Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2011. Том 52, № 2

УДК 512.54

О РАЗРЕШИМЫХ РЯДАХ НЕКОТОРЫХ ГРУПП

В. А. Романьков

Аннотация. Даются решения проблем 17.82 и 17.86б) из Коуровской тетради [1], поставленных Р. Михайловым. А именно: 1) строится пример конечно определенной группы H, в которой пересечение $H^{(\omega)}$ всех членов ряда коммутантов отлично от своего коммутанта; 2) дается пример сбалансированного представления $\langle x_1, x_2, x_3 \mid r_1, r_2, r_3 \rangle$ тривиальной группы, для которого группа $F(x_1, x_2, x_3)/[R_1, R_2]$ не аппроксимируется разрешимыми группами (здесь R_i $(i = 1, 2)$ обозначает нормальное замыкание элемента r_i в свободной группе $F(x_1, x_2, x_3)$). Построение второго из указанных примеров связано с одним из подходов к доказательству гипотезы асферичности Уайтхеда.

Ключевые слова: гипотеза Уайтхеда, асферичность, ряд коммутантов, разрешимая группа, аппроксимируемость, конечно определенная группа.

1. Введение

Двумерный комплекс K называется *асферичным*, если его вторая группа гомотопий тривиальна ($\pi_2(K) = 0$). Это означает, что любое непрерывное отображение $f : \mathbf{S}^2 \to K$ гомотопно эквивалентно тривиальному отображению, при котором двумерная сфера $\mathbf{S}^2$ отображается в точку.

Гипотеза Уайтхеда (1941 г.).

(WC): *Любой подкомплекс двумерного асферичного комплекса асферичен.*

Гипотеза Уайтхеда остается до сих пор неподтвержденной, несмотря на усилия многих специалистов и наличие многочисленных результатов (см. по этому поводу обзорные статьи [2, 3]).

Авторы монографии [4] развивают идеологию, связанную с рассмотрением бесконечных рядов в группах, являющуюся основанием возможных подходов к решению теоретико-групповых и топологических проблем, среди которых присутствует гипотеза Уайтхеда. В свете этой идеологии Р. Михайлов поставил в 17-м выпуске Коуровской тетради [1] следующие проблемы.

17.82. Верно ли, что в любой конечно определенной группе пересечение ряда коммутантов совпадает со своим коммутантом?

17.86 (Простейшие вопросы, относящиеся к гипотезе асферичности Уайтхеда). Предположим, что $\langle x_1, x_2, x_3 \mid r_1, r_2, r_3 \rangle$ — представление тривиальной группы.

а) Доказать, что группа $\langle x_1, x_2, x_3 \mid r_1, r_2 \rangle$ не имеет кручения.

б) Пусть $F = F(x_1, x_2, x_3)$ и $R_i = \langle r_i \rangle^F$. Верно ли, что группа $F/[R_1, R_2]$ аппроксимируется разрешимыми группами? Из положительного ответа следует асферичность любого подкомплекса стягиваемого двумерного комплекса с тремя клетками.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10.01.00383а).

Целью данной работы является построение примеров групп, показывающих, что ответ на вопросы 17.82 и 17.86б) одинаков: «Нет, не верно». Примеры строятся в явном виде.

Пример не нильпотентно аппроксимируемой группы вида $F/[R_1, R_2]$, как в проблеме 17.86б), построен автором этой проблемы в [5].

Заметим, что разрешимая аппроксимируемость групп обсуждаемого вида дает равенство $R_1 \cap R_2 = [R_1, R_2]$, что равносильно справедливости WC для рассматриваемого комплекса. Если такой аппроксимируемости нет, то это еще не означает, что WC неверна. Указанное равенство все равно может выполняться.

2. Предварительные сведения

Пусть g, f — произвольные элементы группы G. Мы обозначаем сопряжение элемента g элементом f через $g^f = fgf^{-1}$, а коммутатор этих элементов — через $[g, f] = gfg^{-1}f^{-1}$. Также g^{-f} означает $fg^{-1}f^{-1}$. Для любых двух подгрупп L, M группы G через $[L, M]$ обозначается их *взаимный коммутант*, другими словами, подгруппа, порожденная всеми коммутаторами вида $[l, m]$, где $l \in L$, $m \in M$. Взаимный коммутант двух нормальных подгрупп группы G также является нормальной подгруппой. Полагаем $G^{(1)} = G$. Обозначим через $G^{(2)} = G' = [G, G]$ *коммутант* группы G. Для $i \in \mathbf{N}$ через $G^{(i+1)}$ обозначается коммутант $(G^{(i)})'$ подгруппы $G^{(i)}$, что приводит к понятию *ряда коммутантов* (*разрешимого ряда*) группы G:

