопфа. Примерами слабых алгебр Хопфа являются группоидные алгебры, граневые алгебры, квантовые группоиды и обобщенные алгебры Каца (см. [2–4]).

Оказывается, многие результаты теории классических алгебр Хопфа могут быть обобщены на слабые алгебры Хопфа. Например, теоремы двойственности для слабых модульных алгебр установлены в [5], теорема Машке и Морита-контекст для слабых модульных алгебр изучались в [6], структурная теорема для слабых модулей Дуа — Хопфа доказана в [7], где дано распространение не только структурной теоремы для слабых модулей Хопфа из [1], но также структурной теоремы для относительных модулей Хопфа из [8]; структурная теорема для слабых относительных $[C, H]$-модулей Хопфа дана в [9], для слабых комодульных алгебр — в [10].

В данной работе изучены слабые алгебры Хопфа, даны некоторые гомологические свойства и получена структурная теорема в категории слабых (H, A)-модулей Хопфа. Обобщены некоторые результаты из [11, 12].

В § 1 напоминаются некоторые понятия и результаты. В § 2 представлены гомоморфизмы из слабой модульной алгебры в ее смеш-произведение, даны условия того, что $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) \neq 0$, где $A\#H$ — слабое смеш-произведение для слабой H-модульной алгебры A, и доказано, что в A есть элемент с единичным следом в том и только в том случае, если A является проективным

The authors were supported by the National Natural Science Foundation of China (Grant 10871170), the Educational Ministry Science Technique Key Foundation of China (Grant 108154), and the College Special Research Doctoral Disciplines Point Fund of China (Grant 20100097110040).

левым $A\#H$-модулем. В § 3 даны некоторые условия того, что слабое смеш-произведение является расширением на слабую модульную алгебру A. В § 4 получена слабая структурная теорема в категории слабых (H, A)-модулей Хопфа.

§ 1. Предварительные сведения

Всюду будет использоваться фиксированное поле k. Всюду ниже отображения предполагаются k-линейными. Для коалгебры C через $\Delta(c) = c_1 \otimes c_2$, $c \in C$, обозначается копроизведение в ней; для левого (правого) C-комодуля M его кодействие обозначается через $\rho(m) = m_{(-1)} \otimes m_{(0)}$ ($\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$), $m \in M$. Все не объясненные здесь термины и обозначения можно найти в [12].

Напомним некоторые понятия и утверждения.

Определение. Пусть H — алгебра и одновременно коалгебра. Если H удовлетворяет условиям

$$\Delta(xy) = \Delta(x)\Delta(y), \tag{1.1}$$

$$\Delta^2(1_H) = (\Delta(1_H) \otimes 1_H)(1_H \otimes \Delta(1_H)), \quad \Delta^2(1_H) = (1_H \otimes \Delta(1_H))(\Delta(1_H) \otimes 1_H), \tag{1.2}$$

$$\varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_1)\varepsilon(y_2z), \quad \varepsilon(xyz) = \varepsilon(xy_2)\varepsilon(y_1z) \tag{1.3}$$

для любых $x, y, z \in H$, где $\Delta(1_H) = 1_1 \otimes 1_2$ и $\Delta^2 = (\Delta \otimes I)\Delta$, то она называется *слабой биалгеброй* [1]. Если к тому же она удовлетворяет условию

$$x_1S(x_2) = \varepsilon(1_1x)1_2, \quad S(x_1)x_2 = 1_1\varepsilon(x1_2), \quad S(x_1)x_2S(x_3) = S(x), \tag{1.4}$$

то она называется *слабой алгеброй Хопфа со слабым антиподом* S.

Для произвольной слабой биалгебры H определим отображения $\sqcap^L_H, \sqcap^R_H :$ $H \to H$, полагая

$$\sqcap^L(x) = \varepsilon(1_1x)1_2; \quad \sqcap^R(x) = 1_1\varepsilon(x1_2). \tag{1.5}$$

Обозначим образ $\sqcap^L(H)$ через H^L и образ $\sqcap^R(H)$ — через H^R. Заметим, что H — обычная биалгебра в том и только в том случае, если $\Delta(1_H) = 1_H \otimes 1_H$, и в том и только в том случае, если ε — мультипликативное отображение (см. [1, с. 391]).

Согласно [1] для слабой алгебры Хопфа H выполнены следующие условия $(W1)$–$(W9)$:

$$\Delta(1_H) = 1_1 \otimes 1_2 \in H^R \otimes H^L; \tag{$W1$}$$

$$S(hg) = S(g)S(h), \ S(1_H) = 1_H, \quad \Delta(S(h)) = S(h_2) \otimes S(h_1), \varepsilon S = \varepsilon; \tag{$W2$}$$

$$\sqcap^L(h_1) \otimes h_2 = S(1_1) \otimes 1_2h, \quad h_1 \otimes \sqcap^R(h_2) = h1_1 \otimes S(1_2), \tag{$W3$}$$

стало быть,

$$\sqcap^L(h_1) \otimes h_2 = \sqcap^L(1_1) \otimes 1_2h, \quad h_1 \otimes \sqcap^R(h_2) = h1_1 \otimes \sqcap^R(1_2); \tag{$W3'$}$$

$$h_1 \otimes \sqcap^L(h_2) = 1_1h \otimes 1_2, \quad \sqcap^R(h_1) \otimes h_2 = 1_1 \otimes h1_2; \tag{$W4$}$$

$$xy = yx; \tag{$W5$}$$

$$\Delta(x) = 1_1x \otimes 1_2, \quad \Delta(y) = 1_1 \otimes y1_2; \tag{$W6$}$$

$$\sqcap^L(xh) = x \sqcap^L (h), \quad \sqcap^R(hy) = \sqcap^R(h)y; \tag{$W7$}$$

$$\sqcap^L(h \sqcap^L (g)) = \sqcap^L(hg), \quad \sqcap^R(\sqcap^R(h)g) = \sqcap^R(hg) \tag{$W8$}$$

для любых $h, g \in H$, $x \in H^L$, $y \in H^R$.

Пусть t — левый интеграл в H (т. е. для любого $h \in H$ будет $ht = \sqcap^L(h)t$) и r — правый интеграл в H (т. е. для любого $h \in H$ выполняется $rh = r\sqcap^R(h)$). Тогда

$$t_1 \otimes ht_2 = S(h)t_1 \otimes t_2, \quad r_1 h \otimes r_2 = r_1 \otimes r_2 S(h). \tag{W9}$$

Согласно [13] если H — слабая алгебра Хопфа со слабым биективным антиподом S, то композиционный обратный S^{-1} к S обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered} S^{-1}(hg) = S^{-1}(g)S^{-1}(h), \quad S^{-1}(1_H) = 1_H, \\ \Delta(S^{-1}(h)) = S^{-1}(h_2) \otimes S^{-1}(h_1), \quad \varepsilon S^{-1} = \varepsilon, \end{gathered} \tag{W10}$$

$$\begin{gathered} S^{-1}(h_2)h_1 = 1_2\varepsilon(1_1 S^{-1}(h)) = \sqcap^L S^{-1}(h), \\ h_2 S^{-1}(h_1) = 1_1\varepsilon(S^{-1}(h)1_2) = \sqcap^R S^{-1}(h) \end{gathered} \tag{W10'}$$

для любых $h, g \in H$.

