Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2011. Том 52, № 1

УДК 517.954

ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ЭЛЕКТРОИМПЕДАНСНОЙ ТОМОГРАФИИ В КРУГЕ

В. А. Шарафутдинов

Аннотация. Геометрическая задача электроимпедансной томографии состоит в восстановлении римановой метрики на компактном многообразии с краем по заданному на краю оператору Дирихле — Неймана (ДН-оператору). Приводится новое элементарное доказательство теоремы единственности: риманова метрика на двумерном круге определяется своим ДН-оператором однозначно с точностью до конформной эквивалентности. Доказывается также теорема существования, описывающая все операторы на окружности, которые являются ДН-операторами римановых метрик на круге.

Ключевые слова: электроимпедансная томография, оператор Дирихле — Неймана, конформное отображение.

1. Введение

Электроимпедансная томография (ЭИТ) состоит в определении электрической проводимости среды, заполняющей некоторую область, по результатам измерений электрических напряжений и токов на границе области. Будем обсуждать анизотропный вариант задачи, в котором электропроводность является симметричным тензором. Математическая постановка задачи следующая. Пусть $(\gamma^{ij}(x))_{i,j=1}^n$ — положительно определенная симметричная матрица, достаточно регулярно зависящая от $x \in \Omega$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с достаточно хорошей границей. Краевая задача

$$\begin{cases} \sum\limits_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i}\big(\gamma^{ij}\frac{\partial u}{\partial x_j}\big) = 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u|_{\partial\Omega} = f \end{cases} \tag{1.1}$$

имеет единственное решение для любой достаточно регулярной функции f на $\partial\Omega$. Не стремясь к максимальной общности, ограничимся рассмотрением гладких γ, $\partial\Omega$ и f. Всюду далее термин «гладкий» используется как синоним термина «класса C^∞». Линейный оператор

$$\Lambda_\gamma : C^\infty(\partial\Omega) \longrightarrow C^\infty(\partial\Omega),$$

определяемый равенством

$$\Lambda_\gamma f = \sum_{i,j=1}^n \nu_i \gamma^{ij} \left.\frac{\partial u}{\partial x_j}\right|_{\partial\Omega},$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 08–01–92001–ННС).

где ν — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Omega$ и u — решение задачи (1.1), называется *оператором Дирихле — Неймана* (ДН-оператором). Физическая задача ЭИТ состоит в восстановлении γ по заданному оператору Λ_γ. Здесь эпитет «физическая» добавлен, чтобы отличить эту задачу от ее геометрического варианта, о котором речь пойдет ниже. Впрочем, как мы увидим, это отличие существенно лишь в двумерном случае.

Чтобы придать задаче геометрический характер, заметим, что участвующий в (1.1) дифференциальный оператор напоминает лапласиан на римановом многообразии. Лапласиан $\Delta_g : C^\infty(M) \to C^\infty(M)$ на римановом многообразии (M, g) выражается в локальных координатах формулой

$$\Delta_g u = \frac{1}{\sqrt{\det g}} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial}{\partial x^i}\left(\sqrt{\det g}\, g^{ij}\,\frac{\partial u}{\partial x^j}\right), \tag{1.2}$$

где $(g^{ij}) = (g_{ij})^{-1}$ и $\det g = \det(g_{ij})$. Покажем, что в размерностях $n \ge 3$ уравнение (1.1) действительно представимо в виде $\Delta_g u = 0$ для подходяще выбранной римановой метрики. Для данной матричной функции (γ^{ij}) мы должны найти (g_{ij}) такую, что

$$\sqrt{\det g}\, g^{ij} = \gamma^{ij}. \tag{1.3}$$

Отсюда $(\det g)^{\frac{n-2}{2}} = \det(\gamma^{ij})$. Следовательно, $g^{ij} = (\det \gamma^{ij})^{\frac{2}{n-2}}\gamma^{ij}$ при $n \ge 3$. При $n = 2$ условие $\det\gamma = 1$ необходимо и достаточно для разрешимости уравнения (1.3).

Пусть (M, g) — компактное риманово многообразие с непустым краем ∂M. Мы включаем требование гладкости M, ∂M и g в определение риманова многообразия. Через g_∂ обозначаем риманову метрику на ∂M, индуцированную метрикой g. ДН-оператор

$$\Lambda_g : C^\infty(\partial M) \longrightarrow C^\infty(\partial M) \tag{1.4}$$

определяется равенством

$$\Lambda_g f = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial M}, \tag{1.5}$$

где ν — единичный вектор внешней нормали к краю и u — решение краевой задачи

$$\begin{cases} \Delta_g u = 0 & \text{в } M,\\ u|_{\partial M} = f. \end{cases} \tag{1.6}$$

Перечислим важнейшие свойства ДН-оператора. Для этого введем гильбертовы пространства $L^2_g(M)$ и $L^2_{g_\partial}(\partial M)$ с помощью скалярных произведений:

$$(u, v)_{L^2_g} = \int\limits_M u\bar v\, dV_g \quad \text{для } u, v \in C(M),$$

$$(u, v)_{L^2_{g_\partial}} = \int\limits_{\partial M} u\bar v\, dV_{g_\partial} \quad \text{для } u, v \in C(\partial M),$$

где dV_g и dV_{g_∂} — формы объема метрик g и g_∂ соответственно. Напомним формулу Грина для лапласиана

$$\begin{aligned}(\Delta_g u, u')_{L^2_g} &- (u, \Delta_g u')_{L^2_g}\\ &= \left(\left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_{\partial M}, u'|_{\partial M}\right)_{L^2_{g_\partial}} - \left(u|_{\partial M}, \left.\frac{\partial u'}{\partial \nu}\right|_{\partial M}\right)_{L^2_{g_\partial}} \quad (u, u' \in C^\infty(M)).\end{aligned} \tag{1.7}$$

Оператор Λ_g формально самосопряжен и неотрицателен:

$$(\Lambda_g f, f')_{L^2_{g_\partial}} = (f, \Lambda_g f')_{L^2_{g_\partial}}, \quad (\Lambda_g f, f)_{L^2_{g_\partial}} \geq 0 \quad (f, f' \in C^\infty(\partial M)). \tag{1.8}$$

Действительно, для $f, f' \in C^\infty(\partial M)$ пусть u — решение задачи (1.6) и u' — решение задачи, получаемой из (1.6) заменой f на f'. Для этих функций левая часть (1.7) равна нулю, и приходим к первой из формул (1.8). Чтобы доказать неотрицательность, полагаем $u := |u|^2/2$ и $u' = 1$ в (1.7):

$$\frac{1}{2}\int\limits_M \Delta|u|^2\, dV_g = \frac{1}{2}\int\limits_{\partial M} \frac{\partial |u|^2}{\partial \nu}\, dV_{g_\partial} = \operatorname{Re}\int\limits_{\partial M} \bar{u}\frac{\partial u}{\partial \nu}\, dV_{g_\partial} = (f, \Lambda_g f)_{L^2_{g_\partial}}$$

для решения u задачи (1.6). Поскольку u — гармоническая функция, $\Delta|u|^2 = 2|\mathrm{grad}_g u|^2$. Вместе с предыдущей формулой это дает

$$(\Lambda_g f, f)_{L^2_{g_\partial}} = \|\mathrm{grad}_g u\|^2_{L^2_g}. \tag{1.9}$$

Для связного M нулевое пространство оператора Λ_g одномерно и состоит из постоянных функций, что следует из (1.9). Образ оператора (1.4) совпадает с пространством $C_0^\infty(\partial M) = \big\{h \in C^\infty(\partial M) \mid \int\limits_{\partial M} h\, dV_{g_\partial} = 0\big\}$ функций с нулевым средним значением. Действительно, условие $\int\limits_{\partial M} h\, dV_{g_\partial} = 0$ необходимо и достаточно для разрешимости краевой задачи

$$\Delta_g u = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \nu}\Big|_{\partial M} = h.$$

Следовательно, обратный оператор

$$\Lambda_g^{-1} : C_0^\infty(\partial M) \to C_0^\infty(\partial M) \tag{1.10}$$

корректно определен в случае связного M.

