Сибирский математический журнал
Июль—август, 2011. Том 52, № 4

УДК 519.214

ВЫЧИСЛЕНИЕ АСИМПТОТИКИ ДИСПЕРСИИ ЧИСЛА САМОПЕРЕСЕЧЕНИЙ УСТОЙЧИВЫХ СЛУЧАЙНЫХ БЛУЖДАНИЙ С ПОМОЩЬЮ ТЕОРИИ ВИНЕРА — ДАРБУ

Г. Делигианнидис, С. А. Утев

Аннотация. В качестве некой альтернативы классической тауберовой теореме в случае, когда условие монотонности априори неизвестно, предложено утверждение типа леммы Винера — Дарбу. Использована лемма для получения точной асимптотики дисперсии числа самопересечений устойчивого одномерного случайного блуждания. Доказана функциональная предельная теорема для устойчивого случайного блуждания в случайной среде, высказанная в качестве гипотезы в [1].

Ключевые слова: случайное блуждание, самопересечение, теория Винера — Дарбу.

1. Введение

Рассмотрим случайное блуждание $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ с независимыми одинаково распределенными случайными приращениями $\{X_i,\ i \in \mathbb{N}\}$ со значениями из $\mathbb{Z}^d$ для $d = 1, 2$. Пусть V_n — число самопересечений случайного блуждания до момента времени n,

$$V_n = \sum_{i,j=0}^{n} \mathbf{1}(S_i = S_j). \tag{1.1}$$

Отметим, что в формуле для V_n в качестве самопересечений включаются также члены с $i = j$, однако их число равно $n + 1$ и они не окажут влияния на асимптотику моментов числа самопересечений случайного блуждания.

Асимптотика моментов V_n исследовалась ввиду их тесной связи с моделью Эдвардса и самонепересекающимися блужданиями (см. [2]), а также их значимости в предельной теории для случайных блужданий в случайных средах (см. [1]).

Гипотеза о том, что дисперсия числа самопересечений имеет порядок $O(n^2)$, существовала более тридцати лет, и ее истоки восходят к ранним работам Варадана [3] и Симанзика [4]. В частных случаях получены доказательства гипотезы, например, простейшее двумерное случайное блуждание исследовано в [2, предложение 6.4.1]. В случае возвратных двумерных случайных блужданий Болтхаузен [5] разработал методику, основанную на асимптотическом анализе производящих функций $\sum_{i=1}^{\infty} \lambda^i \operatorname{var}(V_i)$, $\lambda \in [0, 1)$, и тауберовой теореме. Его метод позволяет изучать симметризованные случайные блуждания, в то время как в общем случае может быть получена только более слабая оценка $O(n^2 \log n)$ (дальнейшие пояснения содержатся в начале разд. 3). Подобный подход применялся недавно в работе [6], где оценка $O(n^2)$ доказана только в специальных случаях. Завершенное доказательство оценки $O(n^2)$ для плоского случайного блуждания со вторыми моментами дано Льюисом [7]. При этом для членов порядка $O(n^2)$ применялся метод Болтхаузена, в то время как члены порядка $O(n^2 \log n)$ исследовались с помощью метода, основанного на локальных предельных теоремах и адаптированного Лоулером [2].

В настоящей работе мы предлагаем иной подход, основанный на результате типа Винера — Дарбу и тауберовой лемме, которая служит весомой альтернативой тауберовой теореме и обобщает тауберов подход Болтхаузена [5]. Мы тоже рассматриваем асимптотику производящих функций, но при этом допускаем, что параметр λ может быть комплексным, и, используя формулу Коши, можем полностью отказаться от требования монотонности, налагаемого тауберовой теоремой.

Мы покажем, что $\mathrm{var}(V_n) \sim Kn^2$ для одномерного случайного блуждания из области притяжения α-устойчивого закона с параметром $\alpha = 1$, при этом мы не применяем локальные предельные результаты, используемые в [2, 7], и дополнительно не требуем симметричности, как в [5, 6]. С другой стороны, метод порождающих функций, которому мы следуем, позволяет вычислить точную асимптотику (вычисляем константу K), что невозможно сделать с помощью метода локальных предельных результатов из [2, 7].

Полученная асимптотика применяется для доказательства функциональной предельной теоремы для одномерного устойчивого ($\alpha = 1$) случайного блуждания в случайной среде, высказанной в качестве гипотезы в 1979 г. в [1].

В заключение применяем метод Винера — Дарбу для вычисления точной асимптотики для двумерного случайного блуждания со вторыми моментами, рассматривавшегося в [5–7].

Стоит отметить, что верхнюю границу можно получить разными методами. Прямой подход, основанный на методе Фурье и обобщающий [2, 7], будет представлен в другом месте. Еще один способ можно предложить на основе недавней работы А. А. Боровкова [8].

Далее статья построена следующим образом. В разд. 2 представлены основные результаты. Доказательства содержатся в разд. 3 и 4.

2. Основные результаты

Пусть $f(t)$, где $t \in J = [-\pi, \pi)^d$, — характеристическая функция X_i. Полагаем, что случайное блуждание *строго апериодическое* в том смысле, что не существует такой подгруппы L из $\mathbb{Z}^d$, что $\mathbb{P}(X_i - x \in L) = 1$ для некоторого $x \in \mathbb{Z}^d$. Это предположение также влечет за собой, что $f(t) = 1$ тогда и только тогда, когда $t = 0$.

Наш первый результат касается асимптотического поведения дисперсии V_n.

Теорема 2.1. (i) *Пусть* $d = 1$ *и* $f(t) = 1 - \gamma|t| + R(t)$, *где* $\gamma > 0$, *и* $R(t) = o(|t|)$ *при* $t \to 0$. *Тогда*

$$\mathrm{var}(V_n) \sim 4\left(\frac{1}{12\gamma^2} + \frac{1}{\pi^2\gamma^2}\right) n^2.$$

(ii) *Пусть* $d = 2$, $\mathbb{E}X_i = 0$ *и* X_i *имеет невырожденную ковариационную матрицу* Σ *такую, что* $f(t) = 1 - \frac{1}{2}\langle \Sigma t \mid t\rangle + R(t)$, *где* $R(t) = o(|t|^2)$ *при* $t \to 0$.