Из [6] известно, что

$$S^{-1}\sqcap^R = \sqcap^L S^{-1}, \quad S^{-1}\sqcap^L = \sqcap^R S^{-1}. \tag{W11}$$

Определение. Пусть H — слабая биалгебра. k-Алгебру A называют *слабой правой H-комодульной алгеброй* [14], если существует слабое правое кодействие ρ в H на A, являющееся также отображением алгебр. Это означает, что $\rho : A \to A \otimes H$ обладает свойствами

$$(\rho \otimes I)\rho = (I \otimes \Delta)\rho, \tag{1.6}$$

$$\rho(1_A)(a \otimes 1_H) = (I \otimes \sqcap^L)\rho(a), \tag{1.7}$$

$$\rho(ab) = \rho(a)\rho(b) \tag{1.8}$$

для любых $a, b \in A$.

Определение. Пусть H — слабая биалгебра. k-Алгебру A называют *слабой левой H-модульной алгеброй* [5, 6], если A — H-модуль относительно действия «$\cdot$» такого, что

$$h \cdot (ab) = (h_1 \cdot a)(h_2 \cdot b), \tag{1.9}$$

$$h \cdot 1_A = \sqcap^L(h) \cdot 1_A \tag{1.10}$$

для любых $a, b \in A$, $h \in H$.

Определение. Пусть H — слабая алгебра Хопфа и A — слабая левая H-модульная алгебра. *Слабое смеш-произведение* $A\#H$ алгебр A и H определяется на k-векторном пространстве $A \otimes_{H^L} H$ (относительном тензорном произведении), где H — левый H^L-модуль относительно его произведения и A — правый H^L-модуль относительно

$$a \leftharpoonup x = S^{-1}(x) \cdot a = a(x \cdot 1_A)$$

для любых $a \in A$, $x \in H^L$. Оно задается известной формулой

$$(a\#h)(b\#g) = a(h_1 \cdot b)\#h_2 g \tag{1.11}$$

для любых $a, b \in A$, $g, h \in H$.

Согласно [5, 15] $A\#H$ является ассоциативной алгеброй с единицей $1_A\#1_H$. Легко показать, что A и H суть подалгебры алгебры $A\#H$.

Определение. Пусть H — слабая алгебра Хопфа и A — слабая правая H-комодульная алгебра. Если M одновременно левый A-модуль и правый H-комодуль такой, что

$$\rho(a \cdot m) = a_{(0)} \cdot m_{(0)} \otimes a_{(1)} m_{(1)} \tag{1.12}$$

для любых $m \in M$, $a \in A$, то M называют *слабым левым и правым* (H, A)-*модулем Дуа — Хопфа*, как в [7, 14], где $\rho(a) = a_{(0)} \otimes a_{(1)}$ для любого $a \in A$ и $\rho(m) = m_{(0)} \otimes m_{(1)}$ для любого $m \in M$.

В дальнейшем мы обозначаем категорию слабых левых и правых (H, A)-модулей Дуа — Хопфа через ${}_A\mathscr{M}^H$.

§ 2. Гомоморфизмы из слабой модульной алгебры в ее слабое смеш-произведение

Далее всегда считаем H слабой алгеброй Хопфа, A — слабой левой H-модульной алгеброй и $A\#H$ — слабым смеш-произведением.

Предложение 1. *Определим левое H-действие на $A\#H$ с модульной структурой, полагая*

$$g \rightharpoonup (a\#h) = (1_A\#g)(a\#h),$$

и левый $A\#H$-модуль на A с модульной структурой, полагая

$$(a\#h) \twoheadrightarrow b = a(h \cdot b)$$

для любых $g \in H$, $a\#h \in A\#H$ и $b \in A$. Тогда найдется изоморфизм

$$F : \operatorname{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) \to (A\#H)^H, \quad \gamma \mapsto \gamma(1_A),$$

левого H-модуля, где $\operatorname{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$ — векторное пространство левых $A\#H$-линейных отображений $A \to A\#H$ ($A\#H$ — левый $A\#H$-модуль относительно его умножения), и $(A\#H)^H$ — инвариантная подалгебра в $A\#H$.

Доказательство. Поскольку H — подалгебра в слабом смеш-произведении $A\#H$, легко увидеть, что $\operatorname{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$ — левый H-модуль относительно $h \bullet \gamma = (1_A\#h) \cdot \gamma$ ($\langle (1_A\#h) \cdot \gamma, a\rangle = \gamma(h \cdot a)$ для любого $a \in A$). Докажем предложение в три этапа.

В первую очередь проверим, что $F(\gamma) = \gamma(1_A) \in (A\#H)^H$. Действительно, для любых $\gamma \in \operatorname{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$, $h \in H$ имеем

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup \gamma(1_A) &= (1_A\#h)\gamma(1_A) = \gamma((1_A\#h) \twoheadrightarrow 1_A) = \gamma(h \cdot 1_A) = \gamma(\sqcap^L(h) \cdot 1_A) \\ &= \gamma((1_A\# \sqcap^L(h)) \twoheadrightarrow 1_A) = \sqcap^L(h) \rightharpoonup f(1_A), \end{aligned}$$

так что $\gamma(1_A) \in (A\#H)^H$.

Теперь покажем, что F биективно. Допустим, что существуют такие $\beta, \gamma \in \operatorname{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$, что $F(\beta) = F(\gamma)$. Тогда для любого $a \in A$

$$\beta(a) = (a\#1_H)\beta(1_A) = (a\#1_H)\gamma(1_A) = \gamma(a),$$

тем самым $\beta = \gamma$ и F инъективно. Для любого $x \in (A\#H)^H$, взяв $\beta(a) = (a\#1_H)x$, для произвольного $b\#h \in A\#H$ получим

$$\begin{aligned} (b\#h)\beta(a) &= (b\#h)(a\#1_H)x = (b(h_1 \cdot a)\#h_2)x \\ &= ((b(h_1 \cdot a))\#1_H)(1_A\#h_2)x = ((b(h_1 \cdot a))\#1_H)(h_2 \rightharpoonup x) \\ &= ((b(h_1 \cdot a))\#1_H)(\sqcap^L(h_2) \rightharpoonup x) = ((b(h_1 \cdot a))\#1_H)(1_A\# \sqcap^L(h_2))x \\ &= ((b(h_1 \cdot a))\# \sqcap^L(h_2))x = (((b(h_1 \cdot a)) \leftharpoondown \sqcap^L(h_2))\#1_H)x \\ &= (b(h_1 \cdot a)(\sqcap^L(h_2) \cdot 1_A)\#1_H)x = (b(h_1 \cdot a)(h_2 \cdot 1_A)\#1_H)x \\ &= (b(h \cdot a)\#1_H)x = (((b\#h) \twoheadrightarrow a)\#1_H)x = \beta((b\#h) \twoheadrightarrow a), \end{aligned}$$

стало быть, $\beta \in \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$, $F(\beta) = \beta(1_A) = x$, и F сюръективно.

