Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2011. Том 52, № 3

УДК 519.214.6+519.214.4

ПРИНЦИПЫ БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЙ ДЛЯ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С ПРАВИЛЬНО МЕНЯЮЩИМИСЯ РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ СКАЧКОВ

А. А. Боровков

Аннотация. Локальный и расширенный принципы больших уклонений (см. [1, 2]) установлены для случайных блужданий, скачки которых не удовлетворяют условию Крамера, но имеют правильно меняющиеся на бесконечности распределения.

Ключевые слова: принцип больших уклонений, локальный принцип больших уклонений, расширенный принцип больших уклонений, случайные блуждания, правильно меняющиеся распределения.

1. О принципах больших уклонений в метрических пространствах

Пусть $(\mathbb{Y},\rho)$ — метрическое пространство с метрикой ρ и σ-алгеброй $\mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$ борелевских множеств. Пусть далее $\{\eta_n; n=1,2,\dots\}$ — последовательность случайных элементов в $\langle\mathbb{Y},\mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)\rangle$. Если для некоторого множества $B_0\in\mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$ и для любого $\varepsilon>0$ выполняется

$$\lim_{n\to\infty}\mathbb{P}(\eta_n\in(B_0)_\varepsilon)=1, \tag{1.1}$$

где $(B)_\varepsilon$ — ε-окрестность множества B, то для любого множества $B\in\mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$, такого, что $(B_0)_\varepsilon\cap B=\varnothing$ при некотором $\varepsilon>0$, вероятность $P_n(B):=\mathbf{P}(\eta_n\in B)$ стремится к 0 при $n\to\infty$ и будет характеризовать распределение η_n в «области больших уклонений». Если η_n сходится по вероятности к неслучайному элементу $y_0: P_n((y_0)_\varepsilon)\to 1$ при $n\to\infty$, где $(y)_\varepsilon=\{\tilde y\in\mathbb{Y}:\rho(y,\tilde y)<\varepsilon\}$ — ε-окрестность точки y, то (1.1) будет выполнено при $B_0=\{y_0\}$.

В [1] было определено понятие локального принципа больших уклонений (л.п.б.у.). После того, как работа [1] была сдана в печать, выяснилось, что удобнее пользоваться более широким и естественным определением л.п.б.у., приведенным ниже. (Определение в [1] перегружено некоторыми излишними требованиями, в частности, требованием равномерности, не свойственном понятию «локальности», что сужает область применения определения.) Новая версия определения имеет следующий вид.

Определение 1.1. Будем говорить, что последовательность $\{\eta_n\}$ *удовлетворяет локальному принципу больших уклонений в пространстве* $(\mathbb{Y},\rho)$ (л.п.б.у. в пространстве $(\mathbb{Y},\rho)$ или просто л.п.б.у.), если существуют числовая

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке Совета по грантам президента РФ и государственной поддержке ведущих научных школ (код проекта НШ–3695.2008.1).

последовательность $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и функция $D = D(y)\colon\ \mathbb{Y} \to [0,\infty]$, такие, что для любого $y \in \mathbb{Y}$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{z_n}\mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon\to 0} \varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{z_n}\mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) = -D(y). \tag{1.2}$$

Определение 1.1 поясняет вероятностный смысл произведения $z_n D(y)$: *при малых ε значения $-\ln\mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon)$ с ростом n растут приблизительно как $z_n D(y)$*. Из (1.2) следует, что множители z_n и $D(y)$ в этом произведении определяются однозначно с точностью до положительного множителя. Свойство (1.2) в определении 1.1 было названо в [1] *предельным л.п.б.у.*

Отметим, что из определения 1.1 с необходимостью следует *полунепрерывность функции $D(y)$ снизу*, т. е. для любого $y \in \mathbb{Y}$ выполняется

$$\varliminf_{\rho(y_k,y)\to 0} D(y_k) \ge D(y). \tag{1.3}$$

Точнее, если выполнено второе соотношение в (1.2), то справедливо (1.3). Доказательство (1.3) см. в [1].

Определение 1.1 эквивалентно следующему определению (см. [2]).

Определение 1.2. Получается из определения 1.1, если в последнем добавить предположение, что функция $D(y)$ полунепрерывна снизу, а свойство (1.2) заменить свойством: для любого $y \in \mathbb{Y}$ существуют функции $\delta(\varepsilon) \to 0$, $\beta(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ такие, что справедливо неравенство

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln\mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \le -D((y)_{\delta(\varepsilon)}) + \beta(\varepsilon), \tag{1.4}$$

где $D(B) := \inf\limits_{y\in B} D(y)$. Кроме того, при любых $y \in \mathbb{Y}$ и $\varepsilon > 0$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln\mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \ge -D(y). \tag{1.5}$$

Здесь с необходимостью $\delta(\varepsilon) \ge \varepsilon$ (см. теорему 1.1 в [2]).