Тогда

$$\operatorname{var}(V_n) \sim \pi^{-2}|\Sigma|^{-1}(1+\kappa)n^2,$$

где

$$\kappa \equiv \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty \frac{drds}{(1+r)(1+s)\sqrt{(1+r+s)^2-4rs}} - \frac{\pi^2}{6}.$$

Для формулировки следующего результата предположим, что $\xi(x)$ с индексами $x \in \mathbb{Z}^d$ являются независимыми одинаково распределенными вещественнозначными случайными величинами, не зависящими от X_i, $\mathbb{E}\xi(x) = 0$, $\mathbb{E}\xi(x)^2 = \sigma^2 > 0$. Тогда под *случайным блужданием в случайной среде* мы понимаем процесс

$$Z_0 = 0, \quad Z_n = \sum_{k=1}^n \xi(S_k), \quad n \geq 1.$$

В ряде работ получены различные предельные теоремы, связанные со слабыми пределами процесса $Y_n(t) = Z_{[nt]}/c_n$, $t \in [0,1]$, где c_n — некоторая нормирующая последовательность и $[u]$ означает целую часть u.

Для случайных блужданий, удовлетворяющих условиям теоремы 2.1(ii), в [5] показано, что $\{Y_n(\cdot)\}_n$ слабо сходится в $D[0,1]$ к процессу броуновского движения с нормирующей последовательностью $c_n = \sqrt{n \log n}$. Для $d = 1$ и процессов X_i и $\xi(\cdot)$ из области притяжения устойчивых законов с параметрами $\alpha \in (1,2]$ и $\beta \in (0,2]$ соответственно Кестен [1] получил негауссовский предельный процесс. Случай $\alpha < 1$, соответствующий переходным случайным блужданиям, более простой и рассматривался ранее в [9]. В случае $\alpha = 1$ Кестеном и Спитцером [1] высказана гипотеза о сходимости к броуновскому движению с нормировкой $c_n = \sqrt{n \log n}$. Доказательство этого утверждения дано в следующей теореме.

Теорема 2.2. *Пусть* $\{S_n,\, n \geq 0\}$ *— случайное блуждание из теоремы* 2.1(i) *и* $\{\xi(x)\}_{x\in\mathbb{Z}}$ *— последовательность независимых одинаково распределенных случайных величин с* $\mathbb{E}\xi(x) = 0$ *и* $\mathbb{E}\xi(x)^2 = \sigma^2 > 0$. *Тогда распределения*

$$Y_n(t) = Y_n(t,\omega) = \sqrt{\pi\gamma} \sum_{i=0}^{[nt]} \xi(S_i(\omega))/\sigma\sqrt{2n\log n}, \quad t \in [0,1],$$

слабо сходятся в $D[0,1]$ *к винеровской мере для почти всех случайных траекторий* ω.

Замечание 2.1. Слабая сходимость для почти всех траекторий $\{S_n\}$ частично обоснована в [10]. В [5] также доказана почти наверное версия функциональной предельной теоремы.

3. Доказательство теоремы 2.1

Дисперсия V_n определяется формулой

$$\operatorname{var}(V_n) = 4\sum_H [\mathbb{P}(S_{i_1} = S_{j_1}, S_{i_2} = S_{j_2}) - \mathbb{P}(S_{i_1} = S_{j_1})\mathbb{P}(S_{i_2} = S_{j_2})],$$

где H — множество четверок:

$$H = \{(i_1, j_1, i_2, j_2) : 0 \leq i_1, j_1, i_2, j_2 \leq n,\ i_1 < j_1, i_2 < j_2\},$$

которое делим на 6 подмножеств:

$$
\begin{aligned}
A^1 &= \{(i_1, j_1, i_2, j_2) : 0 \le i_1 < j_1 \le i_2 < j_2 \le n\},\\
A^2 &= \{(i_1, j_1, i_2, j_2) : 0 \le i_1 \le i_2 < j_1 < j_2 \le n\},\\
A^3 &= \{(i_1, j_1, i_2, j_2) : 0 \le i_1 \le i_2 < j_2 \le j_1 \le n\},\\
B^1 &= \{(i_1, j_1, i_2, j_2) : 0 \le i_2 < j_2 \le i_1 < j_1 \le n\},\\
B^2 &= \{(i_1, j_1, i_2, j_2) : 0 \le i_2 < i_1 < j_1 \le j_2 \le n\},\\
B^3 &= \{(i_1, j_1, i_2, j_2) : 0 \le i_2 < i_1 < j_2 < j_1 \le n\}.
\end{aligned}
$$

Суммы по множествам A^1 и B^1 равны нулю в силу независимости. Таким образом,

$$\operatorname{var}(V_n) = 4(a_2(n) + a_3(n) + b_2(n) + b_3(n)), \tag{3.1}$$

где a_2, a_3, b_2 и b_3 — суммы по множествам A^2, A^3, B^2 и B^3 соответственно.

Опубликованные подходы к доказательству, основанные на локальных предельных теоремах, как в [2, гл. 6], или на строгом принципе инвариантности [11], требуют конечности моментов более высоких порядков. С другой стороны, для применения тауберовой теоремы Карамата, как в [5, 6], необходимо, чтобы лежащая в основе метода последовательность была монотонной. В случае $d = 2$ Болтхаузен обошел это ограничение, рассматривая компоненты разности отдельно. Если рассматривать их по отдельности, полагая

$$M_n = \{(m_1, \dots, m_5) : m_1, m_2, m_4, m_5 \ge 0,\ m_3 > 0,\ \text{и } m_1 + \dots + m_5 = n\},$$

получаем точную асимптотику

$$c(n) = \sum_{\mathbf{m} \in M_n} \mathbb{P}(S_{m_2+m_3+m_4} = 0)\mathbb{P}(S_{m_3} = 0) \sim Cn^2 \log(n),$$

так как для $\lambda \in [0, 1)$ имеем

$$\sum_n c(n)\lambda^n \sim C(1-\lambda)^{-3} \log(1/(1-\lambda)) \quad \text{при } \lambda \to 1,$$

что и установлено для членов a_2 и a_4 в [5]. Также в случае $d = 2$ в [6] рассматривались компоненты разности вместе. Простое применение формулы $\mathbb{P}(S_n = 0) = (2\pi)^{-d} \int_J f^n(x)\,dx$ дает

$$a_3(n) = (2\pi)^{-2} \sum_{\mathbf{m} \in M_n} \mathbb{P}(S_{m_3} = 0) \int_J f^{m_2+m_4}(x)[1 - f(k)^{m_3}]\,dx.$$

Требование монотонности в тауберовой теореме в этом случае, грубо говоря, влечет условие $f(t) \ge 0$, которое значительно сужает класс случайных блужданий.

