Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 510.223

ЭФФЕКТИВНАЯ МИНИМАЛЬНАЯ КОДИРОВКА НЕСЧЕТНЫХ МНОЖЕСТВ

В. Г. Кановей, В. А. Любецкий

Аннотация. Предлагается метод кодирования множеств счетных ординалов сохраняющими мощности генерическими вещественными числами, обладающими свойством минимальности над кодируемым множеством.

Если $W \subseteq \omega_1$, то найдется сохраняющее кардиналы генерическое расширение $\mathrm{L}[W][x]$ класса $\mathrm{L}[W]$ генерическим вещественным числом x таким, что множество W принадлежит классу $\mathrm{L}[x]$, т. е. конструктивно по Гёделю относительно x, а само x минимально над $\mathrm{L}[W]$.

Ключевые слова: форсинг, минимальная кодировка, относительно конструктивное множество.

§ 1. Введение

Эффективная кодировка одних множеств другими принадлежит к наиболее важным вопросам современной теории множеств. При этом кодирующее множество должно быть «более простым», чем кодируемое. Понятие «более простое» может уточняться по-разному. Например, несчетное множество может кодироваться счетным, скажем, вещественным числом. Борелевские и проективные множества вещественных чисел допускают такое кодирование фактически по определению. Но если говорить о кодировании вещественным числом произвольного множества $W \subseteq \omega_1$ (счетных ординалов), то на основе аксиом теории множества Цермело — Френкеля **ZFC** это не представляется возможным сделать. Такое множество W нужно кодировать *генерическим* вещественным числом x, т. е. таким, которое, вообще говоря, отсутствует в данном теоретико-множественном универсуме, но которое можно присоединить к нему с помощью форсинга. Результатом такого типа является наша главная

Теорема 1. *Предположим, что* $W \subseteq \omega_1$ *и выполнено* $\mathrm{V} = \mathrm{L}[W]$, *т. е. все множества принадлежат* $\mathrm{L}[W]$. *Тогда найдется сохраняющее кардиналы расширение* $\mathrm{L}[W][x]$ *универсума* $\mathrm{V} = \mathrm{L}[W]$ *генерическим вещественным числом* x, *для которого*

1) $W \in \mathrm{L}[x]$ *и* W *принадлежит классу* $\Delta_1^{\mathrm{HC}}(x)$ *в* $\mathrm{L}[x]$;

2) *если вещественное число* y *принадлежит* $\mathrm{L}[x]$, *то* $x \in \mathrm{L}[y]$ *или* $y \in \mathrm{L}[W]$.

Напомним, что $\mathrm{L}[z]$ — это класс всех множеств, конструктивных по Гёделю относительно данного множества z. В частности, условие $\mathrm{V} = \mathrm{L}[W]$ означает, что все множества являются конструктивными относительно W. Это может произойти, например, если рассматриваемый универсум является расширением

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 07–01–00445).

конструктивного универсума L присоединением генерического множества ординалов W, причем множество вынуждающих условий должно быть устроено так, что W кодирует счетность каждого ординала из W.

Далее, HC — множество всех множеств, транзитивные замыкания которых не более чем счетны, а $\Delta_1^{\mathrm{HC}}(x)$ — совокупность всех множеств $X \subseteq \mathrm{HC}$, которые определимы в HC как Σ_1-формулой, так и Π_1-формулой, обе формулы с единственным параметром x. В сущности, $W \in \Delta_1^{\mathrm{HC}}(x)$ означает, что если перейти от счетных ординалов (а W состоит из них) к кодирующим их вещественным числам, то полученное множество кодов принадлежит классу $\Delta_2^1(x)$ эффективной проективной иерархии. См. об этом более подробно в [1, 2], а о проективной иерархии — в наших книгах [3, 4].

Заключение 1 теоремы означает, что x эффективно кодирует множество W как в части гёделевой конструктивности, так и в части эффективной проективной иерархии. Заключение 2 теоремы означает *минимальность* x над $\mathrm{L}[W]$; оно утверждает, что нет никаких вещественных чисел строго между W и x в части относительной конструктивности.