Обозначим через (B) открытую внутренность множества $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$ (т. е. совокупность всех точек, входящих в B вместе с некоторой окрестностью), через $[B] = \mathbb{Y} \setminus (\overline{B})$ — замыкание B, где $\overline{B}$ — дополнение к B.

Определение 1.3. Будем говорить, что последовательность $\{\eta_n\}$ *удовлетворяет расширенному принципу больших уклонений в пространстве* $(\mathbb{Y},\rho)$ (р.п.б.у. в пространстве $(\mathbb{Y},\rho)$ или просто р.п.б.у.), если существуют числовая последовательность $z_n \to \infty$ при $n \to \infty$ и полунепрерывная снизу функция $D(y)$ такие, что для любого $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y},\rho)$ имеют место неравенства

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln\mathbf{P}(\eta_n \in B) \le -D^{\lim}(B), \tag{1.6}$$

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln\mathbf{P}(\eta_n \in B) \ge -D((B)), \tag{1.7}$$

где

$$D(B) := \inf_{y\in B} D(y), \quad D^{\lim}(B) := \lim_{\delta\downarrow 0} D((B)_\delta). \tag{1.8}$$

Верхний правый индекс lim означает оператор, применяемый к функции множеств $D(B)$, а $D^{\lim}(B)$ есть результат этого применения. В (1.8) принято, что $D(\varnothing) = \infty$, т. е. нижняя грань по пустому множеству равна ∞.

Для того чтобы несколько полнее характеризовать введенные в определениях 1.1–1.3 понятия, будем иногда писать «л.п.б.у. (или р.п.б.у.) с параметрами (z_n, D) или $(z_n, D(y))$».

Если $D^{\lim}(B) = D((B))$, то в правых частях (1.6), (1.7) можно написать $D(B)$ и знак равенства. Смысл этих равенств состоит в том, что асимптотика $\ln \mathbf{P}(\eta_n \in B)$ допускает *факторизацию*, т. е. представляется в виде произведения двух множителей z_n и $D(B)$, первый из которых зависит лишь от n, а второй — лишь от B.

Введенное понятие существенно отличается от принципа больших уклонений (п.б.у.), обычно рассматриваемого в литературе (подробности см., например, в [1–3]). Здесь отметим лишь, что п.б.у. в $(\mathbb{Y}, \rho)$ всегда влечет за собой р.п.б.у., но не наоборот и что р.п.б.у. оказывается справедливым при значительно более широких условиях, чем п.б.у. Одно из отличий р.п.б.у. от п.б.у. состоит в том, что в р.п.б.у. в правой части (1.6) стоит $D^{\lim}(B)$, а не $D([B])$. В этой связи отметим, что если множество $D_v := \{y : D(y) \le v\}$ компактно в $(\mathbb{Y}, \rho)$ при любом $v \ge 0$, то $D([B]) = D^{\lim}(B)$ (см., например, [1]).

Напомним, что множество $T \subset \mathbb{Y}$ называется *вполне ограниченным* (totally bounded) в $\mathbb{Y}$ (см., например, [4]), если для любого $\varepsilon > 0$ существует конечное ε-покрытие множества T (т. е. существует набор точек $y_1, \dots, y_K$ в $\mathbb{Y}$, $K = K(\varepsilon) < \infty$, такой, что $\bigcup\limits_{j=1}^{K} (y_j)_\varepsilon \supset T$). Известно, что если вполне ограниченное множество в полном метрическом пространстве замкнуто, то оно компактно (см., например, [4]). Компакт всегда является вполне ограниченным множеством.