3.1. Лемма типа Винера — Дарбу. Вместо использования тауберовой теоремы в доказательстве теоремы 2.1 опираемся на лемму 3.1. Близкие результаты использовались в последнее время в сингулярном анализе. Фактически лемма 3.1 обобщает теорему 4 в [12], которая в основном оперирует алгебраическими понятиями сингулярности. Этот подход, имеющий свои истоки в ранних работах Винера [13] и Дарбу (см. лемму Дарбу в [14]) и хорошо известный специалистам комбинаторного анализа, является ключевым компонентом, необходимым для развития методов из [5] и получения точной асимптотики дисперсии V_n.

Лемма 3.1. *Пусть* $g(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *— аналитическая функция для* $z \in \mathbb{C}$, $|z| < 1$. *Предположим, что существуют* $a \in (0,1)$ *и константа* $K > 0$ *такие, что* $|g(z)| \le K$ *для* $\mathbb{E}(z) \le a$, *а также последовательность неотрицательных констант* $A_m > 0$, $\gamma_m > 1$, *и неотрицательные монотонно возрастающие функции* l_m *такие, что*

$$|g(z)| \le \sum_m A_m |1-z|^{-\gamma_m} l_m(|1-z|^{-1}) \quad \text{для } \operatorname{Re}(z) > a.$$

Тогда

$$|a_n| \le 4K + \sum_m A_m C(\gamma_m) n^{\gamma_m - 1} l_m(n),$$

где $C(\gamma) = 8B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma-1}{2}\right)$.

Доказательство. Пусть Γ — окружность с центром в нуле радиуса $R = 1 - 1/n$ для $n \ge 2$ и $R = 1/2$ для $n = 1$. Разделим Γ на две дуги $\Gamma_1 \equiv \{z \in \Gamma : \operatorname{Re}(z) \le a\}$ и $\Gamma_2 \equiv \{z \in \Gamma : \operatorname{Re}(z) > a\}$. По формуле Коши

$$|a_n| = \left| \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma} g(z) z^{-n-1}\, dz \right| \le \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\Gamma_1} g(z) z^{-n-1}\, dz \right| + \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{\Gamma_2} g(z) z^{-n-1}\, dz \right|.$$

Так как $|g(z)| \le K$ при $\operatorname{Re}(z) \le a$ и $R^{-n} \le 4$ при $n \ge 1$, то

$$\left| \int\limits_{\Gamma_1} g(z) z^{-n-1}\, dz \right| \le \int\limits_0^{2\pi} K R^{-n}\, dt \le 8\pi K\ .$$

С другой стороны, для интеграла по Γ_2

$$\left| \int\limits_{\Gamma_2} g(z) z^{-n-1}\, dz \right| \le \sum_m R^{-n} A_m \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |1 - Re^{it}|^{-\gamma_m} l_m(|1 - Re^{it}|^{-1})\, dt,$$

Рассмотрим m-й член в сумме, опуская индекс m для краткости, и обозначим слагаемое символом I. Остается доказать, что $I \le 2\pi C(\gamma) A n^{\gamma-1} l(n)$. Так как $|1 - Re^{it}| = [(1-R)^2 + 2R(1-\cos(t))]^{1/2}$ и l монотонно возрастает, заметим, что для всех t и n

$$l(|1 - Re^{it}|^{-1}) = l([n^{-2} + 2R(1-\cos(t))]^{-1/2}) \le l(n),$$

что вместе с $R^{-n} \le 4$ дает оценку

$$I \le 4 l(n) A \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |1 - Re^{it}|^{-\gamma}\, dt.$$

Далее, из известного неравенства $\cos(t) \le 1 - t^2/4$ для $t \in [-\pi/2, \pi/2]$ следует, что

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} |1 - Re^{it}|^{-\gamma}\, dt \le \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} \left[(1-R)^2 + \frac{Rt^2}{2} \right]^{-\gamma/2} dt$$

$$\le 4n^{\gamma-1} \int\limits_0^{\infty} [1 + t^2]^{-\gamma/2}\, dt = 2\sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma-1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)} n^{\gamma-1} = 2B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma-1}{2}\right) n^{\gamma-1}$$

для всех $\gamma > 1$, где $B(\cdot,\cdot)$ — бета-функция, и, таким образом,

$$I \le 8B\left(\frac{1}{2}, \frac{\gamma-1}{2}\right)An^{\gamma-1}l(n) = C(\gamma)An^{\gamma-1}l(n). \quad \square$$

3.2. Доказательство теоремы 2.1(i). Возвращаясь к разложению из начала настоящего раздела, оценим сначала $a_3(n)$:

$$\begin{aligned} a_3(n) &= \sum_{A^3}[\mathbb{P}(S_{i_1} = S_{j_1}, S_{i_2} = S_{j_2}) - \mathbb{P}(S_{i_1} = S_{j_1})\mathbb{P}(S_{i_2} = S_{j_2})] \\ &= \sum_{\mathbf{m}\in M_n} \mathbb{P}(S_{m_3} = 0)[\mathbb{P}(S_{m_2+m_4} = 0) - \mathbb{P}(S_{m_2+m_3+m_4} = 0)], \end{aligned} \tag{3.2}$$

где M_n — множество пятерок $(m_1, \dots, m_5)$ таких, что $m_1, m_2, m_4, m_5 \ge 0$, $m_3 > 0$ и $m_1 + \dots + m_5 = n$. Используя представление для характеристической функции, определим

$$\begin{aligned} \rho_3(\lambda) &:= \sum_{n\ge 0} a_3(n)\lambda^n \\ &= (1-\lambda)^{-2}(2\pi)^{-2} \iint\limits_{J^2} \frac{\lambda f(y)(1-f(x))\,dxdy}{(1-\lambda f(x))^2(1-\lambda f(y))(1-\lambda f(x)f(y))} \end{aligned}$$

для $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$. Аналогичные степенные ряды, обозначенные через $\rho_2(\lambda)$, будут рассмотрены для последовательности $a_2(n)$. Полные вычисления являются достаточно объемными и включают в себя асимптотический анализ большого числа многомерных интегралов с комплексным параметром. Однако большая часть интегралов исследуется сходным образом. Опишем ключевые этапы анализа $\rho_3(\lambda)$ и укажем существенные отличия для $\rho_2(\lambda)$.

Оценки снизу для $|1 - \lambda f(t)|$ и $|1 - \lambda f(t)f(s)|$. Чтобы работать с интегралом из последнего выражения для $\rho_3(\lambda)$, необходимы оценки снизу для величин вида $1 - \lambda f(t)$. Напомним, что $f(t) = 1 - \gamma|t| + R(t)$, где $R(t) = o(|t|)$ при $t \to 0$. Пусть $\varepsilon > 0$ фиксировано и сколь угодно мало. В дальнейшем в статье c будет обозначать положительную константу. Кроме того, $C(\varepsilon)$ и $D(\varepsilon)$ будут обозначать положительные функции такие, что $C(\varepsilon)$ стремится к нулю при $\varepsilon \to 0$, в то время как $D(\varepsilon)$ может быть неограниченной.