Хорошо известно [1], что Λ_g является псевдодифференциальным оператором первого порядка. Поэтому для связного M (1.10) продолжается до компактного оператора

$$\Lambda_g^{-1} : L^2_{g\partial,0}(\partial M) \to L^2_{g\partial,0}(\partial M), \tag{1.11}$$

где $L^2_{g\partial,0}(\partial M) = \big\{f \in L^2_{g\partial}(\partial M) \mid \int\limits_{\partial M} f\, dV_{g_\partial} = 0\big\}$.

Геометрическая задача ЭИТ состоит в следующем. Заданы риманово многообразие $(\partial M, g_\partial)$ и оператор Λ_g. Требуется по данным $(\partial M, g_\partial, \Lambda_g)$ восстановить (M, g). При $n = \dim M \geq 3$ эта геометрическая задача эквивалентна приведенной выше физической задаче ЭИТ. При $n = 2$ эти задачи различны. Далее в настоящей статье обсуждается лишь геометрическая задача, преимущественно для $n = 2$.

Замечание. Несколько иное определение ДН-оператора рассматривается в [1]. Вместо (1.5) вводится оператор

$$\Lambda'_g f = (\mathrm{grad}_g u) \lrcorner\, dV_g|_{\partial M},$$

принимающий значения в пространстве $(n-1)$-форм. Здесь dV_g — форма объема метрики g. В качестве данных задачи выступает пара $(\partial M, \Lambda'_g)$, где многообразие ∂M рассматривается без метрики. Эти две постановки эквивалентны. Действительно, метрика g_∂ восстанавливается по главному символу оператора

Λ'_g, как показано в [1]. Если g_∂ известна, то Λ_g и Λ'_g выражаются друг через друга.

Очевиден следующий произвол в решении поставленной задачи. Если $\varphi : M \to M$ — произвольный диффеоморфизм многообразия на себя, фиксирующий край, $\varphi|_{\partial M} = \mathrm{Id}$, то метрика $g' = \varphi^* g$ такова, что $g'_\partial = g_\partial$ и $\Lambda_{g'} = \Lambda_g$. Равенство $g' = \varphi^* g$ означает, что $\langle v, w\rangle_{g'} = \langle (d_p\varphi)v, (d_p\varphi)w\rangle_g$ для любой точки $p \in M$ и любых векторов v и w, принадлежащих касательному пространству T_pM. Здесь и далее $\langle\cdot,\cdot\rangle_g$ означает скалярное произведение касательных векторов в смысле метрики g и $d_p\varphi : T_pM \to T_{\varphi(p)}M$ — дифференциал φ. Отметим, что $\varphi : (M, g') \to (M, g)$ является изометрией римановых многообразий, так что этот произвол вполне естествен с геометрической точки зрения.

Есть гипотеза, что в размерностях ≥ 3 указанный произвол исчерпывает неединственность в решении поставленной задачи: связное компактное риманово многообразие размерности ≥ 3 с непустым краем определяется данными $(\partial M, g_\partial, \Lambda_g)$ однозначно с точностью до изометрии, тождественной на краю. Подчеркнем, что это утверждение в настоящее время является гипотезой, которая доказана лишь в вещественно аналитическом случае [2].

В двумерном случае произвол в решении задачи шире. Напомним, что лапласиан на двумерном римановом многообразии обладает следующей конформной инвариантностью. Если $g' = \rho g$ для $0 < \rho \in C^\infty(M)$, то $\Delta_{g'} = \rho^{-1}\Delta_g$. Если функция ρ удовлетворяет краевому условию $\rho|_{\partial M} = 1$, то $\Lambda_{\rho g} = \Lambda_g$.

Для гладкого отображения $\varphi : N \to N'$ между двумя многообразиями обозначаем через $\varphi^* : C^\infty(N') \to C^\infty(N)$ оператор, определяемый равенством $\varphi^* u = u \circ \varphi$. Указанные выше два произвола исчерпывают неединственность решения задачи в двумерном случае. Именно, справедлива следующая

Теорема 1.1. *Пусть (M, g) и (M', g') — двумерные связные компактные римановы многообразия с непустыми краями и $\varphi : (\partial M, g_\partial) \to (\partial M', g'_\partial)$ — изометрия, сохраняющая ДН-отображение, т. е. такая, что следующий квадрат коммутативен:*

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\partial M) & \xleftarrow{\varphi^*} & C^\infty(\partial M') \\ \Lambda_g \downarrow & & \downarrow \Lambda_{g'} \\ C^\infty(\partial M) & \xleftarrow{\varphi^*} & C^\infty(\partial M'). \end{array} \tag{1.12}$$

Тогда φ продолжается до такого диффеоморфизма $\Phi : M \to M'$, что $\Phi|_{\partial M} = \varphi$ и $\Phi^* g' = \rho g$ для некоторой функции $0 < \rho \in C^\infty(M)$, удовлетворяющей краевому условию $\rho|_{\partial M} = 1$.

Известны два доказательства этой теоремы, принадлежащие Лассасу — Ульману [2] и М. И. Белишеву [3]. Первое доказательство основано на следующем наблюдении. ДН-оператор позволяет определить значения функции Грина $G(x, y)$ для $x, y \in \widetilde{M} \setminus M$, где $\widetilde{M}$ — расширение многообразия M, получаемое путем приклеивания воротничка. Исходя из заданной на $\widetilde{M} \setminus M$ функции Грина, строится некоторый аналитический пучок, линейная компонента связности которого может быть отождествлена с многообразием M. Это доказательство дает усиленный вариант теоремы 1.1, грубо говоря, состоящий в том, что для утверждения теоремы достаточно знания ДН-отображения на любом открытом подмножестве края (см. точную формулировку в [2]). Эти же аргументы Лассаса — Ульмана дают соответствующую теорему единственности для вещественно аналитических многообразий размерности ≥ 3.

Доказательство Белишева основано на известной теореме Гельфанда, утверждающей, что компактное топологическое пространство X однозначно с точностью до гомеоморфизма восстанавливается по банаховой алгебре $C(X)$ непрерывных функций. Аналогичное утверждение справедливо для банаховой алгебры $\mathscr{A}(X)$ голоморфных функций в случае комплексного многообразия X. Белишев замечает, что в условиях теоремы 1.1 ДН-отображение позволяет построить банахову алгебру, изометричную алгебре $\mathscr{A}(M)$.