$$G = G^{(1)} \geq G^{(2)} \geq \dots \geq G^{(i)} \geq \dots. \tag{1}$$

Через $G^{(\omega)}$ обозначается пересечение $\bigcap\limits_{i \geq 1} G^{(i)}$ всех членов ряда коммутантов группы G. Говорят, что группа G *аппроксимируется разрешимыми группами*, если для любого нетривиального элемента $g \in G$ найдется гомоморфизм α группы G на разрешимую группу такой, что $\alpha(g) \neq 1$. Ясно, что группа G аппроксимируется разрешимыми группами тогда и только тогда, когда $G^{(\omega)} = 1$.

В любой группе справедливы следующие *коммутаторные тождества*:

$$[xy, z] = [y, z]^x [x, z], \quad [x^{-1}, z] = [x, z]^{-x^{-1}}. \tag{2}$$

В данной работе коммутаторные тождества применяются при доказательствах теоремы 1, лемм 1 и 2.

3. Производные Фокса

Пусть F_n — свободная группа ранга $n \in \mathbf{N}$ с базисом $\{x_1, \dots, x_n\}$. Производные Фокса (см. детальное описание в [6]) определены на F_n со значениями в групповом кольце $\mathbf{Z}F_n$ с линейным продолжением на $\mathbf{Z}F_n$. Приведем их определение.

Для $j = 1, \dots, n$ (*левая*) *производная Фокса*, соответствующая x_j, есть линейное отображение $D_j : \mathbf{Z}F_n \to \mathbf{Z}F_n$, удовлетворяющее следующим условиям:

$$D_j(x_j) = 1, \quad D_j(x_i) = 0 \quad (i \neq j) \tag{3}$$

и для всех $u, v \in F_n$

$$D_j(uv) = D_j(u) + uD_j(v). \tag{4}$$

Непосредственно проверяется, что для любого $D = D_j$ $(j = 1, \dots, n)$ и произвольных элементов $g, f \in F_n$

$$D([g, f]) = (1 - gfg^{-1})D(g) + (g - [g, f])D(f). \tag{5}$$

Производные Фокса в данной работе используются при доказательстве теоремы 2.

4. Пример, дающий отрицательный ответ на вопрос 17.86б) из [1]

Пусть F_3 — свободная группа ранга 3 с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$. Полагаем $r_1 = x_1 u$, где

$$u = \big[[x_1^{-1}, x_2], [x_1, x_2]^{x_3}\big], \tag{6}$$

$r_2 = x_2$, $r_3 = x_3$. Тогда очевидно, что $\langle x_1, x_2, x_3 \mid r_1, r_2, r_3\rangle$ является представлением тривиальной группы. Пусть $R_i = \langle r_i\rangle^{F_3}$ обозначает нормальное замыкание элемента r_i $(i = 1, 2, 3)$ в группе F_3.

Пусть $\mathbf{S}_5$ означает группу всех подстановок на пяти символах $1, \ldots, 5$. Определим гомоморфизм μ группы F_3 в группу $\mathbf{S}_5$, задав следующее отображение базиса:

$$\mu(x_1) = (1, 2, 3), \quad \mu(x_2) = (3, 4, 5), \quad \mu(x_3) = (4, 5). \tag{7}$$

Легко видеть, что гомоморфизм μ сюръективен ($\mu(F_3) = \mathbf{S}_5$). Прямые вычисления дают равенства

$$\mu([x_1, x_2]) = (2, 3, 5), \quad \mu\big([x_1^{-1}, x_2]\big) = (1, 3, 5), \quad \mu([x_1, x_2]^{x_3}) = (2, 3, 4). \tag{8}$$

Отсюда получаем, что

$$\mu(u) = (1, 3, 2), \tag{9}$$

следовательно,

$$\mu(r_1) = 1 \Longrightarrow \mu(R_1) = 1. \tag{10}$$

Определим группу $G = F_3/[R_1, R_2]$. Пусть $\nu : F_3 \to G$ обозначает стандартный эпиморфизм. Так как в этом случае $\mu([R_1, R_2]) = 1$, гомоморфизм μ индуцирует гомоморфизм

$$\bar{\mu} : G \to \mathbf{S}_5, \tag{11}$$

для которого

$$\bar{\mu}(\nu([x_1, x_2])) = (2, 3, 5) \neq 1. \tag{12}$$

Следовательно, образ $\nu([x_1, x_2])$ элемента $[x_1, x_2] \in F_3$ в группе G нетривиален.