Введем в рассмотрение семейство $\{T_u\}$ вложенных вполне ограниченных множеств T_u, зависящих от параметра u из некоторого вполне упорядоченного множества U: $T_{u_1} \subset T_{u_2}$ при $u_1 < u_2$, так что для сепарабельных пространств $(\mathbb{Y}, \rho)$ выполняется $\bigcup\limits_{u \in U} T_u = \mathbb{Y}$. Последнее означает, что с ростом u множества T_u «накрывают» все бо́льшую часть пространства $\mathbb{Y}$. При этом последовательность множеств $B\overline{T}_u$ сужается до пустого множества, а последовательность BT_u расширяется до множества B. Поэтому естественно ожидать, что для любого фиксированного множества B найдется $u = u(B)$ такое, что при всех $u > u(B)$ выполняется

$$P_n(B\overline{T}_u) < P_n(BT_u). \tag{1.9}$$

Далее рассмотрим класс $\mathscr{K}$ множеств $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{Y}, \rho)$, $D(B) < \infty$, для которых требуется выполнение ослабленной версии неравенства (1.9). Сформулируем более точно.

Для каждого $B \in \mathscr{K}$ найдутся значение $u = u(B)$ и постоянная $c = c(B) < \infty$ такие, что при всех $u > u(B)$ и всех достаточно больших n

$$P_n(B\overline{T}_u) \le cP_n(BT_u). \tag{1.10}$$

Если предполагать, как и в условии [**TB**] *в* [2], *что выполнено соотношение* (1.5) *из л.п.б.у., то постоянную c в* (1.10) *можно заменить на $e^{o(z_n)}$ при $n \to \infty$, где z_n из соотношения* (1.5).

Очевидно, что класс $\mathscr{K}$ непуст: множества $B = T_u\overline{T}_v$, где $v < u$, T_u из семейства $\{T_u\}$, всегда принадлежат $\mathscr{K}$, так как $P_n(T_u\overline{T}_u) = 0$.

Нам понадобится следующее утверждение (теорема 4.1 из [1]).

Теорема 1.1. *Пусть выполнен л.п.б.у. Тогда для любого множества B из $\mathscr{K}$ справедливы неравенства* (1.6), (1.7), *т. е. справедлив р.п.б.у.*

В [1, 2] наряду с (1.10) приведено другое условие на последовательность η_n, обеспечивающее вместе с л.п.б.у. выполнение (1.6), (1.7) и не связанное с каким-либо классом $\mathscr{K}$ (условие [**TB**]). Однако это условие в рассматриваемых ниже задачах оказывается слишком ограничительным и никогда не выполняется.

2. Принципы больших уклонений для сумм случайных величин

Рассмотрим случайное блуждание $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$, порожденное суммами $S_n = \sum\limits_{j=1}^{n} \xi_j$ независимых одинаково распределенных невырожденных случайных величин $\xi_j \underset{d}{=} \xi$, $\mathbf{E}\xi = 0$. Здесь $\mathbb{Y} = \mathbb{R}$, $\rho(y_1, y_2) = |y_1 - y_2|$. Предположим, что функции

$$V(t) := \mathbf{P}(\xi \geq t) \quad \text{и} \quad W(t) := \mathbf{P}(\xi < -t)$$

правильно меняются на бесконечности, т. е. представимы в виде

$$V(t) = t^{-\alpha} L_V(t), \quad W(t) = t^{-\beta} L_W(t), \tag{2.1}$$

где $\alpha > 1$, $\beta > 1$, L_V, L_W — медленно меняющиеся функции при $t \to \infty$. Тогда, как известно (см., например, [5]), при $\eta_n = \frac{S_n}{n}$, $y > 0$, $n \to \infty$ выполняется

$$\mathbf{P}(\eta_n > y) \sim nV(yn), \quad \mathbf{P}(\eta_n < -y) \sim nW(yn). \tag{2.2}$$

Стало быть, для любого фиксированного $\varepsilon \in (0, y)$

$$\mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) \sim n[V((y-\varepsilon)n) - V((y+\varepsilon)n)] \sim nV(n)[(y-\varepsilon)^{-\alpha} - (y+\varepsilon)^{-\alpha}]. \tag{2.3}$$

Если ε мало, то правая часть этого соотношения близка к

$$nV(n) 2\varepsilon\alpha y^{-\alpha-1} \tag{2.4}$$

и, следовательно, при $z_n = \ln n$, $y > 0$ существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (y)_\varepsilon) = -\alpha + 1, \tag{2.5}$$

не зависящий от y и $\varepsilon < y$. Аналогично рассматриваются отрицательные значения y. Следовательно, имеет место л.п.б.у. с функцией уклонений

$$D(y) = \begin{cases} \alpha - 1 & \text{при } y > 0, \\ 0 & \text{при } y = 0, \\ \beta - 1 & \text{при } y < 0. \end{cases} \tag{2.6}$$