Сначала заметим, что вне области $U_\varepsilon = \{(t,s) \in J^2 : |t| < \varepsilon, |s| < \varepsilon\}$ вследствие апериодичности случайного блуждания имеем $|f(t)| \le 1 - C(\varepsilon) < 1$. Из этого следует, что для комплексного числа $|\lambda| < 1$ выполнено

$$|1 - \lambda f(t)| \ge C(\varepsilon) > 0 \quad \text{и} \quad |1 - \lambda f(t)f(s)| \ge C(\varepsilon) > 0. \tag{3.3}$$

Так как $R(t) = o(|t|)$, в области U_ε будет $|R(t)| < \theta_\varepsilon|t|$ для некоторого положительного θ_ε, стремящегося к нулю при $\varepsilon \to 0$. По неравенству треугольника имеем

$$\begin{aligned} |1 - \lambda f(t)| = |1 - \lambda + \lambda\gamma|t| - \lambda R(t)| &\ge ||1 - \lambda + \lambda\gamma|t|| - |\lambda||R(t)|| \\ &\ge ||1 - \lambda + \lambda\gamma|t|| - \theta_\varepsilon|t|| \equiv h_\varepsilon(t,\lambda) \end{aligned} \tag{3.4}$$

и аналогично для $|t|, |s| < \varepsilon$ —

$$|1 - \lambda f(t)f(s)| \ge |1 - \lambda + \lambda\gamma(|t| + |s|)| - \Delta_\varepsilon(|t| + |s|) \equiv k_\varepsilon(t,s,\lambda), \tag{3.5}$$

где $\Delta_\varepsilon = \gamma^2\varepsilon + \gamma\theta_\varepsilon + \theta_\varepsilon^2$. Если $\mathrm{Re}(\lambda) \le a$ для некоторого $a \in (0,1)$ и $|x| < \varepsilon$, то, используя вещественную часть как нижнюю оценку, имеем

$$|1 - \lambda f(t)| \ge 1 - a - (\gamma + \theta_\varepsilon)\varepsilon \ge c > 0 \tag{3.6}$$

для достаточно малого ε.

Пусть $z_1 \equiv (1-\lambda)/|1-\lambda|$ и $z_2 \equiv \lambda\gamma$ и, кроме того, $\mathrm{Re}(\lambda) > a \in (0,1)$. Тогда

$$|z_1 + z_2|t|| - \theta_\varepsilon|t| \ge \mathbb{E}(z_1 + z_2|t|) - \theta_\varepsilon|t| \ge c|t| \tag{3.7}$$

для достаточно малого ε. Если $|t| < \delta$, то по неравенству треугольника

$$|z_1 + z_2|t|| - \theta_\varepsilon|t| \ge 1 - |z_2|\delta - \theta_\varepsilon\delta \ge c > 0 \tag{3.8}$$

для достаточно малого δ.

Отделимость интеграла от нуля. Рассмотрим сначала интеграл вне области U_ε:

$$\iint\limits_{J^2\setminus U_\varepsilon} \frac{\lambda f(y)(1-f(x))\,dxdy}{(1-\lambda f(x))^2(1-\lambda f(y))(1-\lambda f(x)f(y))}.$$

Для $\mathrm{Re}(\lambda) \le a$ и некоторой константы K получаем из (3.6) оценку $|\rho_3(\lambda)| \le K$.

С этого момента будем предполагать, что $\mathrm{Re}(\lambda) > a$. Разделим $J^2\setminus U_\varepsilon$ на следующие области:

$$V_1 := \{(x,y) \in J^2 : |x| < \varepsilon, |y| \ge \varepsilon\}, \quad V_2 := \{(x,y) \in J^2 : |x| \ge \varepsilon, |y| < \varepsilon\},$$
$$V_3 := \{(x,y) \in J^2 : |x| \ge \varepsilon, |y| \ge \varepsilon\}.$$

Оценим сначала интеграл по V_1. Так как в этой области $|y| \ge \varepsilon$, из (3.3) получаем $|1 - \lambda f(y)| \ge C(\varepsilon)$ и $|1 - \lambda f(x)f(y)| \ge C(\varepsilon)$, следовательно,

$$\iint\limits_{J\cap\{|y|\ge\varepsilon\}} \frac{|f(y)|\,dy}{|1-\lambda f(y)|\,|1-\lambda f(x)f(y)|} \le D(\varepsilon),$$

где $D(\varepsilon)$ может быть неограниченной при $\varepsilon \to 0$. Кроме того, поскольку $f(t) = 1 - \gamma|t| + R(t)$ для $|x| < \varepsilon$, имеем $|1 - f(x)| \le c|x|$. Таким образом, используя последнюю оценку и неравенства (3.3)–(3.8), получаем следующую оценку:

$$\begin{aligned}
&\left|\iint\limits_{V_1} \frac{\lambda f(y)(1-f(x))\,dxdy}{(1-\lambda f(x))^2(1-\lambda f(y))(1-\lambda f(x)f(y))}\right| \\
&\qquad \le D(\varepsilon)\int\limits_{|x|<\varepsilon} \frac{|x|\,dx}{|1-\lambda f(x)|^2} \le D(\varepsilon)\int\limits_0^\varepsilon \frac{x\,dx}{||1-\lambda+\lambda\gamma x| - \theta_\varepsilon x|^2} \\
&\qquad \le D(\varepsilon)\int\limits_0^{\varepsilon/|1-\lambda|} \frac{x\,dx}{||z_1+z_2x| - \theta_\varepsilon x|^2} \le D(\varepsilon) + D(\varepsilon)\int\limits_\delta^{\varepsilon/|1-\lambda|} x^{-1}\,dx \\
&\qquad \le D(\varepsilon)(1 + \log_+(|1-\lambda|^{-1})),
\end{aligned}$$

где $\log_+(\cdot) = \max(0, \log(\cdot))$ и все постоянные множители включены в $D(\varepsilon)$. Интегралы по областям V_2 и V_3 можно оценить аналогичным образом с тем же порядком. Таким образом,

$$\rho_3(\lambda) = (1-\lambda)^{-2}(2\pi)^{-2}\iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\lambda f(y)(1-f(x))\,dxdy}{(1-\lambda f(x))^2(1-\lambda f(y))(1-\lambda f(x)f(y))} + I(\lambda),$$

где $I(\lambda)$ — погрешность при интегрировании по области U_ε, удовлетворяющая неравенству $|I(\lambda)| \le D(\varepsilon)|1-\lambda|^{-2}\log_+(|1-\lambda|^{-1})$.