Наконец, проверим, что F H-линейно.

В самом деле, для любых $h \in H$, $\gamma \in \mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$ имеем

$$\begin{aligned} h \rightharpoonup F(\gamma) &= h \rightharpoonup \gamma(1_A) = (1_A\#h)\gamma(1_A) = \gamma(1_A\#h \twoheadrightarrow 1_A) \\ &= ((1_A\#h)\gamma)(1_A) = F((1\#h)\cdot\gamma) = F(h \bullet \gamma). \end{aligned}$$

Пусть H — слабая алгебра Хопфа и P — левый H-модуль. Тогда $H \otimes_{H^L} P$ — левый H-модуль, действие которого задается формулой $g(h \otimes p) = gh \otimes p$, где H — правый H^L-модуль относительно умножения. Отсюда $(H \otimes_{H^L} P)^H = \int^\ell \otimes_{H^L} P$, где $\int^\ell$ — левое интегральное пространство в H.

Предложение 2. *Пусть H — слабая алгебра Хопфа с биективным слабым антиподом S. Тогда*

$$(A\#H)^H = \left(1_A\# \int^\ell\right)(A\#1_H).$$

Доказательство. Определим отображение

$$\phi : H \otimes_{H^L} A \to A\#H, \quad h \otimes a \mapsto (1_A\#h)(a\#1_H).$$

Это изоморфизм левого H-модуля с обратным

$$\phi^{-1} : A\#H \to H \otimes_{H^L} A, \quad a\#h \mapsto h_2 \otimes_{H^L} S^{-1}(h_1)\cdot a.$$

Докажем сначала, что ϕ и ϕ^{-1} корректно определены. В самом деле, для любых $h \in H$, $x \in H^L$ и $a \in A$ имеем

$$\begin{aligned} \phi(hx \otimes a) &= (1_A\#hx)(a\#1_H) = (1_A\#h)(1_A\#x)(a\#1_H) \\ &= (1_A\#h)(x_1\cdot a\#x_2) \overset{(W6)}{=} (1_A\#h)(1_1x\cdot a\#1_2) \\ &= (1_A\#h)(((1_1x\cdot a) \leftharpoonup 1_2)\#1_H) \\ &= (1_A\#h)((1_1\cdot(x\cdot a))(1_2\cdot 1_A)\#1_H) \\ &= (1_A\#h)(x\cdot a\#1_H) = \phi(h \otimes x\cdot a), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \phi^{-1}(a \otimes xh) &= (xh)_2 \otimes S^{-1}((xh)_1)\cdot a = x_2h_2 \otimes S^{-1}(x_1h_1)\cdot a \\ &= 1_2h_2 \otimes S^{-1}(1_1xh_1)\cdot a \overset{(W5)}{=} 1_2h_2 \otimes S^{-1}(x1_1h_1)\cdot a \\ &\overset{(1.1)}{=} h_2 \otimes S^{-1}(h_1)S^{-1}(x)\cdot a = h_2 \otimes S^{-1}(h_1)\cdot(a \leftharpoonup x) \\ &= \phi^{-1}((a \leftharpoonup x)\#h). \end{aligned}$$

Теперь докажем биективность ϕ. Действительно, для любых $a\#h \in A\#H$, $h \otimes a \in H \otimes_{H^L} A$, имеем

$$\begin{aligned} \phi\phi^{-1}(a\#h) &= \phi(h_2 \otimes S^{-1}(h_1)\cdot a) = (1_A\#h_2)(S^{-1}(h_1)\cdot a\#1_H) \\ &= h_2S^{-1}(h_1)\cdot a\#h_3 \overset{(W10')}{=} \sqcap^R S^{-1}(h_1)\cdot a\#h_2 \\ &\overset{(W11)}{=} S^{-1}(\sqcap^L(h_1))\cdot a\#h_2 = (a \leftharpoonup \sqcap^L(h_1))\#h_2 \\ &= a\# \sqcap^L(h_1)h_2 = a\#h, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\phi^{-1}\phi(h\otimes a) &= \phi^{-1}((1_A\#h)(a\#1_H)) = \phi^{-1}(h_1\cdot a\#h_2)\\ &= h_3\otimes S^{-1}(h_2)h_1\cdot a \overset{(W10')}{=} h_3\otimes \sqcap^L S^{-1}(h_1)\cdot a\\ &= h_2\otimes S^{-1}(\sqcap^R(h_1))\cdot a = h_2 S^{-1}(\sqcap^R(h_1))\otimes a\\ &= S^{-1}S(h_2)S^{-1}(\sqcap^L(h_1))\otimes a = S^{-1}(\sqcap^R(h_1)S(h_2))\otimes a\\ &= S^{-1}(S(h))\otimes a = h\otimes a.\end{aligned}$$

Кроме того, ϕ H-линейно, ибо для любых $g\in H$, $h\otimes a\in H\otimes_{H^L} A$ будет

$$g\rightharpoonup\phi(h\otimes a) = (1_A\#g)[(1_A\#h)(a\#1_H)] = (1_A\#gh)(a\#1_H) = \phi(gh\otimes a).$$

Наконец, убедимся в том, что $(A\#H)^H = \phi\big(\int^\ell\otimes A\big)$. В самом деле, для любых $h\in H$, $t\in\int^\ell$ и $a\in A$ имеем

$$\begin{aligned}h\rightharpoonup\phi(t\otimes a) &= \phi(h(t\otimes a)) = \phi(ht\otimes a) = \phi(\sqcap^L(h)t\otimes a)\\ &= \phi(\sqcap^L(h)(t\otimes a)) = \sqcap^L(h)\phi(t\otimes a),\end{aligned}$$

тем самым $\phi(t\otimes a)\in(A\#H)^H$ и $\phi\big(\int^\ell\otimes A\big)\subseteq(A\#H)^H$.