Здесь функция уклонений полунепрерывна снизу, но не выпукла. Если рассмотреть семейство вполне ограниченных вложенных множеств $T_u = [-u, u]$, то для множеств B, содержащих какой-нибудь интервал (т. е. обладающих свойством $B \supset (y)_\varepsilon$ при каких-нибудь $y \in \mathbb{R}$ и $\varepsilon > 0$), в силу (2.3), (2.2) при достаточно большом u будем иметь

$$P_n(BT_u) \geq P_n((y)_\varepsilon) \geq c(y)\varepsilon nV(n) \geq P_n(\overline{T}_u) \geq P_n(B\overline{T}_u),$$

где постоянная $c(y)$ определяется из (2.4). Это означает, что выполнено требуемое условие (1.10) при $c = 1$, стало быть, $B \in \mathscr{K}$ и для таких B справедлив р.п.б.у. При этом $D^{\lim}(B) = D([B])$, так как множества T_u компактны.

Таким образом, справедлива

Теорема 2.1. *Если* $\mathbf{E}\xi = 0$ *и выполнено* (2.1), *то имеют место соотношение* (2.5) *и его аналог для отрицательных* y (*т. е. выполнен л.п.б.у.*). *Кроме того, для любого* $B \in \mathscr{K}$ (см. (1.9)) *справедливы неравенства* (1.6), (1.7) (*т. е. справедлив р.п.б.у.*) *при* $D^{\lim}(B) = D([B])$.

Отметим также, что если B таково, что существуют $y_\pm \gtrless 0$ и $\varepsilon > 0$, для которых $(y_\pm)_\varepsilon \subset B$, $(0)_\varepsilon \cap B = \varnothing$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln P_n(B) = 1 - \min(\alpha, \beta). \tag{2.7}$$

Если же $(y_+)_\varepsilon \subset B$, $B \cap (-\infty, 0)_\varepsilon = \varnothing$, то в правой части соотношения (2.7) будет стоять $1 - \alpha$, а второе из условий (2.1) можно не предполагать. Аналогичное утверждение справедливо в случае $B \cup (0, \infty)_\varepsilon = \varnothing$.

3. Принципы больших уклонений в пространстве траекторий

Рассмотрим теперь в качестве случайных элементов η_n траектории $\eta_n = \eta_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{n}$, $0 \le t \le 1$, или их непрерывные версии, т. е. непрерывные ломаные, построенные по узловым точкам $\left(\frac{k}{n}, \frac{S_k}{n}\right)$, $k = 0, \dots, n$.

Здесь в качестве $\mathbb{Y}$ рассмотрим пространство $\mathbb{G} = \mathbb{G}(0,1)$ функций ограниченной вариации на $[0,1]$ без сингулярных непрерывных компонент, т. е. функций $f(t)$, представимых в виде сумм $f(t) = f_a(t) + f_d(t)$ абсолютно непрерывных $f_a(t)$ и дискретных $f_d(t)$ (ступенчатых, кусочно постоянных) функций. Через $\mathbb{S} \subset \mathbb{G}$ обозначим подпространство из $\mathbb{G}$ ступенчатых функций ($f_a(t) \equiv 0$, если $f \in \mathbb{S}$). В качестве метрики в $\mathbb{G}$ будем рассматривать метрику ρ, определенную следующим образом.

Для любой функции $f = f(\cdot) \in \mathbb{G}$ определим график этой функции как односвязное множество Γf в $[0,1] \times \mathbb{R}$ такое, что его сечение в точке t совпадает с отрезком $[f(t-0), f(t+0)]$. Это множество совпадает с кривой $(t, f(t))$ везде, за исключением точек разрыва функции f. Точки $(t, f(t-0))$, $(t, f(t+0))$ графика Γf соединяются (если они не совпадают) отрезком прямой. В каждой точке множества Γf построим открытый шар (в евклидовой метрике) радиуса ε в двумерном пространстве $[0,1] \times \mathbb{R}$. Область, полученную пересечением полосы $0 \le t \le 1$ с объединением этих шаров, обозначим через $(\Gamma f)_\varepsilon$ и назовем ε-*окрестностью графика* Γf функции f.

Будем говорить, что *расстояние* $\rho(f,g)$ *между* f *и* g *меньше* ε, если одновременно $\Gamma f \in (\Gamma g)_\varepsilon$ и $\Gamma g \in (\Gamma f)_\varepsilon$.