Теорема 1. *Группа G не аппроксимируется разрешимыми группами.*

Доказательство. Достаточно установить, что элемент $g = \nu([x_1, x_2])$ принадлежит пересечению $G^{(\omega)}$ ряда коммутантов группы G.

Очевидно, что $g \in G^{(2)}$. Так как $\nu(u) \in G^{(3)}$ и $\nu([x_1 u, x_2]) = 1$ в группе G, пользуясь коммутаторными тождествами (2), получаем, что

$$\nu([x_1, x_2]) = \nu([u, x_2]^{-x_1}) \in G^{(3)}. \tag{13}$$

Аналогично

$$\nu\big([x_1^{-1}, x_2]\big) = \nu([u^{-1}, x_2]^{-x_1}) \in G^{(3)}. \tag{14}$$

Заменим в образе относительно ν выражения (6) элемента u образ коммутатора $[x_1, x_2]$ правой частью (13), а образ коммутатора $[x^{-1}, x_2]$ — правой частью (14). В результате получим включение $\nu(u) \in G^{(4)}$, откуда в силу (13) и (14) следует, что

$$\nu([x_1, x_2]), \nu\big([x_1^{-1}, x_2]\big) \in G^{(4)}. \tag{15}$$

Повторяя этот процесс, докажем, что элемент g принадлежит всем членам ряда коммутантов группы G, т. е.

$$g \in G^{(\omega)}. \tag{16}$$

Следовательно, нетривиальный элемент g принадлежит ядру любого гомоморфизма группы G на разрешимую группу. Группа G не аппроксимируется разрешимыми группами. Теорема доказана.

5. Пример конечно определенной группы H, в которой пересечение всех членов разрешимого ряда $H^{(\omega)}$ отлично от своего коммутанта

Снова возьмем эпиморфизм $\mu : F_3 \to \mathbf{S}_5$, определенный в (7). Пусть $R = \ker(\mu)$, тогда $\mathbf{S}_5 = F_3/R$. Поскольку подгруппа R имеет конечный индекс в группе F_3 ($|F_3 : R| = 5!$), она конечно порождена. Пусть $R = \langle r_1, \dots, r_k \rangle$.

Пусть F_4 — свободная группа ранга 4 с базисом $\{x_1, \dots, x_4\}$. Группа F_3 с базисом $\{x_1, x_2, x_3\}$ естественно вложена в F_4. Рассмотрим представление

$$\mathscr{P}H = \langle x_1, \dots, x_4 \mid [r_i, x_4] \ (i = 1, \dots, k) \rangle, \tag{17}$$

задающее конечно определенную группу H. Пусть $\eta : F_4 \to H$ — стандартный эпиморфизм.

Лемма 1. *Пусть $v = v(x_1, x_2, x_3) \in F_3$. Значение $\eta([v, x_4])$ в группе H равно 1 тогда и только тогда, когда $v \in R$.*

Доказательство. Если $v \in R$, то существует запись вида $v = r_{i_1}^{\varepsilon_1} r_{i_2}^{\varepsilon_2} \dots r_{i_t}^{\varepsilon_t}$, в которой $r_{i_j} \in \{r_1, r_2, \dots, r_k\}$, $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ $(j = 1, 2, \dots, t)$. Пользуясь коммутаторными тождествами (2), перепишем слово $[r, x_4]$ как произведение сопряженных к словам вида $[r_i, x_4]^{\pm 1}$ $(i = 1, \dots, k)$. Значит, $\eta([r, x_4]) = 1$.

Пусть $v \notin R$, т. е. $\mu(v) \neq 1$ в группе $\mathbf{S}_5$. Так как центр группы $\mathbf{S}_5$ тривиален, найдется элемент $h \in \mathbf{S}_5$ такой, что $[\mu(v), h] \neq 1$. Доопределим гомоморфизм μ до гомоморфизма $\mu_h : F_4 \to \mathbf{S}_5$, полагая $\mu_h(x_4) = h$. Гомоморфизм μ_h индуцирует гомоморфизм $\bar{\mu}_h : H \to \mathbf{S}_5$, при котором образом элемента $\eta([v, x_4])$ является элемент $[\mu(v), h] \neq 1$. Значит, $\eta([v, x_4]) \neq 1$.

Лемма доказана.