В настоящей статье приводится третье, альтернативное доказательство теоремы 1.1, правда, лишь при дополнительном предположении односвязности многообразий M и M'. Отметим, что именно этот случай необходим для доказательства граничной жесткости простого двумерного многообразия [4]. В отличие от [2, 3] наше доказательство вполне элементарно, т. е. опирается лишь на стандартные факты комплексного анализа и дифференциальной геометрии поверхностей. Пока мы не можем перенести наши аргументы на неодносвязный случай.

Двумерное связное и односвязное компактное многообразие с непустым краем диффеоморфно кругу. Без ограничения общности можно считать, что многообразия M и M' из теоремы 1.1 совпадают с единичным кругом плоскости $\mathbb{R}^2$, а φ является тождественным отображением граничной окружности. Таким образом, речь идет о следующем утверждении.

Теорема 1.2. *Пусть g и g' — две римановы метрики на круге*

$$D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}^2,$$

индуцирующие одну и ту же длину дуги на окружности

$$\gamma = \partial D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 = 1\}.$$

Если $\Lambda_g = \Lambda_{g'}$, то существует такой диффеоморфизм $\Phi : D \to D$ круга на себя, что $\Phi|_\gamma = \mathrm{Id}$ и $\Phi^* g' = \rho g$ для некоторой функции $0 < \rho \in C^\infty(D)$, удовлетворяющей $\rho|_\gamma = 1$.

Доказательство теоремы 1.2 приводится в следующем разделе. Схема доказательства следующая. Сначала, используя конформную инвариантность лапласиана, сводим вопрос к случаю плоских метрик g и g'. Риманова метрика на двумерном многообразии плоская, если ее гауссова кривизна тождественно равна нулю. Плоская метрика на круге определяет однозначно с точностью до поворота и параллельного переноса изометрическое погружение круга в евклидову плоскость. В простейшем случае это погружение является вложением и отождествляет (D, g) с (M, e), где M — область в $\mathbb{R}^2$, ограниченная простой замкнутой гладкой кривой, и e — стандартная евклидова метрика на $\mathbb{R}^2$. Если погружение, соответствующее метрике g', также является вложением, то теорема 1.2 сводится к частному случаю теоремы 1.1, в котором M и M' являются односвязными областями в $\mathbb{R}^2$, ограниченными замкнутыми гладкими кривыми, а обе метрики g и g' совпадают с e. В этом случае диффеоморфизм $\varphi : \partial M \to \partial M'$, для которого квадрат (1.12) коммутативен, продолжается до конформного отображения $\Phi : M \to M'$. Это устанавливается путем применения ДН-оператора к функциям $x|_{\partial M}$ и $y|_{\partial M}$, где (x, y) — декартовы координаты на плоскости. Остается воспользоваться следующим утверждением: если конформное отображение непрерывно вплоть до границы и сохраняет длину дуги граничной кривой, то оно является композицией поворота и параллельного переноса. Все приведенные рассуждения распространяются с небольшими изменениями на случай погруженных кругов.

Приводимое в следующем разделе доказательство теоремы 1.2 разбито на несколько лемм. Каждая из них (за исключением леммы 2.2) не нова, а лишь представляет известное ранее утверждение в форме, приспособленной для наших целей. Тем не менее приведем полные доказательства для удобства читателя.

Обсудим теперь вопрос существования решения двумерной задачи ЭИТ. Если g — риманова метрика на единичном круге D, то индуцированная метрика g_∂ на окружности $\gamma = \partial D = \{e^{i\theta} \mid \theta \in \mathbb{R}\} \subset \mathbb{C} = \mathbb{R}^2$ однозначно определяется своей формой длины, которая впредь будет обозначаться через ds_g. В свою очередь, 1-форма ds_g на γ однозначно определяется метрикой g, если дополнительно потребовать ее положительность по отношению к стандартной ориентации окружности, т. е. выполнение неравенства $(ds_g)(d/d\theta) > 0$, что далее будет предполагаться. Через e обозначаем стандартную евклидову метрику на круге $D \subset \mathbb{R}^2$.

Теорема 1.3. *Предположим, что гладкая 1-форма ω на окружности $\gamma = \{e^{i\theta}\}$ положительна, т. е. $\omega(d/d\theta) > 0$, и пусть $A : C^\infty(\gamma) \to C^\infty(\gamma)$ — линейный оператор. Для существования римановой метрики g на круге D, удовлетворяющей*

$$ds_g = \omega, \quad \Lambda_g = A, \tag{1.13}$$

необходимо и достаточно существования сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\varphi : \gamma \to \gamma$, для которого следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\gamma) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^\infty(\gamma) \\ A\downarrow & & \downarrow a^{-1}\Lambda_e \\ C^\infty(\gamma) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^\infty(\gamma). \end{array} \tag{1.14}$$

Здесь функция $0 < a \in C^\infty(\gamma)$ определяется формулой

$$\varphi^*\omega = a\, d\theta. \tag{1.15}$$

Доказательство этой теоремы, приводимое в разд. 3, основано на теореме Римана, утверждающей существование конформного отображения между двумя ограниченными односвязными областями. Поясним, почему это утверждение может рассматриваться как теорема существования. Рассматриваем (1.13) как систему уравнений относительно искомой метрики g. Теорема 1.3 дает явное описание пар (ω, A), для которых эта система разрешима. Действительно, пусть Ω — пространство всех гладких положительных 1-форм на окружности γ и Φ — множество всех сохраняющих ориентацию диффеоморфизмов окружности γ. Заметим, что для $\omega \in \Omega$ и $\varphi \in \Phi$ формула (1.15) и требование коммутативности диаграммы (1.14) однозначно определяют линейный оператор $A = A(\omega, \varphi)$. Таким образом, система разрешима тогда и только тогда, когда пара (ω, A) принадлежит семейству

$$\{(\omega, A(\omega, \varphi)) \mid (\omega, \varphi) \in \Omega \times \Phi\}.$$

Насколько известно автору, в ЭИТ ранее был получен лишь один результат, дающий некоторые достаточные для существования условия [5]. С конструктивной точки зрения теорема 1.3 сводит двумерную задачу нахождения метрики g к одномерной задаче построения диффеоморфизма φ.

По мнению автора, значение настоящей работы состоит прежде всего в сведении двумерной геометрической задачи ЭИТ к вопросу классификации плоских метрик, который, в свою очередь, тесно связан с классической теорией конформных отображений. Конформные отображения использовались и ранее в двумерной задаче ЭИТ (см. например [6]). Однако сочетание конформных отображений с плоскими метриками применяется впервые и является, по мнению автора, наиболее концептуальным подходом к задаче. Также кратко обсудим два возможных подхода к нахождению эффективной процедуры восстановления метрики по ее ДН-отображению (см. проблемы 2.6 и 3.2 и комментарии к ним).

2. Плоские метрики на круге

Напомним, что через D мы обозначаем замкнутый единичный круг на плоскости $\mathbb{R}^2$ и через $\gamma = \partial D$ — единичную окружность.