Покажем теперь, что $\phi^{-1}((A\#H)^H)\subseteq\int^\ell\otimes A$. Для любых $b\#g\in(A\#H)^H$ и $h\in H$ будет

$$\begin{aligned}h\phi^{-1}(b\#g) &= h(g_2\otimes S^{-1}(g_1)\cdot b) = hg_2\otimes S^{-1}(g_1)\cdot b,\\ h\phi^{-1}(b\#g) &= \phi^{-1}(h\rightharpoonup(b\#g)) = \phi^{-1}(\sqcap^L(h)\rightharpoonup(b\#g))\\ &= \sqcap^L(h)\phi^{-1}(b\#g) = \sqcap^L(h)(g_2\otimes S^{-1}(g_1)\cdot b)\\ &= \sqcap^L(h)g_2\otimes S^{-1}(g_1)\cdot b.\end{aligned}$$

Из проведенных рассуждений заключаем, что ϕ действует биективно из $\int^\ell\otimes A$ в $(A\#H)^H$, т. е. $(A\#H)^H = \phi\big(\int^\ell\otimes A\big) = \big(1_A\#\int^\ell\big)(A\#1_H)$.

Теорема 1. *Пусть H — слабая алгебра Хопфа с биективным слабым антиподом. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)\neq 0$;

(2) *существует $0\neq t\in\int^\ell$ такое, что отображение $\varphi: A\to A\#H$, $a\mapsto a\#t$ нетривиальное.*

Доказательство. (1)$\Longrightarrow$(2) Пусть $0\neq\phi\in\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$. Тогда по предложениям 1 и 2 $\phi(1_A)\in(A\#H)^H = \big(1_A\#\int^\ell\big)(A\#1_H)$, стало быть, найдется элемент $a'\in A$ такой, что $\phi(1_A) = (1_A\#t)(a'\#1_H)$ для некоторого ненулевого левого интеграла $t\in\int^\ell$. Отсюда для любого $a\in A$ имеем $\phi(a) = (a\#t)(a'\#1_H)$, тем самым существует нетривиальное отображение $\varphi: A\to A\#H$, $a\mapsto a\#t$.

(2)$\Longrightarrow$(1) Пусть существует ненулевой левый интеграл t с нетривиальным отображением $\varphi: A\to A\#H$, $a\mapsto a\#t$. Тогда для произвольного $b\#g\in A\#H$

$$\begin{aligned}(b\#g)\varphi(a) &= (b\#g)(a\#t) = b(g_1\cdot a)\#g_2t\\ &= b(g_1\cdot a)\#\sqcap^L(g_2)t = ((b(g_1\cdot a))\leftharpoonup\sqcap^L(g_2))\#t\\ &= (b(g_1\cdot a))(\sqcap^L(g_2)\cdot 1_A)\#t = b(g_1\cdot a)(g_2\cdot 1_A)\#t\\ &= b(g\cdot a)\#t = (b\#g)\rightharpoonup a\#t = \varphi((b\#g)\rightharpoonup a),\end{aligned}$$

так что $\phi\in\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)$ и $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H)\neq 0$.

Определение. Элемент $a\in A$ называют *элементом с единичным следом*, если существует левый интеграл $t\in\int^\ell$ такой, что $t\cdot a = 1_A$.

Связь наличия элемента с единичным следом в модульной алгебре A со свойством A быть проективным левым $A\#H$-модулем дает

Предложение 3. *В A есть элемент с единичным следом в том и только в том случае, если A является проективным левым $A\#H$-модулем.*

Доказательство. Пусть $t \in \int^\ell$ и $a \in A$ такое, что $t \cdot a = 1_A$. Тогда отображение $\beta : A \to A\#H$, где $\beta(x) = (x\#t)(a\#1_H)$, левое $A\#H$-линейное.

В самом деле, для произвольных $x \in A$, $a'\#h \in A\#H$

$$\begin{aligned}(a'\#h)\beta(x) &= (a'\#h)(x\#t)(a\#1_H) = (a'(h_1 \cdot x)\#h_2t)(a\#1_H)\\ &= (a'(h_1 \cdot x)\# \sqcap^L (h_2)t)(a\#1_H) = ((a'(h_1 \cdot x)) \leftharpoondown \sqcap^L(h_2)\#t)(a\#1_H)\\ &= ((a'(h_1 \cdot x))(\sqcap^L(h_2) \cdot 1_A)\#t)(a\#1_A) = (a'(h_1 \cdot x)(h_2 \cdot 1_A)\#t)(a\#1_H)\\ &= (a'(h \cdot x)\#t)(a\#1_H) = (((a'\#h) \rightharpoonup x)\#t)(a\#1_H)\\ &= \beta((a'\#h) \rightharpoonup x).\end{aligned}$$

Пусть $\alpha : A\#H \to A$, $a\#h \mapsto (a \leftharpoondown \sqcap^L(h))$. Тогда

$$\alpha \quad A\#H\text{-линейно.} \tag{2.1}$$

Действительно, для любых $a\#h$, $b\#g \in A\#H$ имеем

$$\begin{aligned}(a\#h) \twoheadrightarrow \alpha(b\#g) &= (a\#h) \twoheadrightarrow (b \leftharpoondown \sqcap^L(g)) = a(h \cdot (b \leftharpoondown \sqcap^L(g)))\\ &= a(h \cdot (b(\sqcap^L(g) \cdot 1_A))) = a(h_1 \cdot b)(h_2 \cdot (\sqcap^L(g) \cdot 1_A))\\ &= a(h_1 \cdot b)(h_2 \sqcap^L (g) \cdot 1_A) = a(h_1 \cdot b)(\sqcap^L(h_2 \sqcap^L (g)) \cdot 1_A)\\ &\overset{(W8)}{=} a(h_1 \cdot b)(\sqcap^L(h_2g) \cdot 1_A) = (a(h_1 \cdot b)) \leftharpoondown \sqcap^L(h_2g)\\ &= \alpha(a(h_1 \cdot b)\#h_2g) = \alpha((a\#h)(b\#g)),\end{aligned}$$

тем самым α $A\#H$-линейно. Более того, для любого $x \in A$

$$\begin{aligned}\alpha\beta(x) &= \alpha((x\#t)(a\#1_H)) = (x(t_1 \cdot a)) \leftharpoondown \sqcap^L(t_2)\\ &= (x(t_1 \cdot a))(\sqcap^L(t_2) \cdot 1_A) = x(t_1 \cdot a)(t_2 \cdot 1_A) = x(t \cdot a) = x,\end{aligned}$$

так что A — проективный левый $A\#H$-модуль. Допустим, что A — проективный левый $A\#H$-модуль. Тогда α расщепляется, т. е. найдется такое $A\#H$-линейное отображение $\beta : A \to A\#H$, что $\alpha\beta(x) = x$ для любого $x \in A$. Так как по предложению 1 $\mathrm{Hom}_{A\#H}(A, A\#H) \cong (A\#H)^H = \left(1_A\#\int^\ell\right)(A\#1_H)$ — изоморфизм, найдутся два элемента $t \in \int^\ell$ и $a \in A$ такие, что $\beta(1_A) = (1_A\#t)(a\#1_H)$. Тогда

$$\begin{aligned}1_A &= \alpha\beta(1_A) = \alpha((1_A\#t)(a\#1_H)) = \alpha(t_1 \cdot a\#t_2)\\ &= (t_1 \cdot a) \leftharpoondown \sqcap^L(t_2) = (t_1 \cdot a)(\sqcap^L(t_2) \cdot 1_A) = t \cdot a.\end{aligned}$$

Отсюда вытекает, что в A есть элемент с единичным следом.