Основной интеграл. Так как интегрируем по области U_ε, удобно использовать разложение $f(t) = 1-\gamma|t|+R(t)$ под знаком интеграла, чтобы упростить вычисления. Это приводит к новой погрешности E в нашем разложении $\rho_3(\lambda)$, определяемой равенством

$$E = (1-\lambda)^{-2}(2\pi)^{-2}\iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\lambda f(y)(1-f(x))\,dxdy}{(1-\lambda f(x))^2(1-\lambda f(y))(1-\lambda f(x)f(y))}$$
$$- (1-\lambda)^{-2}(2\pi)^{-2}\iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\lambda\gamma|x|\,dxdy}{(1-\lambda+\lambda\gamma|x|)^2(1-\lambda+\lambda\gamma|y|)(1-\lambda+\lambda\gamma|x||y|)}.$$

Чтобы оценить эту погрешность и упростить вычисления, последовательно оценим ошибки, возникающие при замене каждого из множителей подынтегрального выражения его разложением. Как и раньше, $C(\varepsilon)$ — положительная функция, зависящая от ε и стремящаяся к нулю при $\varepsilon \to 0$. Для краткости включим все постоянные множители в $C(\varepsilon)$.

С помощью разложения $f(t)$ и неравенств (3.4), (3.5) получаем

$$|E_1| \le (2\pi)^{-2}|1-\lambda|^{-2}\iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{|f(y)(1-f(x))-\gamma|x||\,dxdy}{|1-\lambda f(x)|^2|1-\lambda f(y)||1-\lambda f(x)f(y)|}$$
$$\le C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-2}\iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{|x|\,dxdy}{h_\varepsilon(x,\lambda)^2 h_\varepsilon(y,\lambda)k_\varepsilon(x,y,\lambda)}$$
$$\le C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{x\,dxdy}{\tilde h_\varepsilon(x,\lambda)^2\tilde h_\varepsilon(y,\lambda)\tilde k_\varepsilon(x,y,\lambda)},$$

где

$$\tilde h_\varepsilon(x,\lambda) = |z_1+z_2|x|| - \theta_\varepsilon|x|, \quad \tilde k_\varepsilon(x,y,\lambda) = |z_1+z_2(|x|+|y|)| - \Delta_\varepsilon(|x|+|y|).$$

Используя (3.7) и (3.8), имеем

$$|E_1| \le C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{dxdy}{\tilde h_\varepsilon(x,\lambda)\tilde h_\varepsilon(y,\lambda)\tilde k_\varepsilon(x,y,\lambda)}$$
$$\le C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3}\left[C + \int\limits_\delta^\infty\int\limits_\delta^\infty \frac{dxdy}{xy(x+y)}\right] \le C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3}$$

равномерно по λ. Для остальных ошибок аналогичным образом получаются такие же оценки, дающие разложение

$$\rho_3(\lambda) = 4(1-\lambda)^{-2}(2\pi)^{-2}$$
$$\times \int\limits_0^\varepsilon\int\limits_0^\varepsilon \frac{\lambda\gamma x\,dxdy}{(1-\lambda+\lambda\gamma x)^2(1-\lambda+\lambda\gamma y)(1-\lambda+\lambda\gamma(x+y))} + E + I,$$

где $|E| \le C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3}$ и $|I| \le D(\varepsilon)|1-\lambda|^{-2}\log_+|1-\lambda|^{-1}$.

Переход от U_ε к $\mathbb{R}^2$. В заключение упростим интеграл, перейдя к интегрированию по положительной полуоси вместо $[0,\varepsilon)$, что дает

$$\rho_3(\lambda) = \pi^{-2}(1-\lambda)^{-2} \times \int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\lambda\gamma x\,dxdy}{(1-\lambda+\lambda\gamma x)^2(1-\lambda+\lambda\gamma y)(1-\lambda+\lambda\gamma(x+y))} + E + I - F,$$

где F — интеграл по $V=[0,\infty)^2\backslash[0,\varepsilon)^2$. Учитывая, что этот интеграл может быть разбит на три: F_1, F_2 и F_3, соответственно по множествам $[\varepsilon,\infty)\times[0,\varepsilon)$, $[0,\varepsilon)\times[\varepsilon,\infty)$ и $[\varepsilon,\infty)\times[\varepsilon,\infty)$, получаем оценку для F. Оценим интеграл по первому из множеств:

$$|F_1| \le c|1-\lambda|^{-2}\int_\varepsilon^\infty\int_0^\varepsilon \frac{x\,dxdy}{|1-\lambda+\lambda\gamma x|^2|1-\lambda+\lambda\gamma y||1-\lambda+\lambda\gamma(x+y)|}$$
$$\le c|1-\lambda|^{-3}\int_{\varepsilon/|1-\lambda|}^\infty\int_0^{\varepsilon/|1-\lambda|}\frac{x\,dxdy}{\tilde h_\varepsilon(x,\lambda)^2\tilde h_\varepsilon(y,\lambda)\tilde k_\varepsilon(x,y,\lambda)}$$
$$\le c|1-\lambda|^{-2}\log_+|1-\lambda|^{-1}.$$

Второй случай аналогичен первому в силу симметрии. Наконец, в третьем случае

$$|F_3| \le c|1-\lambda|^{-3}\int_{\varepsilon/|1-\lambda|}^\infty\int_{\varepsilon/|1-\lambda|}^\infty \frac{dxdy}{xy(x+y)} \le c|1-\lambda|^{-2}.$$

Допустим на время, что λ вещественно и принадлежит интервалу $(1/2,1)$, чтобы вычислить интеграл

$$\int_0^\infty\int_0^\infty \frac{\lambda\gamma x\,dxdy}{(1-\lambda+\lambda\gamma x)^2(1-\lambda+\lambda\gamma y)(1-\lambda+\lambda\gamma(x+y))} = (1-\lambda)^{-1}(\lambda\gamma)^{-2}.$$

Используя аналитическое продолжение, получаем равенство также для комплексных λ из области $|\lambda|<1$. В итоге имеем

$$\rho_3(\lambda) = (1-\lambda)^{-3}(\pi\gamma)^{-2} + \mathscr{E},$$

где $\mathscr{E}$ — общая погрешность, которая, как показано для $\mathrm{Re}(\lambda)>a$, удовлетворяет условию

$$\mathscr{E} \le D(\varepsilon)|1-\lambda|^{-2} + D(\varepsilon)|1-\lambda|^{-2}\log_+|1-\lambda|^{-1} + C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3}.$$

Если положить

$$g(\lambda) = \sum_{n=0}^\infty c_n\lambda^n = (\pi\gamma)^{-2}(1-\lambda)^{-3},$$

то с помощью стандартных вычислений имеем $c_n = (n^2+3n+2)/2\pi^2\gamma^2$. По лемме 3.1 с $f(\lambda)=\rho_3(\lambda)-g(\lambda)$ получаем оценку

$$\left|a_3(n) - \frac{1}{2\pi^2\gamma^2}n^2\right| \le D(\varepsilon)n + D(\varepsilon)n\log(n) + C(\varepsilon)n^2,$$

где $C(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$ и $D(\varepsilon)$ может быть неограниченной, что влечет $a_3(n) \sim n^2/2\pi^2\gamma^2$.