Лемма 2.1. *Пусть g — риманова метрика на D. Существует функция $0 < \rho \in C^\infty(D)$, удовлетворяющая условию $\rho|_\gamma = 1$ и такая, что метрика ρg плоская.*

Доказательство. Ищем эту функцию в виде $\rho = e^{2\varphi}$. Напомним формулу, связывающую гауссову кривизну K метрики g с гауссовой кривизной K_φ метрики $e^{2\varphi}g$: $K_\varphi = e^{-2\varphi}(K - \Delta_g\varphi)$. Эта формула легко выводится из формулы Гаусса, выражающей гауссову кривизну через коэффициенты первой квадратичной формы [7]. Таким образом, функция φ должна решать краевую задачу

$$\Delta_g\varphi = K \text{ в } D, \quad \varphi|_\gamma = 0.$$

Решение этой задачи существует и единственно. $\square$

Отметим, что односвязность несущественна для доказательства леммы 2.1, т. е. аналогичное утверждение справедливо для любого двумерного компактного риманова многообразия с краем. Лемма 2.1 сводит теорему 1.2 к следующему утверждению.

Лемма 2.2. *Пусть g и g' — две плоские римановы метрики на D, индуцирующие одну и ту же длину дуги на γ. Если $\Lambda_g = \Lambda_{g'}$, то существует такой диффеоморфизм $\Phi : D \to D$, что $\Phi|_\gamma = \mathrm{Id}$ и $\Phi^* g' = g$.*

Окружность γ играет важную роль при рассмотрении ДН-оператора. Но в некоторых из наших вспомогательных рассуждений роль γ несущественна и, чтобы избежать отдельного обсуждения граничных точек, удобно рассматривать D в качестве замкнутого подмножества открытого круга $D_\varepsilon = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1 + \varepsilon\}$ для некоторого $\varepsilon > 0$.

Лемма 2.3. *Каждая плоская метрика на D продолжается до плоской метрики на D_ε для некоторого $\varepsilon > 0$.*

Доказательство. Пусть g — плоская метрика на D и $\gamma(v)$ — параметризация окружности γ длиной дуги v в метрике g. Рассматриваем $\gamma(v)$ как гладкую L-периодическую функцию переменной $v \in \mathbb{R}$, где L — длина γ. Для каждого v пусть $\beta_v : [0, \varepsilon) \to D$ — геодезическая метрики g, выходящая из точки $\gamma(v)$ ортогонально γ и параметризованная длиной дуги. Отображение $E : [0, \varepsilon) \times \mathbb{R} \to D$, $E(u, v) = \beta_v(u)$, гладкое, и при достаточно малом $\varepsilon > 0$ числа u и $v \pmod L$ могут рассматриваться в качестве координат, определенных в некоторой окрестности $U \subset D$ окружности γ. Это так называемые полугеодезические координаты с базисной кривой γ. Метрика g выражается в этих координатах формулой

$$ds_g^2 = du^2 + G^2(u, v)\, dv^2 \tag{2.1}$$

с некоторой гладкой положительной функцией $G(u, v)$. Эта функция удовлетворяет условию

$$G(0, v) = 1, \tag{2.2}$$

поскольку v — длина дуги на γ. Гауссова кривизна метрики (2.1) выражается формулой [7]

$$K = -\frac{1}{G}\frac{\partial^2 G}{\partial u^2}. \tag{2.3}$$

Так как g — плоская метрика, функция G удовлетворяет уравнению $G_{uu} = 0$. Вместе с (2.2) это дает $G(u, v) = 1 + uk(v)$. Таким образом, (2.1) приобретает вид

$$ds_g^2 = du^2 + (1 + uk(v))^2\, dv^2 \tag{2.4}$$

с некоторой гладкой L-периодической функцией $k(v)$.

Продолжим E до гладкого L-периодического по второй переменной отображения $E : (-\varepsilon, \varepsilon) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ и доопределим метрику g для отрицательных u той же формулой (2.4), которая имеет смысл при $1 + uk(v) > 0$. Переменные u и $v \,(\operatorname{mod} L)$ образуют систему координат в некоторой окрестности $U' \subset \mathbb{R}^2$ окружности γ, на которую метрика g продолжается формулой (2.4). $\square$

Если $w : D_\varepsilon \to \mathbb{R}^2$ — гладкое погружение и e — стандартная евклидова метрика на $\mathbb{R}^2$, то w^*e — плоская метрика на D_ε. Оказывается, все плоские метрики в круге получаются таким образом.

Лемма 2.4. *Пусть g — плоская метрика на D_ε. Существует риманово погружение $w : (D_\varepsilon, g) \to (\mathbb{R}^2, e)$.*

Доказательство. *Римановым погружением* называем гладкое отображение $w : D_\varepsilon \to \mathbb{R}^2$, дифференциал которого $d_p w : (T_p D_\varepsilon, g) \to (\mathbb{R}^2, e)$ является изометрией для всех $p \in D_\varepsilon$. Сначала установим, что у любой точки $p \in D_\varepsilon$ найдутся окрестность $U \subset D_\varepsilon$ и изометрическое вложение $w : (U, g) \to (\mathbb{R}^2, e)$. Для этого выберем проходящую через p геодезическую $c : (-\delta, \delta) \to D_\varepsilon$, параметризованную длиной дуги, и определим в окрестности U точки p полугеодезическую систему координат с базисной кривой c. Метрика g выражается формулой (2.4) в выбранных координатах. Функция $k(v)$ в (2.4) совпадает с геодезической кривизной кривой $c(v)$, что следует из стандартной формулы для геодезической кривизны [7]. Поскольку c — геодезическая, $k \equiv 0$ и формула приобретает вид $ds_g^2 = du^2 + dv^2$. Таким образом, координаты (u, v) осуществляют изометрическое вложение $w : (U, g) \to (\mathbb{R}^2, e)$.

Теперь доказательство завершается посредством стандартных рассуждений классической теории аналитического продолжения [8]. Именно, назовем *евклидовым элементом* пару (U, w), где $D_\varepsilon \supset U$ — открытый круг и $w : (U, g) \to (\mathbb{R}^2, e)$ — изометрическое вложение, сохраняющее ориентацию. Если (U_1, w_1) и (U_2, w_2) — два евклидовых элемента, для которых $U_1 \cap U_2 \neq \varnothing$, то существует единственный евклидов элемент (U_2, w_2') такой, что $w_2'|_{U_1 \cap U_2} = w_1|_{U_1 \cap U_2}$ и $w_2' = T \circ w_2$, где T — композиция поворота и параллельного переноса. Будем говорить, что евклидов элемент (U_2, w_2') является *продолжением* евклидова элемента (U_1, w_1) через область $U_1 \cap U_2$. Индукцией по k доказываем, что если $(U_1, w_1), (U_2, w_2), \dots, (U_k, w_k)$ — цепочка евклидовых элементов таких, что $U_i \cap U_{i+1} \neq \varnothing$ $(1 \le i < k)$, то существует единственная цепочка евклидовых элементов $(U_1, w_1), (U_2, w_2'), \dots, (U_k, w_k')$, каждый член которой является продолжением предыдущего.