§ 3. Сепарабельное расширение для слабых модульных алгебр

Пусть $C_{H\otimes H}(H)$ — множество H-централизующих элементов в $H \otimes H$, т. е.

$$C_{H\otimes H}(H) = \{\gamma \in H \otimes H \mid (h \otimes 1_H)\gamma = \gamma(1_H \otimes h) \text{ для любого } h \in H\}.$$

Лемма. *Пусть H — слабая алгебра Хопфа с биективным слабым антиподом S. Тогда существуют отображения*

$$i^L : \int^{\ell} \to C_{H\otimes H}(H), \quad t \mapsto (I\otimes S)\circ\triangle(t),$$

$$i^R : \int^{\Re} \to C_{H\otimes H}(H), \quad r \mapsto (S\otimes I)\circ\triangle(r),$$

где $\int^{\Re}$, как всегда, правое интегральное пространство в H.

Доказательство. Легко заметить, что $i^L(t) = t_1\otimes S(t_2)$. Стало быть, для любого $h\in H$

$$\begin{aligned} t_1\otimes S(t_2)h &= t_1\otimes S(t_2)S(S^{-1}(h)) = t_1\otimes S(S^{-1}(h)t_2) \\ &\overset{(W9)}{=} S(S^{-1}(h))t_1\otimes S(t_2) = ht_1\otimes S(t_2). \end{aligned}$$

Аналогично можно доказать существование второго отображения.

Напомним несколько понятий и утверждений из [16]. Пусть $A\subseteq B$ — расширение кольца. Тогда называют B *левым* (соответственно *правым*) *полупростым расширением* A, если каждая короткая точная последовательность левых B-модулей, расщепляющаяся на левые A-модули, также расщепляется на левые B-модули.

B называют *сепарабельным расширением* A, если отображение $m : B\otimes_A B\to B$, где $m(x\otimes y) = xy$, расщепляется на B-линейное отображение, т. е. существует B-билинейное отображение $\varphi : B\to B\otimes_A B$, где $m\varphi = I$. B — сепарабельное расширение A тогда и только тогда, когда найдется *сепарабельный идемпотент* $\gamma\in B\otimes_A B$ ($(b\otimes_A 1_B)\gamma = \gamma(1_B\otimes_A b)$ для любого $b\in B$) такой, что $m(\gamma) = 1_B$. Если A коммутативно, будем B называть также *сепарабельной A-алгеброй*, когда B — сепарабельное расширение A. Известно, что всякое сепарабельное расширение является полупростым расширением.

Пусть $A\subseteq B$ — расширение колец. Короткая точная последовательность в B-Mod (категории B-модулей) называется (B,A)-*точной*, если она расщепляется в A-Mod. Левый B-модуль M называют (B,A)-*полупростым*, если каждая (B,A)-точная последовательность в $\sigma[{}_BM]$ расщепляется (здесь $\sigma[{}_BM]$ — полная подкатегория в B-Mod, объектами которой являются факторы прямых сумм M).

Теорема 2. *Пусть H — слабая алгебра Хопфа с биективным слабым антиподом S. Пусть существуют правый интеграл t в H и центральный элемент z в A такие, что $S(t)\cdot z = 1_A$. Тогда A является $(A\#H, A)$-полупростым проективным левым $A\#H$-модулем.*

Доказательство. Пусть $\omega = (1_A\#S(t_1))(z\#t_2)\in A\#H$. Ввиду равенства $S\circ\sqcap^R = \sqcap^L\circ S$ из [1] для любого $a\in A$, используя центральность z и тот факт, что A — слабая левая H-модульная алгебра, получаем

$$\begin{aligned} \omega \twoheadrightarrow a &= (1_A\#S(t_1)) \twoheadrightarrow ((z\#t_2)\twoheadrightarrow a) = S(t_1)((t_2\cdot a)z) \\ &= (S(t_2)t_3\cdot a)(S(t_1)\cdot z) = (\sqcap^R(t_2)\cdot a)(S(t_1)\cdot z) \\ &= (a \leftharpoonup S(\sqcap^R(t_2)))(S(t_1)\cdot z) = a(\sqcap^L(S(t_2))\cdot 1_A)(S(t_1)\cdot z) \\ &= a(S(t_2)\cdot 1_A)(S(t_1)\cdot z) = a(S(t)\cdot z) = a. \end{aligned}$$

Пусть $M \in \sigma[_{A\#H}H]$. Тогда найдутся множество индексов $\wedge$ и $A\#H$-подмодуль $I \subset A^{(\wedge)}$ такие, что M изоморфно $A\#H$-подмодулю $A^{(\wedge)}/I$. Следовательно, для любого $m \in M$ существует элемент $a_\lambda \in A$, где $m = (a_\lambda)^{(\wedge)} + I$, такой, что

$$\omega \twoheadrightarrow m = (\omega \twoheadrightarrow a_\lambda)^{(\wedge)} + I = (a_\lambda)^{(\wedge)} + I = m. \tag{3.1}$$

Пусть $A\#H$ — A-бимодуль, действия которого задаются умножением обычного смеш-произведения.

Рассмотрим $A\#H$-бимодуль $A\#H \otimes_A A\#H$, у которого действие левого (или правого) модуля определено так: $(b\#g) \rightrightarrows (a\#h \otimes_A c\#p) = (b\#g)(a\#h) \otimes_A c\#p$ $((a\#h \otimes_A c\#p) \leftleftarrows (b\#g) = a\#h \otimes_A (c\#p)(b\#g))$, и