Рассмотрим $a_2(n)$. Пусть M_n — множество пятерок $(m_1, \dots, m_5)$ таких, что $m_1, m_2, m_5 \geq 0$, $m_3, m_4 > 0$ и $m_1 + \dots + m_5 = n$. Тогда

$$a_2(n) = \sum_{A^2} [\mathbb{P}(S_{i_1} = S_{j_1}, S_{i_2} = S_{j_2}) - \mathbb{P}(S_{i_1} = S_{j_1})\mathbb{P}(S_{i_2} = S_{j_2})]$$
$$= \sum_{\mathbf{m} \in M_n} \Big[\sum_{x \in \mathbb{Z}} \mathbb{P}(S_{m_2} = x)\mathbb{P}(S_{m_3} = -x)\mathbb{P}(S_{m_4} = x) - \mathbb{P}(S_{m_2+m_3} = 0)\mathbb{P}(S_{m_3+m_4} = 0)\Big].$$

Определим $\rho_2(\lambda) = \sum\limits_n a_2(n)\lambda^n$ для $\lambda \in \mathbb{C}$ и $|\lambda| < 1$. Несложно получить выражение

$$\rho_2(\lambda) = (1-\lambda)^{-2}\lambda^2(2\pi)^{-2} \times \iint\limits_{J^2} \frac{f(x)\,dxdy}{(1-\lambda f(x))(1-\lambda f(y))} \left[\frac{f(x+y)}{1-\lambda f(x+y)} - \frac{f(y)^2}{1-\lambda f(x)f(y)}\right],$$

и аналогично вычислениям для $\rho_3(\lambda)$ имеем

$$\rho_2(\lambda) = (1-\lambda)^{-2}\lambda^2(2\pi)^{-2} \times \Bigg[\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1-\lambda+\lambda\gamma|x|)(1-\lambda+\lambda\gamma|y|)(1-\lambda+\lambda\gamma|x+y|)} - \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1-\lambda+\lambda\gamma|x|)(1-\lambda+\lambda\gamma|y|)(1-\lambda+\lambda\gamma(|x|+|y|))}\Bigg] + \mathscr{E},$$

где $\mathscr{E}$ — результирующая погрешность, удовлетворяющая неравенству

$$|\mathscr{E}| \leq C|1-\lambda|^{-2} + C|1-\lambda|^{-2}\log_+|1-\lambda|^{-1} + C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3}.$$

Как и ранее для $\lambda \in (1/2, 1)$,

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1-\lambda+\lambda\gamma|x|)(1-\lambda+\lambda\gamma|y|)(1-\lambda+\lambda\gamma|x+y|)} = (1-\lambda)^{-1}\left(\frac{\pi}{\lambda\gamma}\right)^2,$$

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{dxdy}{(1-\lambda+\lambda\gamma|x|)(1-\lambda+\lambda\gamma|y|)(1-\lambda+\lambda\gamma(|x|+|y|))} = \frac{2}{3}(1-\lambda)^{-1}\left(\frac{\pi}{\lambda\gamma}\right)^2.$$

С помощью аналитического продолжения получаем справедливость этих двух выражений для комплексных λ из области $|\lambda| < 1$. Таким образом, для $\rho_2(\lambda)$ имеется следующее разложение:

$$\rho_2(\lambda) = \frac{1}{12}\gamma^{-2}(1-\lambda)^{-3} + \mathscr{E}.$$

С использованием леммы 3.1 и вычислений, аналогичных проведенным для $\rho_3(\lambda)$, получаем $a_2(n) \sim n^2/24\gamma^2$.

Несложно показать, что $b_2(n) \sim a_3(n)$ и $b_3(n) \sim a_2(n)$, таким образом,

$$\operatorname{var}(V_n) \sim 4\left(\frac{1}{12\gamma^2} + \frac{1}{\pi^2\gamma^2}\right)n^2.$$

3.3. Доказательство теоремы 2.1(ii). Рассмотрим теперь случай $d = 2$ с невырожденной ковариационной матрицей Σ, откуда следует, что $f(t) = 1 - \frac{1}{2}\langle \Sigma t \mid t\rangle + R(t)$ для $t \in J = [-\pi, \pi)^2$, где $R(t) = o(|t|^2)$ при $t \to 0$. Рассматривая комплексное λ и применяя лемму 3.1, мы можем обойти дополнительные ограничения на случайное блуждание, налагаемые в [5, 6], как было сказано в начале этого раздела.

Продолжим вычисления с $a_3(n)$, определенным в (3.2). Имеем

$$\rho_3(\lambda) = (1-\lambda)^{-2}(2\pi)^{-4} \iint\limits_{J^2} \frac{\lambda f(t_2)(1-f(t_1))\,dt_1 dt_2}{(1-\lambda f(t_1))^2(1-\lambda f(t_2))(1-\lambda f(t_1)f(t_2))},$$

где $J = [-\pi, \pi)^2$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, $|\lambda| < 1$. Используя разложение Тейлора для f, можем вывести оценку снизу для величин $|1-\lambda f(t_1)|$ и $|1-\lambda f(t_1)f(t_2)|$ при $|t_1|, |t_2| < \varepsilon$. Для удобства запишем $g(t_1, t_2) \equiv \langle \Sigma t_1 \mid t_1\rangle + \langle \Sigma t_2 \mid t_2\rangle$. Далее,

$$|1-\lambda f(t_1)| \geq \left|\left|1-\lambda + \frac{\lambda}{2}\langle \Sigma t_1 \mid t_1\rangle\right| - \theta_\varepsilon \langle \Sigma t_1 \mid t_1\rangle\right|,$$

$$|1-\lambda f(t_1)f(t_2)| \geq \left|\left|1-\lambda + \frac{\lambda}{2} g(t_1,t_2)\right| - \Delta_\varepsilon g(t_1,t_2)\right|,$$