Далее, повторяя буквально соответствующие рассуждения теории аналитического продолжения, определяем продолжение евклидова элемента (U, w) вдоль непрерывной кривой $c : [0,1] \to D_\varepsilon$, $c(0) \in U$, и убеждаемся, что такое продолжение существует, единственно и не меняется при непрерывной деформации кривой c. Поэтому для односвязного круга D_ε справедлив аналог теоремы о монодромии: для заданного евклидова элемента (U, w) существует единственное риманово погружение $(D_\varepsilon, g) \to (\mathbb{R}^2, e)$, совпадающее с w на U. $\square$

Напомним, что *комплексная структура* на двумерном многообразии M — это максимальный атлас $\mathscr{C} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$, состоящий из открытых множеств $U_\alpha \subset M$, $\bigcup\limits_\alpha U_\alpha = M$ и гомеоморфизмов φ_α множества U_α на некоторое открытое множество в $\mathbb{R}^2 = \mathbb{C}$, для которых функции $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ голоморфны. Комплексная структура на M определяет комплексную структуру на касательных пространствах T_pM, т. е. умножение касательных векторов на комплексные числа, так что каждое T_pM становится одномерным комплексным векторным пространством. Обратно, если в касательных пространствах T_pM введена комплексная структура, гладко зависящая от $p \in M$, то говорят, что на M задана *почти комплексная структура*.

Пусть $(M, \mathscr{C})$ и $(M', \mathscr{C}')$ — одномерные комплексные многообразия и $B \subset M$ $(B' \subset M')$ — замкнутая область, ограниченная простой замкнутой гладкой кривой. Пусть $\mathscr{C}|_{\,\mathrm{int}\,B}$ $(\mathscr{C}'|_{\,\mathrm{int}\,B'})$ — ограничение комплексной структуры $\mathscr{C}$ на внутренность $\mathrm{int}\,B$ области B (ограничение $\mathscr{C}'$ на $\mathrm{int}\,B'$). Согласно теореме Келлога [9] (см. также [10, теорема 1.8]) любой голоморфизм (конформное отображение) $\varphi : (\mathrm{int}\,B, \mathscr{C}|_{\,\mathrm{int}\,B}) \to (\mathrm{int}\,B', \mathscr{C}'|_{\,\mathrm{int}\,B'})$ продолжается до гладкого диффеоморфизма (обозначаемого той же буквой) замкнутых областей $\varphi : B \to B'$. Последнее отображение будем называть *голоморфизмом замкнутых областей* и обозначать через $\varphi : (B, \mathscr{C}|_{\,\mathrm{int}\,B}) \to (B', \mathscr{C}'|_{\,\mathrm{int}\,B'})$.

Лемма 2.5. *Пусть g — плоская метрика на круге D_ε $(\varepsilon > 0)$ и $w : (D_\varepsilon, g) \to (\mathbb{C}, e)$ — риманово погружение. Существует единственная комплексная структура $\mathscr{C}_g$ на D_ε такая, что $w : (D_\varepsilon, \mathscr{C}_g) \to \mathbb{C}$ является голоморфной функцией. Для этой комплексной структуры справедливы следующие утверждения.*

(i) *Умножение на мнимую единицу i в касательном пространстве T_pD_ε совпадает с поворотом плоскости T_pD_ε на угол $\pi/2$ в положительном направлении, где угол измеряется в смысле метрики g, а ориентация на $D_\varepsilon \subset \mathbb{R}^2$ совпадает со стандартной ориентацией $\mathbb{R}^2$.*

(ii) *Для действительных u и v функция $f = u + iv : (D_\varepsilon, \mathscr{C}_g) \to \mathbb{C}$ голоморфна тогда и только тогда, когда u и v — гармонические функции, т. е. $\Delta_g u = \Delta_g v = 0$, и $\mathrm{grad}_g v = i\,\mathrm{grad}_g u$. В этом случае говорим, что (u, v) — пара сопряженных гармонических функций. Для любой гармонической функции существует сопряженная с ней гармоническая функция.*

(iii) *Если g' — вторая плоская метрика на D_ε и $f : (D_\varepsilon, \mathscr{C}_g) \to (D_\varepsilon, \mathscr{C}_{g'})$ — голоморфизм, то $f^*g' = e^\rho g$ для некоторой гармонической в (D_ε, g) функции ρ.*

Доказательство. Поскольку w — погружение, для каждой точки $p \in D_\varepsilon$ можно выбрать такую окрестность $U_p \subset D_\varepsilon$, что $w_p = w|_{U_p}$ является диффеоморфизмом U_p на некоторое открытое множество в $\mathbb{C}$. Так как $w_p : (U_p, g) \to (\mathbb{C}, e)$ — изометрия, функции перехода линейны, т. е. $\big(w_q \circ w_p^{-1}\big)(z) = a_{pq}z + b_{pq}$ для некоторых $a_{pq}, b_{pq} \in \mathbb{C}$, причем $|a_{pq}| = 1$. Таким образом, $\mathscr{C}'_g = \{(U_p, w_p)\}_{p \in D_\varepsilon}$ является голоморфным атласом на D_ε и определяет комплексную структуру $\mathscr{C}_g$. Любая комплексная структура на D_ε, относительно которой

w является голоморфной функцией, должна содержать атлас $\mathscr{C}'_g$ и, следовательно, совпадает с $\mathscr{C}_g$.

Утверждение (i) следует из того, что дифференциал $d_pw : (T_pD_\varepsilon, g) \to (\mathbb{C}, e)$ есть линейная изометрия, коммутирующая с умножением на i.

В некоторой окрестности произвольной точки комплексного многообразия $(D_\varepsilon, \mathscr{C}_g)$ можно ввести голоморфные координаты $z = x + iy$ так, что метрика g имеет вид

$$ds_g^2 = dx^2 + dy^2. \tag{2.5}$$

В этих координатах $\Delta_g = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial y^2$, почти комплексная структура выражается формулой $i(a\partial/\partial x + b\partial/\partial y) = -b\partial/\partial x + a\partial/\partial y$, а условие голоморфности функции $f = u + iv$ — уравнениями Коши — Римана

$$u_x = v_y, \quad u_y = -v_x. \tag{2.6}$$

Отсюда следует первая часть утверждения (ii).

Докажем, что любая гармоническая функция $u \in C^\infty(D_\varepsilon)$ имеет сопряженную гармоническую функцию. Определим 1-форму ω на D_ε равенством $\omega(X) = \langle X, i\,\mathrm{grad}_g u\rangle_g$ для $X \in T_pD_\varepsilon$. Убедимся, что форма ω замкнута. Действительно, $\omega = -u_y dx + u_x dy$ в локальной системе координат, в которой g выражается формулой (2.5), и условие замкнутости ω совпадает с условием $\Delta_g u = 0$ гармоничности u. Поскольку D_ε односвязно, форма ω точна, т. е. $\omega = dv$ для некоторой $v \in C^\infty(D_\varepsilon)$. Последнее уравнение совпадает с уравнениями Коши — Римана (2.6) в координатах, для которых справедливо (2.5). Следовательно, функция v гармонична и сопряжена с u.