Другими словами,

$$\rho(f,g) = \max\{r(f,g), r(g,f)\},$$

где $r(f,g) = \max\limits_{v \in \Gamma f} \min\limits_{u \in \Gamma g} |u - v|$, $u = (u_1, u_2)$, $v = (v_1, v_2)$, $u_1, v_1 \in [0,1]$, $u_2, v_2 \in \mathbb{R}$, и $|\cdot|$ означает евклидову норму в $\mathbb{R}^2$. Метрике ρ соответствует топология А. В. Скорохода M_2, изученная в [6]. Сама же метрика $\rho_{\mathbb{G}}$ совпадает с метрикой $\rho_{\mathbb{F}}$, которая соответствует функциональному пространству $\mathbb{F}$, введенному и изученному вместе с метрикой $\rho_{\mathbb{F}} = \rho$ в [7]. Метрику ρ можно рассматривать и как распространение метрики Леви в пространстве неубывающих функций на пространство $\mathbb{G}$.

В нашем случае при рассмотрении случайных траекторий $\eta_n(t) = \frac{S_{[nt]}}{n}$ в качестве основного вероятностного пространства естественно рассматривать пространство $\langle \mathbb{G}, \mathfrak{A}, \mathbf{P} \rangle$, где $\mathfrak{A}$ — σ-алгебра, порожденная цилиндрическими множествами, распределение $\mathbf{P}$ порождено распределением последовательности

$S_1, \ldots, S_n$. В [2] показано, что в пространстве $(\mathbb{G}, \rho)$ выполняется вложение $\mathfrak{B}(\mathbb{G}, \rho) \subset \mathfrak{A}$ и, стало быть, шары в метрике ρ в пространстве $\mathbb{G}$ измеримы и определены вероятности $\mathbf{P}(\eta_n \in (f)_\varepsilon)$.

Обозначим через $N_+(f)$ $(N_-(f))$ число положительных (отрицательных) скачков функции $f(\cdot)$ и определим функционал

$$D(f) = \begin{cases} (\alpha-1)N_+(f) + (\beta-1)N_-(f), & \text{если } f \in \mathbb{S}; \\ \infty & \text{в противном случае.} \end{cases} \tag{3.1}$$

Для любого множества $B \in \mathbb{G}$ положим

$$D(B) = \inf_{f \in B} D(f).$$

В [2] показано, что множества

$$T_u = \{f \in \mathbb{G} : \max_{t \in [0,1]} |f(t)| \le u\} \tag{3.2}$$

образуют семейство вполне ограниченных вложенных множеств в $(\mathbb{G}, \rho)$.

Теорема 3.1. *Пусть* $\mathbf{E}\xi = 0$, $z_n = \ln n$ *и выполнены условия* (2.1). *Тогда*

(i) *при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *и любом* $f \in \mathbb{G}$ *существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (f)_\varepsilon) = D((f)_\varepsilon) \tag{3.3}$$

и справедлив л.п.б.у.;

(ii) *если, кроме того, выполнено условие* $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{G}, \rho)$, $B \in \mathscr{K}$ (*относительно семейства* (3.2), *см.* (1.10)), *то для таких множеств* B *справедлив р.п.б.у.*

Доказательство. (i) Рассмотрим сначала при $a \in (0,1)$ ступенчатую функцию

$$f_{a,b}(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \in [0,a), \\ b & \text{при } t \in [a,1] \end{cases} \tag{3.4}$$

и найдем асимптотику $\ln P_n((f_{a,b})_\varepsilon)$. Имеем

$$P_n((f_{a,b})_\varepsilon) \le \mathbf{P}\big(\max_{t \le a-\varepsilon} |\eta_n(t)| \le \varepsilon;\ \min_{t \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]} \eta_n(t) \ge -\varepsilon,$$
$$\max_{t \in [a-\varepsilon, a+\varepsilon]} \eta_n(t) \le (b+\varepsilon),\ |\eta_n(a+\varepsilon) - b| \le \varepsilon,\ \max_{t \ge a+\varepsilon} |\eta_n(t) - b| \le 2\varepsilon\big).$$

Считая для простоты, что значения $a \pm \varepsilon$ кратны $1/n$, и учитывая независимость приращений последовательности $\eta_n(k/n)$, $k = 0, 1, \ldots, n$, получим в силу усиленного закона больших чисел, что при $n \to \infty$

$$P_n((f_{a,b})_\varepsilon) \le (1+o(1)) \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{P}(\eta_n(a-\varepsilon) \in du) \mathbf{P}(u + \eta_n(2\varepsilon) \subset [b-\varepsilon, b+\varepsilon]). \tag{3.5}$$