$$\Omega = (1_A\#S(t_1)) \otimes (z\#t_2).$$

Покажем, что

$$\Omega \text{ — } A\#H\text{-централизатор}. \tag{3.2}$$

В самом деле, для любых $h \in H$, $a \in A$ согласно лемме имеем

$$\begin{aligned}
(1_A\#h)\Omega &= (1_A\#hS(t_1)) \otimes (z\#t_2) = (1_A\#S(t_1)) \otimes (z\#t_2h) \\
&= (1_A\#S(t_1)) \otimes (z\# \sqcap^L (t_2)t_3h) = (1_A\#S(t_1)) \otimes (z \leftharpoonup \sqcap^L(t_2)\#t_3h) \\
&= (1_A\#S(t_1)) \otimes (z(t_2 \cdot 1_A)\#t_3h) \\
&= (1_A\#S(t_1)) \otimes (z\#t_2)(1_A\#h) = \Omega(1_A\#h),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Omega(a\#1_H) &= (1_A\#S(t_1)) \otimes (z\#t_2)(a\#1_H) = (1_A\#S(t_1)) \otimes (z(t_2 \cdot a)\#t_3) \\
&= (1_A\#S(t_1)) \otimes ((t_2 \cdot a)z\#t_3) = (1_A\#S(t_1)) \otimes (t_2 \cdot a\#1_H)(z\#t_3) \\
&= (1_A\#S(t_1))(t_2 \cdot a\#1_H) \otimes (z\#t_3) = (S(t_2)t_3 \cdot a\#S(t_1)) \otimes (z\#t_4) \\
&= (\sqcap^R(t_2) \cdot a\#S(t_1)) \otimes (z\#t_3) = (a \leftharpoonup S(\sqcap^R(t_2))\#S(t_1)) \otimes (z\#t_3) \\
&= (a\#S(\sqcap^R(t_2))S(t_1)) \otimes (z\#t_3) = (a\#S(t_1)) \otimes (z\#t_2) \\
&= (a\#1_H)(1_A\#S(t_1)) \otimes (z\#t_2) = (a\#1_H)\Omega.
\end{aligned}$$

Так как $a\#h = (a\#1_H)(1_A\#h)$, то Ω — $A\#H$-централизующий элемент в $A\#H \otimes_A A\#H$.

Пусть M, N суть $A\#H$-модули и $f \in \mathrm{Hom}_A(M, N)$. Поскольку Ω $A\#H$-централизующий, можно показать, что

$$\bar{f} : m \mapsto (1_A\#S(t_1) \cdot f((z\#t_2) \cdot m))$$

является левым $A\#H$-линейным отображением. Отсюда если $M, N \in \sigma[_{A\#H}A]$ и N — прямое слагаемое в M как левый $A\#H$-модуль с A-линейной проекцией $\pi : M \to N$, то $\bar{\pi}$ — $A\#H$-линейная проекция. Из (3.1) вытекает, что

$$\bar{\pi}(n) = (1_A\#S(t_1)) \twoheadrightarrow \pi((z\#t_2) \twoheadrightarrow n) = (1_A\#S(t_1)) \twoheadrightarrow ((z\#t_2) \twoheadrightarrow n) = \omega \twoheadrightarrow n = n.$$

Тем самым каждая короткая последовательность в $\sigma[_{A\#H}A]$, которая расщепляется в A-Mod, расщепляется также в $A\#H$-Mod, т. е. A является $(A\#H, A)$-полупростым левым $A\#H$-модулем. Проективность следует из предложения 3.

Допустим, что H — конечномерная полупростая слабая алгебра Хопфа. По теореме 1 из [6] слабое смеш-произведение $A\#H$ является полупростым расширением модульной алгебры A. Далее мы дадим условие того, что $A\#H$ является сепарабельным расширением на A.

Теорема 3. *Пусть H — кокоммутативная слабая алгебра Хопфа и A — левая H-модульная алгебра. Если A включает центральный элемент с единичным следом, то $A\#H$ — сепарабельное расширение A.*

Доказательство. Пусть z — центральный элемент с единичным следом и $t\cdot z = 1$ для некоторого $t \in \int^{\ell}$. Так как H кокоммутативна, по предложению 1.2 из [13] будет $S^2 = I$. Значит, $p = S(t) \in \int^{R}$ таков, что $S(p)\cdot z = 1_A$.

Пусть $\Omega = (1_A\#S(p_1))\otimes(z\#p_2) = (1_A\#t_2)\otimes(z\#S(t_1))$. Тогда согласно (3.2) Ω $A\#H$-централизующий. Кроме того, известно, что

$$
\begin{aligned}
\mu(\Omega) &= (1_A\#t_2)(z\#S(t_1)) = (t_2\cdot z)\#(t_3S(t_1))\\
&= (t_1\cdot z)\#(t_2S(t_3)) = ((t_1\cdot z) \leftharpoonup \sqcap^L(t_2))\#1_H\\
&= (t_1\cdot z)(\sqcap^L(t_2)\cdot 1_A)\#1_H = (t_1\cdot z)(t_2\cdot 1_A)\#1_H = t\cdot z\#1_H = 1_A\#1_H,
\end{aligned}
$$

тем самым Ω сепарабельно идемпотентен в $A\#H$, т. е. $A\#H$ — сепарабельное расширение A.

Предложение 4. *Пусть H — кокоммутативная слабая алгебра Хопфа и A — коммутативная левая H-модульная алгебра. Тогда равносильны следующие утверждения:*

(1) *$A\#H$ — сепарабельное расширение A;*

(2) *A — проективный левый $A\#H$-модуль;*

(3) *A включает элемент с единичным следом.*

Доказательство. (1)$\Longrightarrow$(2) Очевидно, что отображение $\alpha : A\#H \to A$, $a\#h \mapsto (a \leftharpoonup \sqcap^L(h))$, согласно (2.1) является расщепляемой короткой точной последовательностью в A-Mod. Поскольку сепарабельные расширения всегда представляют собой полупростые расширения, такая последовательность всегда является расщепляемой короткой точной последовательностью в $A\#H$-Mod. Отсюда A проективна как $A\#H$-модуль.

(2)$\Longrightarrow$(3) Следует из предложения 3.

(3)$\Longrightarrow$(1) Вытекает из теоремы 3.

Замечание. Пусть H — конечномерная кокоммутативная полупростая алгебра Хопфа. Тогда H — полупростое расширение алгебры H^L.

Действительно, пусть H кокоммутативна, $H^L = H^R$. Тогда по (W5) и лемме 2.12 из [1] получаем, что H^L — коммутативная слабая левая H-модульная алгебра с тривиальным действием $g\cdot h^L = \sqcap^L(gh^L)$.

Поскольку H — конечномерная полупростая слабая алгебра Хопфа, по теореме 3.13 из [1] найдется элемент $0 \neq t \in \int^{\ell}$ такой, что $\sqcap^L(t) = 1_H$. Очевидно, что $t\cdot 1_H = 1_H$, стало быть, H^L включает элемент с единичным следом. По предыдущему предложению H — сепарабельное расширение H^L, где $H^L\#H \cong H$ как алгебры.

§ 4. Слабая структурная теорема в категории слабых модулей Хопфа

Здесь мы докажем слабую структурную теорему в категории слабых модулей Хопфа.

Определение. k-Пространство M называют *слабым левым* (H, A)*-модулем Хопфа*, если M является H-модулем и левым A-модулем в категории ${}_H\mathscr{M}$, т. е. A действует на M посредством левого действия, обозначаемого через $a\otimes m \mapsto a\cdot m$, такого, что для любых $a, b \in A$, $h \in H$, $m \in M$

(1) $(ab) \cdot m = a \cdot (b \cdot m)$; $1_A \cdot m = m$,
(2) $h \cdot (a \cdot m) = (h_1 \cdot a) \cdot (h_2 \cdot m)$.