и при $z_1 \equiv (1-\lambda)/|1-\lambda|$, $z_2 = \lambda/2$ для $\mathrm{Re}(\lambda) > a \in (0,1)$ имеем

$$|z_1 + z_2\langle \Sigma t_1 \mid t_1\rangle| - \theta_\varepsilon\langle \Sigma t_1 \mid t_1\rangle \geq C(1 \wedge \langle \Sigma t_1 \mid t_1\rangle),$$

$$|z_1 + z_2 g(t_1,t_2)| - \Delta_\varepsilon g(t_1,t_2) \geq C(1 \wedge g(t_1,t_2))$$

для положительного $\theta_\varepsilon, \Delta_\varepsilon \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Используя эти оценки, можно показать, что интеграл I вне U_ε допускает оценку

$$|I| \leq C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3} + C|1-\lambda|^{-2}\log_+|1-\lambda|^{-1},$$

где $C(\varepsilon) > 0$ — константа такая, что $C(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$. Снова для $\mathrm{Re}(\lambda) \leq a$ имеем $|\rho_3(\lambda)| \leq K$. С этого момента будем считать, что $\mathrm{Re}(\lambda) > a$. Таким образом,

$$\rho_3(\lambda) = (1-\lambda)^{-2}(2\pi)^{-4}|\Sigma|^{-1} \times \iint\limits_{U_\varepsilon} \frac{\frac{\lambda}{2}|t_1|^2\,dt_1 dt_2}{\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{2}|t_1|^2\right)^2\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{2}|t_2|^2\right)\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{2}(|t_1|^2+|t_2|^2)\right)} + I + E,$$

где E — ошибка, возникающая при использовании разложения Тейлора под знаком интеграла. Аналогично рассуждениям п. 3.2 получаем оценку для E:

$$|E| \leq C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3}.$$

Наконец, заменив область интегрирования вещественной плоскостью, получим

$$|F| \leq C|1-\lambda|^{-2}\log_+|1-\lambda|^{-1}.$$

Теперь для вещественного $\lambda \in (1/2, 1)$ после перехода к полярным координатам имеем

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2} \frac{\frac{\lambda}{2}|t_1|^2\,dt_1 dt_2}{\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{2}|t_1|^2\right)^2\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{2}|t_2|^2\right)\left(1-\lambda+\frac{\lambda}{2}(|t_1|^2+|t_2|^2)\right)}$$

$$= (2\pi)^2(1-\lambda)^{-1}\lambda^{-2}\int\limits_0^\infty\int\limits_0^\infty \frac{r\,drds}{(1+r)^2(1+s)(1+r+s)} = (2\pi)^2\lambda^{-2}(1-\lambda)^{-1}.$$

С помощью аналитического продолжения для всех $|\lambda| < 1$ получаем

$$\rho_3(\lambda) = (2\pi)^{-2}|\Sigma|^{-1}(1-\lambda)^{-3} + \mathscr{E},$$

где $\mathscr{E}$ — это итоговая величина ошибки, удовлетворяющая

$$|\mathscr{E}| \le C(\varepsilon)|1-\lambda|^{-3} + C|1-\lambda|^{-2} + C|1-\lambda|^{-2}\log_+|1-\lambda|^{-1}.$$

Применение леммы 3.1 с $g(\lambda) = \rho_3(\lambda) - (2\pi)^{-2}|\Sigma|^{-1}(1-\lambda)^{-3}$ дает

$$\left|a_3(n) - \frac{1}{8\pi^2|\Sigma|}n^2\right| \le C(\varepsilon)n^2 + D(\varepsilon)n\log(n) + D(\varepsilon)n,$$

где опять $C(\varepsilon) \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, а $D(\varepsilon)$ может быть неограниченной, что влечет соотношение $a_3(n) \sim n^2/8\pi^2|\Sigma|$.

Вычисление асимптотики $a_2(n)$ подобным образом дает

$$a_2(n) \sim \frac{1}{2}(2\pi)^{-2}|\Sigma|^{-1}\kappa n^2,$$

где κ определено в теореме 2.1(ii). Наконец, несложно показать, что $b_2(n) \sim a_3(n)$ и $b_3(n) \sim a_2(n)$, что приводит к необходимой аппроксимации

$$\operatorname{var}(V_n) \sim 4(2\pi)^{-2}|\Sigma|^{-1}(1+\kappa)n^2.$$

4. Доказательство теоремы 2.2

Докажем слабую сходимость распределений $Y_n(t)$ в $D[0,1]$, показав сначала сходимость конечномерных распределений, а затем проверив свойство плотности.

Пусть $N_x(n) = \sum_{i=0}^{n} \mathbf{1}(S_i = x)$ означает локальное время в $x \in \mathbb{Z}$ до момента времени n. Тогда можно записать

$$Z_n = \sum_{i=0}^{n} \xi(S_i) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} N_x(n)\xi_x.$$

Сформулируем следующий результат по асимптотике моментов локального времени самопересечений V_n.

Лемма 4.1. *Пусть $S_n, n \ge 0$, — случайное блуждание, удовлетворяющее предположениям теоремы 2.2(i), и V_n — локальное время его самопересечений, определенное в (1.1). Тогда $\mathbb{E}(V_n) \sim 2n\log n/\pi\gamma$, $V_n/\mathbb{E}V_n \to 1$, и $\sup_x N_x(n) = o(n^\varepsilon)$ п. н. для всех $\varepsilon > 0$. Если к тому же $0 < A < B$, то*

$$\sum_{j=1}^{[An]} \sum_{i=[An]+1}^{[Bn]} \mathbf{1}(S_i = S_j) = o(n\log n) \quad \text{п. н. при } n \to \infty.$$

Доказательство п. н. сходимости $V_n/\mathbb{E}V_n \to 1$, по существу, дано в [10], но оно опирается в значительной степени на оценку $\operatorname{var}(V_n) = O(n^2)$. Последняя может быть легко выведена из [5].