Из соотношений (2.3), в которых n надо заменить на $2\varepsilon n$, нетрудно извлечь, что последний множитель под знаком интеграла в (3.5) близок к

$$2\varepsilon n V(n)[(b-\varepsilon-u)^{-\alpha} - (b+\varepsilon-u)^{-\alpha}], \tag{3.6}$$

что, в свою очередь, не превосходит $2\varepsilon n V(n)(b-2\varepsilon)^{-\alpha}$. Следовательно, при $z_n = \ln n$

$$\varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (f_{a,b})_\varepsilon) \le -\alpha + 1. \tag{3.7}$$

Этот предел не зависит от a, b, ε и равен $D(f_{a,b}) = D((f_{a,b})_\varepsilon)$. Аналогичным образом оценивается $\mathbf{P}(\eta_n \in (f_{a,b})_{2\varepsilon})$ снизу:

$$P_n((f_{a,b})_{2\varepsilon}) \geq \mathbf{P}(\max_{t\leq a-\varepsilon} |\eta_n(t)| \leq \varepsilon; \min_{t\in[a-\varepsilon,a+\varepsilon]} \eta_n(t) \geq -\varepsilon,$$
$$\max_{t\in[a-\varepsilon,a+\varepsilon]} \eta_n(t) \leq b+\varepsilon, \max_{t\geq a+\varepsilon} |\eta_n(t) - b| \leq 2\varepsilon)$$
$$= (1+o(1)) \int\limits_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \mathbf{P}(\eta_n(a-\varepsilon) \in du) \mathbf{P}(\min_{t\leq 2\varepsilon} \eta_n(t) \geq -\varepsilon - u,$$
$$\max_{t\leq 2\varepsilon} \eta_n(t) \leq b+\varepsilon-u, |u+\eta_n(2\varepsilon) - b| \leq \varepsilon).$$

При тех же соглашениях, что и прежде, в силу результатов [5, гл. 3, 4] имеем

$$\mathbf{P}((f_{a,b})_{2\varepsilon}) \geq (1+o(1)) \int\limits_{-\varepsilon/2}^{\varepsilon/2} \mathbf{P}(\eta_n(a-\varepsilon) \in du) \mathbf{P}(\min_{t\leq 2\varepsilon} \eta_n(t) \geq -\varepsilon/2,$$
$$\max_{t\leq 2\varepsilon} \eta_n(t) \in (b, b+\varepsilon/2)) = (1+o(1)) \mathbf{P}(\max_{t\leq 2\varepsilon} \eta_n(t) \in (b, b+\varepsilon/2))$$
$$= (1+o(1)) 2\varepsilon n [V(nb) - V(n(b-\varepsilon/2))] = (1+o(1)) 2\varepsilon n V(n) [b^{-\alpha} - (b+\varepsilon/2)^{-\alpha}]. \tag{3.8}$$

При $\varepsilon < \frac{1}{\alpha+1}$ получаем

$$b^{-\alpha} - (b+\varepsilon/2)^{-\alpha} = b^{-\alpha}(1 - (1+\varepsilon/2b)^{-\alpha}) \geq \frac{\alpha\varepsilon b^{-\alpha-1}}{4},$$
$$P_n((f_{a,b})_{2\varepsilon}) \geq (1+o(1)) \frac{\varepsilon^2 \alpha b^{-\alpha-1}}{2} n V(n).$$

Отсюда наряду с (3.7) при $z_n = \ln n$ получаем

$$\varliminf_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln P_n((f_{a,b})_{2\varepsilon}) \geq -\alpha + 1,$$

где правая часть не зависит от $\varepsilon < \frac{1}{\alpha+1}$, a, b. Следовательно, существует

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln P_n((f_{a,b})_\varepsilon) = -\alpha + 1 = D(f_{a,b}) = D((f_{a,b})_\varepsilon).$$

Точно так же рассматриваются отрицательные скачки и ступенчатые функции f с произвольными k скачками. Для таких f при всех $\varepsilon \leq \varepsilon_0$ получаем

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (f)_\varepsilon) = -[N_+(f)(\alpha-1) + N_-(f)(\beta-1)] = -D((f)_\varepsilon), \tag{3.9}$$

где $N_+(f)$ $(N_-(f))$ — число положительных (отрицательных) скачков функции f $(N_+(f) + N_-(f) = k)$, $\varepsilon_0 > 0$ от f не зависит. Здесь правая часть вновь не зависит от ε и от величин скачков.