Наконец, докажем (iii). Если f — голоморфизм, то дифференциал $d_pf : T_pD_\varepsilon \to T_{f(p)}D_\varepsilon$ отличен от нуля для любой $p \in D_\varepsilon$ и коммутирует с умножением на i. С помощью утверждения (i) отсюда следует существование такого действительного числа $\rho(p)$, что отображение

$$e^{\rho(p)}d_pf : (T_pD_\varepsilon, g) \to (T_{f(p)}D_\varepsilon, g') \tag{2.7}$$

является линейной изометрией. Функция $\rho(p)$ гладкая. Действительно, если ω и ω' — формы площади метрик g и g' соответственно, то $f^*\omega' = e^{2\rho}\omega$. Поскольку ω и ω' — гладкие 2-формы, отсюда следует гладкость ρ. Изометричность отображения (2.7) эквивалентна равенству $f^*g' = e^\rho g$. Метрика f^*g' плоская, так как g' плоская. Как мы убедились при доказательстве леммы 2.1, для плоской метрики g утверждение «метрика $e^\rho g$ плоская» эквивалентно гармоничности ρ. $\square$

Доказательство леммы 2.2. Пусть g и g' — две плоские метрики на D, индуцирующие одну и ту же длину дуги на γ. Продолжим их до плоских метрик на D_ε ($\varepsilon > 0$), обозначая продолжения опять через g и g'. Пусть $\gamma(s)$, $0 \le s \le L$, — естественная параметризация окружности γ, где s — длина дуги в метриках g и g', причем окружность обходится в положительном направлении при возрастании s. Пусть $\tau = d\gamma/ds$ — единичный касательный к γ вектор и $\nu = \nu(s)$ ($\nu' = \nu'(s)$) — единичный вектор внешней нормали к D в метрике g (в метрике g'). Предположим, что ДН-отображения метрик g и g' совпадают, и обозначим их общее значение через $\Lambda : C^\infty(\gamma) \to C^\infty(\gamma)$.

Пусть $w : (D_\varepsilon, g) \to (\mathbb{C}, e)$ и $w' : (D_\varepsilon, g') \to (\mathbb{C}, e)$ — римановы погружения, существование которых утверждает лемма 2.4, а $\mathscr{C}_g$ и $\mathscr{C}_{g'}$ — соответствующие комплексные структуры на D_ε. Рассматриваем w и w' как голоморфные функции

$$w = u + iv : (D_\varepsilon, \mathscr{C}_g) \to \mathbb{C}, \quad w' = u' + iv' : (D_\varepsilon, \mathscr{C}_{g'}) \to \mathbb{C}$$

с действительными u, v, u', v'.

Отметим, что (u, v) является парой сопряженных гармонических в (D_ε, g) функций и, следовательно, справедливы уравнения Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial \tau}\bigg|_\gamma = -\left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\gamma, \quad \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\gamma = \left.\frac{\partial v}{\partial \tau}\right|_\gamma. \tag{2.8}$$

Согласно определению ДН-отображения для функций

$$\varphi = u|_\gamma \in C^\infty(\gamma), \quad \psi = v|_\gamma \in C^\infty(\gamma) \tag{2.9}$$

справедливы равенства

$$\Lambda\varphi = \Lambda_g \varphi = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|_\gamma, \quad \Lambda\psi = \Lambda_g \psi = \left.\frac{\partial v}{\partial \nu}\right|_\gamma,$$

которые вместе с (2.8) дают

$$\Lambda\varphi = \dot\psi, \quad \Lambda\psi = -\dot\varphi, \tag{2.10}$$

где точка обозначает дифференцирование по s.

Обозначим через $U, V \in C^\infty(D)$ решения краевых задач

$$\begin{cases} \Delta_{g'} U = 0 & \text{в } D, \\ U|_\gamma = \varphi, \end{cases} \qquad \begin{cases} \Delta_{g'} V = 0 & \text{в } D, \\ V|_\gamma = \psi. \end{cases} \tag{2.11}$$

Тогда

$$\Lambda\varphi = \Lambda_{g'} \varphi = \left.\frac{\partial U}{\partial \nu'}\right|_\gamma, \quad \Lambda\psi = \Lambda_{g'} \psi = \left.\frac{\partial V}{\partial \nu'}\right|_\gamma.$$

Вместе с (2.10) это дает

$$\left.\frac{\partial U}{\partial \nu'}\right|_\gamma = \dot\psi = \left.\frac{\partial V}{\partial \tau}\right|_\gamma, \quad \left.\frac{\partial V}{\partial \nu'}\right|_\gamma = -\dot\varphi = -\left.\frac{\partial U}{\partial \tau}\right|_\gamma. \tag{2.12}$$

Таким образом, (U, V) — пара гармонических в (D, g') функций, удовлетворяющих уравнениям Коши — Римана на γ. Отсюда следует, что U и V являются сопряженными гармоническими функциями. Действительно, если обозначить через $\widetilde{V}$ гармоническую сопряженную к U функцию, то из (2.12) вытекает, что $dV(\gamma(s))/ds = d\widetilde{V}(\gamma(s))/ds$. Следовательно, $(V - \widetilde{V})|_\gamma = \text{const}$, поэтому $V - \widetilde{V} = \text{const}$ в D. Таким образом, функция $W = U + iV \in C^\infty(D)$ голоморфна во внутренней части круга D, рассматриваемого как замкнутое подмножество комплексного многообразия $(D_\varepsilon, \mathscr{C}_{g'})$.

Объединим голоморфные функции w и W в диаграмму

$$\begin{tikzcd} & D \arrow[r, phantom, "\subset"] & (D_\varepsilon, \mathscr{C}_g) \arrow[d, "w"] \\ (D_\varepsilon, \mathscr{C}_{g'}) \supset & D \arrow[u, dashed, "\Phi"] \arrow[r, "W"] & \mathbb{C}\,. \end{tikzcd} \tag{2.13}$$

Заметим, что ограничения функций w и W на γ совпадают. Действительно, согласно (2.9) и (2.11) $w(\gamma(s)) = W(\gamma(s)) = \varphi(s) + i\psi(s)$. Отсюда следует совпадение множеств $w(D)$ и $W(D)$. Действительно, пусть $\beta(s) = \varphi(s) + i\psi(s)$. Применяя принцип аргумента [11] к голоморфной функции $w - z$, видим, что точка $z \in \mathbb{C} \setminus \operatorname{Ran}\beta$ принадлежит $w(D)$ тогда и только тогда, когда индекс замкнутой кривой β относительно z отличен от нуля (в этом случае индекс положителен). То же утверждение справедливо для $W(D)$. Следовательно, $w(D) = W(D)$.

Из совпадения образов круга D относительно отображений w и W и того, что w является локальным гомеоморфизмом, следуют существование и единственность непрерывного отображения Φ, делающего диаграмму (2.13) коммутативной и удовлетворяющего краевому условию

$$\Phi|_\gamma = \mathrm{Id}\,. \tag{2.14}$$

Действительно, для любой непрерывной кривой $\delta : [a, b] \to D$, $\delta(a) \in \gamma$, существует единственная непрерывная кривая $\delta' : [a, b] \to D$ такая, что $W \circ \delta = w \circ \delta'$, $\delta(a) = \delta'(a)$. В силу теоремы о монодромии это доказывает существование и единственность непрерывного отображения Φ, удовлетворяющего (2.13), (2.14).

Заметим также, что Φ отображает внутренние точки круга D снова во внутренние точки, поскольку голоморфная функция W переводит внутренние точки D во внутренние точки множества $\operatorname{Ran} W$.

Равенство $w \circ \Phi = W$ и локальная обратимость w влекут голоморфность отображения Φ. Действительно, локально $\Phi = w^{-1} \circ W$, где w^{-1} локально обратное к w.

Применяя принцип аргумента к голоморфной функции Φ и используя краевое условие (2.14), убеждаемся, что отображение Φ биективно. Более того, дифференциал отображения Φ невырожденный во всех точках, поскольку голоморфная функция не может быть инъективной в окрестности своей критической точки. Итак, Φ — голоморфизм.