Пусть даны $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}$, $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_m$, тогда

$$\sum_{j=1}^{m} b_j(Y_n(t_j) - Y_n(t_{j-1})) = \sum_{x\in\mathbb{Z}} \sum_{j=1}^{m} b_j(N_x([nt_j]) - N_x([nt_{j-1}]))\xi(x)/d_n,$$

где $d_n = \sigma\sqrt{2n\log n}/\sqrt{\pi\gamma}$. Пусть $\mathscr{A} = \sigma(X_1, X_2, \dots)$ — σ-алгебра, порожденная приращениями случайного блуждания. При фиксации событий из $\mathscr{A}$ выражение выше представляет собой сумму независимых разнораспределенных случайных величин. Чтобы упростить обозначения, запишем

$$s_n^2 = d_n^{-2}\sigma^2 \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^m b_j(N_x([nt_j]) - N_x([nt_{j-1}])) \right)^2,$$

$$C(n,x) = d_n^{-1} \sum_{j=1}^m b_j(N_x([nt_j]) - N_x([nt_{j-1}])).$$

Проверим, что условие Линдеберга выполнено при фиксации $\mathscr{A}$. Достаточно показать, что для всех $\varepsilon > 0$ и почти всех траекторий условного блуждания выполнено

$$s_n^{-2} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}[C(n,x)^2\xi(x)^2 \mathbf{1}(C(n,x)\xi(x) \geq \varepsilon s_n) \mid \mathscr{A}] \to 0, \quad n \to \infty.$$

Используя результаты леммы 4.1, можно показать, что

$$d_n^{-2} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^m b_j(N_x([nt_j]) - N_x([nt_{j-1}])) \right)^2 \to \sigma^{-2} \sum_{j=1}^m b_j^2(t_j - t_{j-1}),$$

$$\sum_{j=1}^m b_j(N_x([nt_j]) - N_x([nt_{j-1}])) = o(n^\delta)$$

п. н. при $n \to \infty$ для любого $\delta > 0$. Вместе эти факты влекут сходимость $s_n/C(n,x) \to \infty$, и из квадратичной интегрируемости $\xi(x)$ следует

$$s_n^{-2} \sum_{x\in\mathbb{Z}} \mathbb{E}\big(C(n,x)^2\xi(x)^2 \mathbf{1}\big(\xi(x)^2 \geq \varepsilon s_n^2/C(n,x)^2\big) \mid \mathscr{A}\big)$$
$$= C\mathbb{E}\big(\xi(x)^2 \mathbf{1}\big(\xi(x)^2 \geq \varepsilon s_n^2/C(n,x)^2\big)\big|\mathscr{A}\big) \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, условие Линдеберга выполнено при фиксации $\mathscr{A}$ для почти всех траекторий случайного блуждания, и в силу центральной предельной теоремы и того факта, что

$$d_n^{-2}\sigma^2 \sum_{x\in\mathbb{Z}} \left(\sum_{j=1}^m b_j(N_x([nt_j]) - N_x([nt_{j-1}])) \right)^2 \to \sum_{j=1}^m b_j^2(t_j - t_{j-1})$$

п. н., имеем

$$\sum_{j=1}^m b_j(Y_n(t_j) - Y_n(t_{j-1})) \xrightarrow{D} N\left(0, \sum_{j=1}^m b_j^2(t_j - t_{j-1})\right).$$

Сходимость конечномерных распределений следует из теоремы Крамера — Уолда.

Плотность допредельных распределений может быть получена аккуратным применением доказательства Болтхаузена [1]. Поочередно срежем с помощью монотонных функций $\xi_x = f_{M^+}(\xi_x) + f_{M^-}(\xi_x) + f^M(\xi_x)$, где $f^M(y) = y$ для $|y| \leq M$ и M в ином случае, $f_{M^+}(y) = y - M$ для $y > M$ и 0 иначе и $f_{M^-}(y) = y + M$ для $y < -M$ и 0 иначе. Из неравенства Ньюмена — Райта для максимума (см. [15]) следует, что левая и правая части среды, соответствующие f_{M^+} и f_{M^-}, сходятся к нулю. Плотность распределений срезанной среды вытекает из неравенства для максимума из [16, теорема 3.1].

В заключение мы хотели бы поблагодарить рецензента за ряд полезных замечаний.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Kesten H., Spitzer F.* A limit theorem related to a new class of self-similar processes // Z. Wahrsch. verw. Gebiete. 1979. Bd 50 . S. 5–25.
2. *Lawler G. F.* Intersections of random walks. Boston, MA: Birkhäuser, 1991.
3. *Varadhan S. R. S.* Appendix to Euclidean quantum field theory by K. Symanzik // Local quantum theory (R. Jost ed.). New York: Acad. Press, 1969.
4. *Symanzik K.* Euclidean quantum field theory // Local quantum theory (R. Jost, ed.). New York: Acad. Press, 1969. P. 152–226.
5. *Bolthausen E.* A central limit theorem for two-dimensional random walks in random sceneries // Ann. Probab. 1989. V. 17. P. 108–115.
6. *Černý J.* Moments and distribution of the local time of a two-dimensional random walk // Stoch. Proc. Appl. 2007. V. 117. P. 262–270.
7. *Lewis T. M.* A law of the iterated logarithm for random walk in random scenery with deterministic normalizers // J. Theor. Probab. 1993. V. 6, N 2. P. 209–230.
8. *Боровков А. А.* Тауберовы и абелевы теоремы для быстро убывающих распределений и их приложения к устойчивым законам // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 5. С. 1007–1018.
9. *Spitzer F.* Principles of random walk. Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1976.
10. *Guillotin-Plantard N., Prieur C.* Central limit theorem for sampled sums of dependent random variables // ESAIM. 2010. DOI: 10.1051.
11. *Bass R.F., Chen X., Rosen J.* Moderate deviations and laws of the iterated logarithm for the renormalized self-intersection local times of planar random walks // Electron. J. Probab. 2006. V. 11, N 37. P. 993–1030.
12. *Flajolet P., Odlyzko A. M.* Singularity analysis of generating functions // SIAM J. Discrete Math. 1990. V. 3, N 2. P. 216–240.
13. *Wiener N.* Tauberian theorems // Ann. Math. 1932. V. 33. P. 1–100.
14. *Knuth D. E., Wilf H. S.* A short proof of Darboux's lemma // Appl. Math. Lett. 1989. V. 2, N 2. P. 139–140.
15. *Newman C. M., Wright A. L.* An invariance principle for certain dependent sequences // Ann. Probab. 1981. V. 9, N 4. P. 671–675.
16. *Móricz F. A., Serfling R. J., Stout W. F.* Moment and probability bounds with quasi-superadditive structure for the maximum partial sum // Ann. Probab. 1982. V. 10, N 4. P. 1032–1040.

Статья поступила 4 декабря 2010 г.

George Deligiannidis (Делигианнидис Георг)
Department of Mathematics, University of Leicester, LE1 7RH, UK
gd84@le.ac.uk

Sergey Utev (Утев Сергей Александрович)
School of Mathematical Sciences, University of Nottingham, NG7 2RD, UK
sergey.utev@nottingham.ac.uk