Далее, из результатов [2] следует, что шар $(f)_\varepsilon$ (в метрике ρ) для любой фиксированной функции $f \in \mathbb{G}$ является вполне ограниченным множеством и при любом $\delta > 0$ допускает конечное δ-покрытие шарами $(f_k)_\delta$, $k = 1, \dots, K = K(\delta)$, где f_k — ступенчатые функции. Увеличение количеств $N_\pm(g)$ скачков ступенчатой функции g только увеличивает значение $D(g)$ (см. (3.9)), а значение

$\min\limits_{k\le K(\delta)} D(f_k)$ выбором δ может быть сделано сколь угодно близким к $D((f)_\varepsilon)$, стало быть, при достаточно малом $\delta>0$ среди точек f_k, $k=1,\dots,K$, найдется точка f_{k_δ} такая, что $D(f_{k_\delta})=\min\limits_{k\le K(\delta)} D(f_k)=D((f)_\varepsilon)$. Так как

$$P_n((f)_\varepsilon)\le\sum_{k=1}^K P_n((f_k)_\delta),$$

то

$$\varlimsup_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}\ln P_n((f)_\varepsilon)\le\varlimsup_{n\to\infty}\frac{K}{z_n}-D(f_{k_\delta})=-D((f)_\varepsilon).$$

Поскольку наряду с этим выполняется $\mathbf{P}(\eta_n\in(f)_\varepsilon)\ge\mathbf{P}(\eta_n\in(f_{k_\delta})_\delta)$, то в силу (3.9)

$$\varliminf_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}\ln P_n((f)_\varepsilon)\ge\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}\ln P_n((f_{k_\delta})_\delta)=-D(f_{k_\delta})=-D((f)_\varepsilon).$$

Первое утверждение теоремы доказано.

(ii) Второе утверждение вытекает из теоремы 1.1. Теорема доказана.

Согласно теореме 3.1 поиск асимптотики $\ln P_n(B)$ сводится к отысканию ступенчатой функции $f\in B$, на которой достигается $\min[N_+(f)(\alpha-1)+N_-(f)\times(\beta-1)]$.

Приведем ряд примеров, иллюстрирующих утверждения теоремы 3.1.

1. Пусть дана функция $g(t)\ge g_0>0$, $g\in\mathbb{G}$, и множество $B=B_g$ определяется соотношением

$$B_g=\{f\in\mathbb{G}:\max(f(t)-g(t))>0\}.$$

Пусть $\bar g=\max\limits_{t\in[0,1]}g(t)$, а функция $f_{a,b}$ определена равенством (3.4). Ясно, что $(f_{a,b})_\varepsilon\subset BT_u$ при $b=2\bar g$, $\varepsilon<\frac{\bar g}{2}$, $u>3\bar g$, где множества T_u определены в (3.2). Как показано в (3.8), при $\varepsilon<\frac{1}{\alpha+1}$ и всех достаточно больших n

$$P_n((f_{a,b})_\varepsilon)\ge\varepsilon^2\alpha b^{-\alpha-1}nV(n)=:c_-nV(n),$$

так что $P_n(B_gT_u)\ge c_-nV(n)$, где c_- не зависит от n. С другой стороны, при $u>3\bar g$ и всех достаточно больших n

$$P_n(B_g\overline{T}_u)\le\mathbf{P}(\max_{t\in[0,1]}\eta_n(t)>3\bar g)\le c_+nV(n),$$

где c_+ не зависит от n (см., например, [5, гл. 3, 4]). Это означает, что

$$P_n(B_g\overline{T}_u)\le\frac{c_+}{c_-}P_n(B_gT_u),$$

стало быть, $B_g\in\mathscr{K}$ и для B_g в силу теоремы 3.1 справедливо

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{z_n}\ln P_n(B_g)=1-\alpha.$$

2. Пусть

$$B=\left\{f\in\mathbb{G}:\int_0^1|f(t)|^\gamma dt>v\right\},\quad\gamma>0,\ v>0.$$

Ясно, что $(f_{a,b})_\varepsilon \subset BT_u$ при $a < 1/2$, $b > 2(2v)^{1/\gamma}$, $u > 2b$, $\varepsilon < v^{1/\gamma}$. Аналогичное утверждение верно для $(f_{a,-b})_\varepsilon$. Это означает, что

$$P_n(BT_u) \geq cn \max(V(n), W(n)).$$

С другой стороны,

$$P_n(B\overline{T}_n) \leq P_n(\overline{T}_u) \leq c_1 n(V(n) + W(n)).$$

Отсюда следуют (1.10), принадлежность $B \subset \mathscr{K}$ и равенство

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln P_n(B) = 1 - \min(\alpha, \beta).$$