Применяя последнее утверждение леммы 2.5, получаем $\Phi^* g' = e^\rho g$ для некоторой гармонической в (D, g') функции ρ. Поскольку $\Phi|_\gamma = \mathrm{Id}$, функция ρ обращается в нуль на γ и, следовательно, тождественно равна нулю на D. Тем самым мы построили диффеоморфизм $\Phi : D \to D$, удовлетворяющий $\Phi|_\gamma = \mathrm{Id}$ и $\Phi^* g' = g$. $\square$

Важно отметить, что приведенное доказательство теоремы 1.2 использует условие $\Lambda_g = \Lambda_{g'}$ далеко не в полном объеме. Действительно, мы использовали лишь равенство $\Lambda_g \beta = \Lambda_{g'} \beta$ для функции $\beta(s) = \varphi(s) + i\psi(s) = w(\gamma(s))$ (см. (2.9)). Возникает вопрос: можно ли определить функцию $\beta(s)$ по данным $(\gamma, g_\partial, \Lambda_g)$ нашей задачи? Вместо $\beta(s)$ удобнее использовать геодезическую кривизну $k(s)$ граничной окружности γ относительно плоской метрики g, параметризованную длиной дуги в метрике g. Мы уже использовали эту функцию в (2.4). Поскольку $w : (D, g) \to (\mathbb{R}^2, e)$ — риманово погружение, $k(s)$ совпадает с евклидовой кривизной плоской кривой β. Кривая на плоскости определяется своей кривизной однозначно с точностью до поворота и параллельного переноса. Явное выражение $\beta(s)$ через $k(s)$ дается формулами [7]

$$\beta(s) = \left(x_0 + \int\limits_0^s \sin\alpha(\sigma)\,d\sigma\right) + i\left(y_0 + \int\limits_0^s \cos\alpha(\sigma)\,d\sigma\right), \tag{2.15}$$

где

$$\alpha(s) = \alpha_0 + \int\limits_0^s k(\sigma)\,d\sigma. \tag{2.16}$$

Здесь (x_0, y_0) и α_0 — произвольные постоянные, отвечающие за параллельный перенос и поворот. Таким образом, задача эффективной реконструкции метрики на круге по ее ДН-отображению сводится к следующему вопросу.

Проблема 2.6. *Можно ли выразить геодезическую кривизну $k(s)$ граничной окружности γ относительно плоской метрики g на круге D в терминах* ДН-*отображения Λ_g?*

Насколько этот вопрос не прост, можно судить из следующего. Повторив для плоской метрики вычисления из [1], можно убедиться, что полный символ оператора Λ_g не зависит от функции $k(s)$. Это означает, что информация о $k(s)$ закодирована в сглаживающей части оператора Λ_g.

В силу (2.15), (2.16) условие замкнутости кривой $\beta(s)$, $0 \le s \le L$, выражается равенствами

$$\int\limits_0^L k(s)\,ds = 2\pi n \quad (0 < n \in \mathbb{Z}), \tag{2.17}$$

$$\int\limits_0^L \sin\alpha(s)\,ds = 0, \quad \int\limits_0^L \cos\alpha(s)\,ds = 0. \tag{2.18}$$

В случае положительного решения проблемы 2.6 (2.17), (2.18) приведут к интересным условиям квантования на ДН-оператор.

Наконец, отметим, что не всякая замкнутая гладкая кривая на плоскости ограничивает погруженный диск. Возникает вопрос: каким условиям должна удовлетворять кривизна $k(s)$ плоской кривой $\beta(s)$, чтобы эта кривая была представима в виде $\beta = w \circ \gamma$, где w — погружение круга D в $\mathbb{R}^2$ и $\gamma = \partial D$? Ответ на этот вопрос получен в недавней работе Сабитова [12], правда, лишь в весьма неявной форме. На этом пути могут быть получены дополнительные условия квантования на ДН-оператор.

3. Теорема существования

Здесь мы приводим доказательство теоремы 1.3. Напомним, что для римановой метрики g на единичном круге D через ds_g обозначается соответствующая форма длины на окружности $\gamma = \partial D = \{e^{i\theta}\}$, нормированная условием $(ds_g)(d/d\theta) > 0$, e — стандартная евклидова метрика на D.

Доказательство необходимости. Пусть заданы гладкая положительная 1-форма ω на окружности γ и линейный оператор $A : C^\infty(\gamma) \to C^\infty(\gamma)$. Предположим существование римановой метрики g на круге D, удовлетворяющей $ds_g = \omega$ и $\Lambda_g = A$. Без ограничения общности можно считать метрику g плоской. Продолжим ее до плоской метрики на D_ε для некоторого $\varepsilon > 0$ и рассмотрим D как замкнутую область в комплексном многообразии $(D_\varepsilon, \mathscr{C}_g)$, где $\mathscr{C}_g$ — комплексная структура, существование которой утверждает лемма 2.5. С другой стороны, D является замкнутой областью в $(D_\varepsilon, \mathscr{C}_e)$, где $\mathscr{C}_e$ — стандартная комплексная структура. По теореме Римана существует голоморфизм замкнутых областей $\Phi : (D, \mathscr{C}_e|_{\,\mathrm{int}\,D}) \to (D, \mathscr{C}_g|_{\,\mathrm{int}\,D})$. Полагаем $\varphi = \Phi|_\gamma$.

Покажем, что квадрат (1.14) коммутативен. Для действительной функции $f \in C^\infty(\gamma)$ пусть $u \in C^\infty(D)$ — решение задачи

$$\Delta_g u = 0 \quad \text{в } D, \quad u|_\gamma = f$$

и $v \in C^\infty(D)$ — гармоническая функция, сопряженная с u относительно метрики g. Тогда

$$(Af)(\gamma(s)) = (\Lambda_g f)(\gamma(s)) = \frac{dv(\gamma(s))}{ds},$$

где $\gamma(s)$ — параметризация γ длиной дуги s в метрике g. Полагая в этом равенстве $\gamma(s) = \varphi(e^{i\theta})$, имеем

$$(Af)(\varphi(e^{i\theta})) = \left.\frac{dv(\gamma(s))}{ds}\right|_{\gamma(s)=\varphi(e^{i\theta})}. \tag{3.1}$$

Функция $w = u + iv$ голоморфна в $(D, \mathscr{C}_g|_{\operatorname{int} D})$, стало быть, функция $W = w \circ \Phi = U + iV$ голоморфна в $(D, \mathscr{C}_e|_{\operatorname{int} D})$. Пусть $F = \varphi^* f = U|_\gamma$. Тогда

$$\Lambda_e(\varphi^* f) = \Lambda_e F = \frac{dV(e^{i\theta})}{d\theta}. \tag{3.2}$$

Дифференцируя равенство $V(e^{i\theta}) = v(\varphi(e^{i\theta}))$, получаем

$$\frac{dV(e^{i\theta})}{d\theta} = a(e^{i\theta})\,\left.\frac{dv(\gamma(s))}{ds}\right|_{\gamma(s)=\varphi(e^{i\theta})},$$