Примеры. 1. A является левым (H, A)-модулем Хопфа, у которого левая A-модульная структура дается умножением.

2. Пусть $C = \{h \in H \mid hy = yh$ для любого $y \in H^R\}$ — централизатор H^R в H. Тогда ввиду [3] C является слабой H-модульной алгеброй относительно левого сопряженного действия $h \cdot c = h_1 c S(h_2)$. Тем самым C — слабый левый (H, C)-модуль Хопфа.

3. Пусть M — слабый левый и правый (H, A)-модуль Дуа — Хопфа. Если H — конечномерная слабая алгебра Хопфа, то M — слабый левый (H^*, A)-модуль Хопфа.

По существу, из замечания 2.1.4 в [15] можно заключить, что если A — слабая правая H-комодульная алгебра, то она является слабой левой H^*-модульной алгеброй относительно

$$h^* \cdot a = a_{(0)} \langle h^*, a_{(1)} \rangle$$

для любых $h^* \in H^*$, $a \in A$. Очевидно, что M — левый H^*-модуль относительно

$$h^* \cdot m = m_{(0)} \langle h^*, m_{(1)} \rangle$$

для любых $h^* \in H^*$, $m \in M$. Кроме того, для произвольных $h^* \in H^*$, $m \in M$, $a \in A$ имеем

$$\begin{aligned} h^* \cdot (a \cdot m) &= (a \cdot m)_{(0)} \langle h^*, (a \cdot m)_{(1)} \rangle = a_{(0)} \cdot m_{(0)} \langle h^*, a_{(1)} m_{(1)} \rangle \\ &= a_{(0)} \cdot m_{(0)} \langle h_1^*, a_{(1)} \rangle \langle h_2^*, m_{(1)} \rangle = (h_1^* \cdot a) \cdot (h_2^* \cdot m), \end{aligned}$$

стало быть, M — слабый левый (H^*, A)-модуль Хопфа.

Пусть ${}_A({}_H\mathscr{M})$ — категория слабых левых (H, A)-модулей Хопфа. Тогда категории ${}_A({}_H\mathscr{M})$ и ${}_{A\#H}\mathscr{M}$ изоморфны: если $M \in_A ({}_H\mathscr{M})$, то $M \in_{A\#H} \mathscr{M}$, поскольку $(a\#h) \cdot m = a \cdot (h \cdot m)$, и если $M \in_{A\#H} \mathscr{M}$, то $M \in_A ({}_H\mathscr{M})$ ввиду того, что $h \cdot m = (1_A \# h) \cdot m$ и $a \cdot m = (a \# 1_H) \cdot m$.

Пусть $M \in_A ({}_H\mathscr{M})$ и $M^H = \{m \in M \mid h \cdot m = \sqcap^L(h) \cdot m$ для любого $h \in H\}$. Тогда M^H — левый B-модуль, где $B \equiv A^H = \{a \in A \mid h \cdot a = \sqcap^L(h) \cdot a$ для произвольного $h \in H\}$.

Действительно, для любых $h \in h$, $b \in B$, $m \in M^H$ имеем

$$\begin{aligned} h \cdot (b \cdot m) &= (h_1 \cdot b) \cdot (h_2 \cdot m) = (\sqcap^L(h_1) \cdot b) \cdot (\sqcap^L(h_2) \cdot m) \overset{(W3')}{=} (\sqcap^L(1_1) \cdot b) \cdot (\sqcap^L(1_2 h) \cdot m) \\ &\overset{(W7)}{=} (\sqcap^L(1_1) \cdot b) \cdot (1_2 \sqcap^L(h) \cdot m) = (1_1 \cdot b) \cdot (1_2 h \cdot m) = b \cdot (h \cdot m), \end{aligned}$$

откуда

$$h \cdot (b \cdot m) = b \cdot (h \cdot m). \tag{4.1}$$

Тем самым согласно (4.1)

$$\sqcap^L(h) \cdot (b \cdot m) = b \cdot (\sqcap^L(h) \cdot m) = b \cdot (h \cdot m) = h \cdot (b \cdot m),$$

т. е. $b \cdot m \in M^H$. Отсюда M^H — левый B-модуль (B является ассоциативной алгеброй согласно [6]), и функтор получается следующим образом:

$${}_A({}_H\mathscr{M}) \xrightarrow{(-)^H} {}_B\mathscr{M} .$$

Обратно, если $M \in {}_B\mathscr{M}$, то $A \otimes_B M \in_A ({}_H\mathscr{M})$ ввиду того, что
(i) $h \rightharpoonup (a \otimes_B m) = h \cdot a \otimes_B m$,
(ii) $b \rightharpoondown (a \otimes_B m) = ba \otimes_B m$.

Предложение 5. *Индуцированный функтор $A \otimes_B (-)$ является левым сопряжением для функтора инвариантов $(-)^H$:*

$$_B\mathscr{M} \rightleftarrows {}_A({}_H\mathscr{M}).$$

Доказательство. Сопряженный морфизм задается так:

$$\alpha : \mathrm{Hom}_{A({}_H\mathscr{M})}(A \otimes_B M, N) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{{}_B\mathscr{M}}(M, N^H), \quad \alpha(f)(m) = f(1_A \otimes_B m)$$

$$\beta : \mathrm{Hom}_{{}_B\mathscr{M}}(M, N^H) \longrightarrow \mathrm{Hom}_{A({}_H\mathscr{M})}(A \otimes_B M, N), \quad \beta(g)(a \otimes_B m) = a \cdot g(m).$$

Отметим, что $f(1_A \otimes_B m) \in N^H$, так как для любого $h \in H$ будет

$$h \cdot f(1_A \otimes_B m) = f(h \cdot 1_A \otimes_B m) = f(\sqcap^L(h) \cdot 1_A \otimes_B m) = \sqcap^L(h) \cdot f(1_A \otimes_B m),$$

что завершает доказательство.

Если сопряженное отображение $\lambda_M : A \otimes_B M^H \to M$, $a \otimes_B m \mapsto a \cdot m$, является левым $A\#H$-модульным изоморфизмом для любого слабого левого (H, A)-модуля Хопфа M, будем говорить об этом факте как о *слабой структурной теореме.*

В завершение дадим условие для слабой структурной теоремы.

Определим следующие отображения Морита:

$$(-,-) : A \otimes_B A \to A^H, \quad a \otimes b \mapsto t \cdot (ab),$$

$$[-,-] : A \otimes_B A \to A\#H, \quad a \otimes b \mapsto (a\#t)(b\#1_H),$$

где $0 \neq t \in \int^\ell$. Заметим, что $t \cdot a \in A^H$ для любого $a \in A$.