По лемме 1 группа H может быть представлена следующим образом:

$$H = F_4/[R, x_4]^{F_4}. \tag{18}$$

Лемма 2. *Элемент $f = \eta([x_1, x_4])$ принадлежит $H^{(\omega)}$.*

Доказательство. Заметим, что $\mu(x_1) = (1, 2, 3)$ — элемент знакопеременной подгруппы $\mathbf{A}_5$ группы $\mathbf{S}_5$. Поскольку $\mathbf{A}_5$ проста, она совпадает с любым членом своего ряда коммутантов. Так как μ сюръективен, для любого $i \in \mathbf{N}$ найдется слово $v_i \in F_3^{(i)}$ такое, что $\mu(x_1) = \mu(v_i)$. Это означает существование слов $w_i \in R$ таких, что $x_1 = v_i w_i$ в группе F_3 $(i = 1, 2, \dots)$. Используя тождества (2), получим следующие равенства:

$$f = \eta([x_1, x_4]) = \eta([v_i w_i, x_4]) = [\eta(v_i), \eta(x_4)] \in H^{(i)}. \tag{19}$$

Из произвольности i приходим к требуемому включению $f \in H^{(\omega)}$.

Лемма доказана.

Теорема 2. *Для построенной выше группы H*

$$H^{(\omega)} \neq (H^{(\omega)})'. \tag{20}$$

Доказательство. Ввиду леммы 2 достаточно доказать, что элемент $f = \eta([x_1, x_4])$ подгруппы $H^{(\omega)}$ не принадлежит коммутанту $(H^{(\omega)})'$.

Заметим вначале, что $H/\langle \eta(x_4) \rangle^H \simeq F_3$. Так как $F_3^{(\omega)} = 1$, любое слово $w \in F_4$ такое, что $\eta(w) \in H^{(\omega)}$, принадлежит нормальному замыканию $\langle x_4 \rangle^{F_4}$.

Предположим, что $f = \eta([x_1, x_4]) \in (H^{(\omega)})'$. Тогда в группе F_4 справедливо равенство вида

$$[x_1, x_4] = \prod_{i=1}^{t} [a_i, b_i] \prod_{j=1}^{k} [r_{i_j}, x_4]^{\varepsilon_j f_j}, \tag{21}$$

где $a_i, b_i \in \langle x_4 \rangle^{F_4}$ для $i = 1, \dots, t$; $f_j \in F_4$, $\varepsilon_j \in \{\pm 1\}$ для $j = 1, \dots, k$.

Пусть $D_4 : \mathbf{Z}F_4 \to \mathbf{Z}F_4$ — производная Фокса, соответствующая x_4, а $\lambda : \mathbf{Z}F_4 \to \mathbf{Z}F_3$ — гомоморфизм, для которого $\lambda(x_i) = x_i$ при $i = 1, 2, 3$ и $\lambda(x_4) = 1$. Применив к обеим частям (21) суперпозицию $\lambda \circ D_4$ с использованием свойств (3)–(5), а также учитывая, что $D_4(r_j) = 0$ для всех $j = 1, \dots, k$ и $\lambda(a_i) = \lambda(b_i) = 1$ для $i = 1, \dots, t$, получим равенство

$$x_1 - 1 = \sum_{j=1}^{k} \varepsilon_j \lambda(f_j)(r_{i_j} - 1). \tag{22}$$

Правая часть данного равенства при линейном расширении (с тем же обозначением) гомоморфизма μ на групповое кольцо $\mu : \mathbf{Z}F_3 \to \mathbf{Z}\mathbf{S}_5$ переходит в 0. Это противоречит тому, что $\mu(x_1) \neq 1$ в группе $\mathbf{S}_5$.

Теорема доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Нерешенные вопросы теории групп.* Коуровская тетрадь, 17-е изд. Новосибирск: Изд-во Ин-та математики, 2010.
2. *Bogley W. A.* J. H. C. Whitehead's asphericity question // Two-dimensional homotopy and combinatorial group theory. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. P. 309–334. (LMS Lect. Notes.; V. 197).
3. *Rosebrock S.* The Whitehead conjecture – an overview // Сиб. электрон. мат. изв. 2007. V. 4. P. 440–449.
4. *Mikhailov R., Passi I. B. S.* Lower central and dimension series of groups. Berlin: Springer-Verl., 2009. (Lect. Notes Math.; V. 1952).
5. *Mikhailov R., Passi I. B. S.* Faithfulness of certain modules and residual nilpotence of groups // Int. J. Algebra Comput. 2006. V. 16, N 3. P. 525–539.
6. *Fox R. H.* Free differential calculus. I. Derivation in the free group ring // Ann. Math. 1953. V. 57. P. 547–560.

Статья поступила 6 мая 2010 г.

Романьков Виталий Анатольевич
Омский гос. университет им. Ф. М. Достоевского, кафедра информационных систем,
пр. Мира, 55-А, Омск 644077
romankov48@mail.ru