где функция $a = (\varphi^*(ds_g))/d\theta = (\varphi^*\omega)/d\theta$ удовлетворяет (1.15). Вместе с (3.1), (3.2) это дает

$$(Af) \circ \varphi = a^{-1}\Lambda_e(\varphi^* f),$$

что эквивалентно коммутативности квадрата (1.14). $\square$

Для доказательства достаточности нам нужна следующая

Лемма 3.1. *Пусть заданы сохраняющий ориентацию диффеоморфизм $\Phi : D \to D$ единичного круга на себя и функция $0 < \rho \in C^\infty(D)$. Положим $\varphi = \Phi|_\gamma : \gamma \to \gamma$ и $a = \rho|_\gamma \in C^\infty(\gamma)$. Определим риманову метрику g на круге D равенством $\Phi^* g = \rho e$, где e — стандартная евклидова метрика. Тогда*

$$\varphi^*(ds_g) = a\,d\theta \tag{3.3}$$

и следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\gamma) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^\infty(\gamma) \\ \Lambda_g \downarrow & & \downarrow a^{-1}\Lambda_e \\ C^\infty(\gamma) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^\infty(\gamma). \end{array} \tag{3.4}$$

Доказательство. Пусть $g' = \Phi^* g = \rho e$. Поскольку $\Phi : (D, g') \to (D, g)$ — изометрия римановых многообразий, справедливо равенство

$$\varphi^*(ds_g) = ds_{g'} \tag{3.5}$$

и диаграмма

$$\begin{array}{ccc} C^\infty(\gamma) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^\infty(\gamma) \\ \Lambda_g \downarrow & & \downarrow \Lambda_{g'} \\ C^\infty(\gamma) & \xrightarrow{\varphi^*} & C^\infty(\gamma) \end{array} \tag{3.6}$$

коммутативна.

Формы длины $ds_e = d\theta$ и $ds_{g'}$ метрик e и $g' = \rho e$ связаны равенством

$$ds_{g'} = a\,d\theta, \quad a = \rho|_\gamma.$$

Отсюда с помощью (3.5) следует (3.3).

Покажем, что

$$\Lambda_{g'} = a^{-1}\Lambda_e, \tag{3.7}$$

т. е. диаграммы (3.4) и (3.6) совпадают. Действительно, для $f \in C^\infty(\gamma)$ пусть $u \in C^\infty(D)$ — решение задачи

$$\Delta_e u = 0 \quad \text{в } D, \quad u|_\gamma = f.$$

Тогда

$$\Lambda_e f = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu_e}\right|_\gamma, \tag{3.8}$$

где ν_e — единичный вектор внешней нормали к γ в евклидовой метрике. Поскольку $\Delta_{g'} = \rho^{-1}\Delta_e$, функция u также является решением задачи

$$\Delta_{g'} u = 0 \quad \text{в } D, \quad u|_\gamma = f$$

и, следовательно,

$$\Lambda_{g'} f = \left.\frac{\partial u}{\partial \nu'}\right|_\gamma, \tag{3.9}$$

где ν' — единичный вектор внешней нормали к γ в метрике g'. Так как $g' = \rho e$, то $\nu' = a^{-1}\nu_e$ и равенство (3.9) переписывается в виде

$$\Lambda_{g'} f = a^{-1}\left.\frac{\partial u}{\partial \nu_e}\right|_\gamma.$$

Сравнивая последнее равенство с (3.8), приходим к (3.7). $\square$

Доказательство достаточности в теореме 1.3. Пусть заданы гладкая положительная 1-форма ω на окружности γ и линейный оператор $A : C^\infty(\gamma) \to C^\infty(\gamma)$. Предположим существование сохраняющего ориентацию диффеоморфизма $\varphi : \gamma \to \gamma$, для которого диаграмма (1.14) коммутативна с функцией $a \in C^\infty(\gamma)$, определяемой формулой (1.15). Продолжим φ до диффеоморфизма $\Phi : D \to D$ и продолжим a до положительной функции $\rho \in C^\infty(D)$. Согласно лемме 3.1 для метрики $g = (\Phi^{-1})^*(\rho e)$ справедливо равенство (3.3) и диаграмма (3.4) коммутативна. Из (1.15) и (3.9) получаем $\varphi^*(ds_g) = \omega$. Из коммутативности диаграмм (1.14) и (3.4) следует, что $A = \Lambda_g$. $\square$

Коммутативность квадрата (3.4) влечет совпадение спектров операторов Λ_g и $a^{-1}\Lambda_e$. Поэтому теорема 1.3 приводит к следующей обратной спектральной задаче: может ли функция $0 < a \in C^\infty(\gamma)$ быть восстановлена, исходя из известного спектра оператора $a^{-1}\Lambda_e$? В случае положительного ответа на этот вопрос участвующий в (1.14) диффеоморфизм φ находится путем интегрирования уравнения (1.15). Для корректной постановки вопроса заметим, что операторы $a^{-1}\Lambda_e$ и $a'^{-1}\Lambda_e$ изоспектральны, если $a' = a \circ T$, где $T : \gamma \to \gamma$ — произвольная изометрия окружности $\gamma = \{e^{i\theta}\}$ на себя, т. е. либо $T(e^{i\theta}) = e^{i(\theta_0+\theta)}$, либо $T(e^{i\theta}) = e^{i(\theta_0-\theta)}$. В этом случае скажем, что функции a и a' эквивалентны.

Проблема 3.2. *Можно ли восстановить функцию $0 < a \in C^\infty(\gamma)$ с точностью до эквивалентности, исходя из известного спектра оператора $a^{-1}\Lambda_e$?*

В заключение отметим, что ДН-оператор евклидовой метрики может быть записан в виде

$$\Lambda_e = \left(-\frac{d^2}{d\theta^2}\right)^{1/2}.$$

Действительно, непосредственно из определения следует, что $\Lambda_e(e^{in\theta}) = |n|e^{in\theta}$ для любого целого n.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lee J., Uhlmann G.* Determining anisotropic real-analytic conductivities by boundary measurements // Comm. Pure Appl. Math. 1989. V. 42. P. 1097–1112.
2. *Lassas M., Uhlmann G.* On determining a Riemannian manifold from the Dirichlet-to-Neumann map // Ann. Sci. École Norm. Sup. 2001. V. 34, N 4. P. 771–787.
3. *Belishev M. I.* The Calderon problem for two-dimensional manifolds by the BC-method // SIAM J. Math. Anal. 2003. V. 35, N 1. P. 172–182.
4. *Pestov L., Uhlmann G.* Two-dimensional compact simple Riemannian manifolds are boundary distance rigid // Ann. Math. 2005. V. 161. P. 1093–1110.
5. *Henkin G., Michel V.* On the explicit reconstruction of a Riemann surface from its Dirichlet-Neumann operator // GAFA. 2007. V. 17. P. 116–155.
6. *Sylvester J.* An anisotropic inverse boundary value problem // Commun. Pure Appl. Math. 1990. V. XLIII. P. 201–232.
7. *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. М.: Наука, 1974.
8. *Гурвиц А., Курант Р.* Теория функций. М.: Наука, 1968.
9. *Kellog O. D.* Harmonic functions and Greens integral // Trans. Amer. Math. Soc. 1913. V. 13. P. 109–132.
10. *Векуа И. Н.* Обобщенные аналитические функции. М.: Наука, 1988.
11. *Лаврентьев М. А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1987.
12. *Сабитов И. Х.* Локально евклидовы метрики с заданной геодезической кривизной края // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2009. Т. 266. С. 218–226.

Статья поступила 1 апреля 2010 г.

Шарафутдинов Владимир Альтафович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
sharaf@math.nsc.ru