Если H — конечномерная слабая алгебра Хопфа с S-фиксированным левым интегралом t (т. е. $0 \neq t \in \int^\ell$ такое, что $S(t) = t$), то по теореме 2 из [6] формируется Морита-контекст $[A^H, {}_{A^H}A_{A\#H}, {}_{A\#H}A_{A^H}, A\#H]$.

Теорема 4. *Пусть $0 \neq t \in \int^\ell$. Рассмотрим следующие свойства.*

(1) *Отображение Морита $[-,-] : A \otimes_B A \to A\#H, a \otimes b \mapsto (a\#t)(b\#1_H)$ сюръективно.*

(2) *Слабая структурная теорема имеет место для категории ${}_A({}_H\mathscr{M})$.*

(3) *A^H эквивалентно по Морита $A\#H$.*

Если (1) выполнено, то (2) также выполнено. В частности, если t — интеграл Хаара из определения 3.24 в [1] (т. е. нормированный двусторонний интеграл), то (1) и (3) эквивалентны.

Доказательство. (1) $\Longrightarrow$ (2) Пусть $a_i \otimes_B m_i \in A \otimes_B M^H$ такое, что $\lambda_M(a_i \otimes_B m_i) = 0$, т. е. $a_i \cdot m_i = 0$. Ввиду сюръективности $[-,-]$ найдется $c_j \otimes_B d_j \in A \otimes_B A$ такое, что $[c_j, d_j] = 1_A\#1_H$. Тогда

$$a_i \otimes_B m_i = (1_A\#1_H) \cdot a_i \otimes_B m_i$$

(A есть левый $A\#\,H$-модуль ввиду $(a\#h) \twoheadrightarrow b = a(h \cdot b)$)

$$= [c_j, d_j] \twoheadrightarrow a_i \otimes_B m_i = c_j(d_j, a_i) \otimes_B m_i$$

($[x, y] \twoheadrightarrow z = x(y, z)$ для любых $x, y, z \in A$)

$$= c_j \otimes_B (d_j, a_i) \cdot m_i = c_j \otimes_B (t \cdot (d_j a_i)) \cdot m_i = c_j \otimes_B t \cdot (d_j(a_i \cdot m_i)) = 0,$$

тем самым λ_M инъективно. Легко видеть, что λ_M сюръективно: для произвольного $m \in M$

$$\lambda_M(c_j \otimes_B t \cdot (d_j \cdot m)) = c_j \cdot (t \cdot (d_j \cdot m)) = \underbrace{(c_j(t_1 \cdot d_j)) \cdot (t_2}_{([c_j, d_j] = c_j(t_1 \cdot d_j) \# t_2)} \cdot m) = (1_A \# 1_H) \cdot m = m.$$

Очевидно, что λ_M — $A\#H$-модульное отображение.

(3) $\Longrightarrow$ (1) Поскольку t имеет интеграл Хаара в H, в силу предложения 3.26 и леммы 3.21 из [1] t является S-фиксированным левым интегралом таким, что $\sqcap^L(t) = 1_H$. Согласно теореме 2 из [6] формируется Морита-контекст $[A^H, {}_{A^H} A_{A\#H}, {}_{A\#H} A_{A^H}, A\#H]$. Если A^H эквивалентно по Морита $A\#H$, то отображение Морита $[-,-]$ накрывающее.

(1) $\Longrightarrow$ (3) Допустим, что отображение Морита $[-,-]$ накрывающее. Поскольку t — нормированный левый интеграл, согласно [6] $A^H = t \cdot A$. Легко видеть, что отображение Морита $(-,-) : A \otimes_B A \to A^H, a \otimes b \mapsto t \cdot (ab)$ накрывающее, стало быть, A^H эквивалентно по Морита $A\#H$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Böhm G., Nill F., Szlachányi K.* Weak Hopf algebras. I. Integral theory and C^*-structure // J. Algebra. 1999. V. 221. P. 385–438.
2. *Hayashi T.* Quantum group symmetry of partition functions of IRF models and its applications to Jones's index theory // Comm. Math. Phys. 1993. V. 157, N 2. P. 331–345.
3. *Nikshych D., Vainerman L.* Finite quantum groupoids and their applications // Math. Sci. Res. Inst. Publ. 2002. V. 43, N 1. P. 211–262.
4. *Yamanouchi T.* Duality for generalized Kac algebras and a characterization of finite groupoid algebras // J. Algebra. 1994. V. 163, N 1. P. 9–50.
5. *Nikshych D.* A duality theorem for quantum groupoids // Contemp. Math. 2000. V. 267, N 1. P. 237–243.
6. *Zhang L. Y.* Maschke-type theorem and Morita context over weak Hopf algebras // Sci. China A. 2006. V. 49, N 5. P. 587–598.
7. *Zhang L. Y., Zhu S. L.* Fundamental theorems of weak Doi–Hopf modules and semisimple weak smash product Hopf algebras // Comm. Algebra. 2004. V. 32, N 9. P. 3403–3415.
8. *Doi Y.* On the structure of relative Hopf modules // Comm. Algebra. 1983. V. 11, N 3. P. 243–255.
9. *Cai Z.M., Zhang L.Y.* The fundamental theorem about weak relative $[C, H]$-Hopf modules // Math. Notes. 2007. V. 82, N 4. P. 474–480.
10. *Zhang L. Y.* The structure theorems of weak comodule algebras // Comm. Algebra. 2010. V. 38, N 1. P. 254–260.
11. *Lomp L.* Integral in Hopf algebra over rings // Comm. Algebra. 2004. V. 32, N 8. P. 4687–4711.
12. *Montgomery S.* Hopf algebras and their actions on rings. Washington: Amer. Math. Soc., 1993. (CBMS Regional Conf. Ser. Math.; V. 82).
13. *Zhang L. Y., Chen H. X., Li J. Q.* Twisted products and smash products over weak Hopf algebras // Acta Math. Sci. 2004. V. 24, N 2. P. 247–258.
14. *Böhm G.* Doi–Hopf modules over weak Hopf algebras // Comm. Algebra. 2000. V. 28, N 10. P. 4687–4698.
15. *Nikshych D.* Semisimple weak Hopf algebras // J. Algebra. 2004. V. 275. P. 639–667.
16. *Hirata K., Sugano K.* On semisimple extensions and separable extensions over non-commutative rings // J. Math. Soc. Japan. 1966. V. 18, N 4. P. 360–373.

Статья поступила 5 апреля 2009 г.

Zhang Liangyun (Чжан Лянюнь), Li Yanchao (Ли Яньчао)
College of science, Nanjing Agricultural University,
Nanjing, China
zlyun@njau.edu.cn; m_mp4_22@126.com