3. Несколько иная ситуация будет иметь место, если при некотором $p \in (0,1)$ рассмотреть множество

$$B = \{f \in \mathbb{G} : f(p) \leq 0,\ \nu_f(1) \in (p,1),\ \nu_f(-1) \in (\nu_f(1), 1]\},$$

где $\nu_f(1) = \min\{t : f(t) \geq 1\}$, $\nu_f(-1) = \min\{t : f(t) \leq -1\}$. Здесь в качестве одной из наиболее вероятных ступенчатых функций из B можно рассмотреть функцию

$$f_a(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq p + a, \\ 2 & \text{при } t \in (p+a, p+2a), \\ -2 & \text{при } t \in (p+2a, 1] \end{cases}$$

при $a < \frac{1-p}{2}$. Тогда аналогично предыдущему убеждаемся, что при $u > 3$ и $\varepsilon < \min\left(\frac{p}{2}, \frac{1-p-2a}{2}\right)$

$$P_n((f_a)_\varepsilon) \geq c(\varepsilon) n^2 V(n) W(n), \quad (f_a)_\varepsilon \subset BT_u,$$

и что $P_n(B\overline{T}_u)$ сравнимо с $P_n(BT_u)$, так как «наиболее вероятная» ступенчатая траектория из $B\overline{T}_u$ отличается от функции вида f_a либо бóльшим положительным скачком, либо меньшим отрицательным скачком. Поэтому вновь выполнено (1.10), $B \in \mathscr{K}$ и для B справедливо

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln P_n(B) = 2 - \alpha - \beta.$$

4. П.б.у. для обобщенных процессов восстановления

В силу результатов гл. 16 в [5] все основные утверждения настоящей работы переносятся без каких-либо существенных изменений на обобщенные пуассоновские процессы со сносом:

$$qu + S_{\zeta(u)}, \quad 0 \leq u \leq n,$$

где $\zeta(u)$ — пуассоновский процесс с параметром $\lambda > 0$, не зависящий от $\{\xi_j\}_{j=1}^\infty$, n — не обязательно целое число. В этом случае в качестве случайных элементов следует рассматривать траекторию

$$\eta_n(t) = qt + \frac{1}{n} S_{\zeta(tn)}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Справедлив следующий аналог теоремы 3.1.

Теорема 4.1. *Пусть выполнено условие* (2.1), $\frac{q}{\lambda}+\mathbf{E}\xi = 0$ *и* $z_n = \ln n$. *Тогда*
(i) *при всех достаточно малых* $\varepsilon > 0$ *и любом* $f \in \mathbb{G}$ *существует*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{z_n} \ln \mathbf{P}(\eta_n \in (f)_\varepsilon) = D((f)_\varepsilon),$$

где $D(f)$ *определено в* (3.1), *и справедлив л.п.б.у.;*
(ii) *если, кроме того, выполнено условие* $B \in \mathfrak{B}(\mathbb{G},\rho)$, $B \in \mathscr{K}$ (*относительно семейства* (3.2), *см.* (1.10)), *то для таких множеств* B *справедлив р.п.б.у.*

Доказательство теоремы 4.1 совершенно аналогично доказательству теоремы 3.1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Боровков А. А., Могульский А. А.* О принципах больших уклонений в метрических пространствах // Сиб. мат. журн. 2010. Т. 51, № 6. С. 1251–1269.
2. *Боровков А. А., Могульский А. А.* Расширенный принцип больших уклонений для траекторий случайных блужданий. I, II // Теория вероятностей и ее применения. (В печати).
3. *Varadhan S. R. S.* Large deviations // Ann. Probab. 2008. V. 36, N 2. P. 397–419.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. М.: Наука, 1968.
5. *Боровков А. А., Боровков К. А.* Асимптотический анализ случайных блужданий. Т. 1: Медленно убывающие распределения скачков. М.: Физматлит, 2008.
6. *Скороход А. В.* Предельные теоремы для случайных процессов // Теория вероятностей и ее применения. 1956. Т. 1, № 3. С. 289–319.
7. *Боровков А. А.* Сходимость распределений функционалов от случайных процессов // Успехи мат. наук. 1972. Т. 27, № 1. С. 3–41.

Статья поступила 18 марта 2010 г.

Боровков Александр Алексеевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
borovkov@math.nsc.ru