Кодирующие методы для результатов типа теоремы 1 известны в теории множеств довольно давно. К ним относится, например, почти дизъюнктная кодировка [5, 6], изложенная на русском языке в [7]. С ее помощью теорема 1 без требования 2 минимальности легко доказывается в частном случае, когда найдется вещественное число $z \in \mathrm{L}[W]$, для которого $\omega_1^{\mathrm{L}[z]} = \omega_1^{\mathrm{L}[W]}$. Более сложный частный случай состоит в том, что требуется, чтобы для любого предельного ординала $\lambda < \omega_1^{\mathrm{L}[W]}$ было выполнено $\lambda < \omega_1^{\mathrm{L}[W \cap \lambda]}$ строго. В этом случае искомый форсинг для теоремы 1 (без минимальности) также может быть основан на почти дизъюнктной кодировке. Об этих результатах см. в [8, 9].

Наш подход состоит в использовании другого кодирующего метода, восходящего к статье Йенсена [10]. Он состоит в построении множества вынуждающих условий $\mathbb{P}$ из совершенных бинарных деревьев, т. е. «подфорсинга» форсинга Сакса. Мы построим $\mathbb{P}$ в виде $\mathbb{P} = \bigcup_{\xi < \omega_1} \mathbb{P}_\xi$ в § 5, после общих предварительных определений в § 2, введения обозначений, связанных с нашей кодировкой, в § 3 и определения особой ω_1-последовательности $\widehat{\varphi}$ вещественных чисел в § 4, которая представляет собой более удобную форму множества W. Этот форсинг $\mathbb{P}$ (с некоторой модификацией в § 8) будет достаточен для доказательства теоремы 1 в § 8, но перед этим доказывается сохранение кардиналов в § 6 и рассматриваются кодирующие свойства $\mathbb{P}$ в § 7.

О форсинге, моделях теории множеств, конструктивности и связанных с этим всем вопросах см. более подробно на русском языке в книге [1] (включая добавление [7]), а также в наших обзорных статьях [2, 11].

§ 2. О совершенных деревьях

Вещественными числами, как это принято в дескриптивной теории множеств, считаются элементы *бэровского пространства* ω^ω, состоящего из всех функций $x : \omega \to \omega$, т. е. всех бесконечных последовательностей натуральных чисел. Если $s \in \omega^{<\omega}$ (конечная последовательность натуральных чисел), то положим $\mathscr{N}_s = \{x \in \omega^\omega : s \subset x\}$, где $s \subset x$ означает, что конечная последовательность s начинает бесконечную последовательность x. Множества вида $\mathscr{N}_s$ образуют базу топологии ω^ω.

Множество 2^ω всех функций $x : \omega \to 2 = \{0, 1\}$, т. е. всех бесконечных диадических последовательностей, является подмножеством ω^ω; это канторов дисконтинуум. Соответственно множество $2^{<\omega}$ всех конечных последовательностей чисел 0 и 1 является подмножеством множества $\omega^{<\omega}$. Если $s \in 2^{<\omega}$, то положим $\mathscr{D}_s = \{x \in 2^\omega : s \subset x\}$.

Отношение эквивалентности $\mathtt{E_0}$ определяется на множестве ω^ω следующим образом: $x \mathtt{E_0} y$, когда $x(n) = y(n)$ для почти всех (т. е. кроме конечного числа) значений n (см. [3]).

Если $x \in \omega^\omega$ и $n \in \omega$, то полагаем $(x)_n(k) = x(2^n(2k+1)-1)$, так что $(x)_n \in \omega^\omega$. Определим $x_{\text{чет}} \in \omega^\omega$ так: $x_{\text{чет}}(n) = x(2n)$ для всех n.

Будем рассматривать совершенные множества $P \subseteq 2^\omega$. Каждое такое множество P однозначно определяется своим *кодом*:

$$\mathbf{cod} P = \{s \in 2^{<\omega} : P \cap \mathscr{D}_s \neq \varnothing\},$$

так что если $\mathbf{cod} P = S$, то, обратно, P тождественно множеству

$$[S] = \{a \in 2^\omega : \forall m (a{\restriction}m \in S)\}.$$

В этом случае $S = \mathbf{cod} P$ — совершенное дерево в $2^{<\omega}$, т. е. Λ (пустая последовательность) принадлежит S и, кроме того,

1) если $s \in S$, то хотя бы одно из продолжений $s^\wedge 0$ и $s^\wedge 1$ принадлежит S, и, обратно, если $s^\wedge i \in S$ $(i = 0, 1)$ то $s \in S$;

2) если $s \in S$, то S имеет точку ветвления выше s, т. е. имеется такое $t \in S$, что $s \subseteq t$ и оба продолжения $t^\wedge 0$ и $t^\wedge 1$ принадлежат S.

Обозначим через $\mathbf{Perf}$ множество всех совершенных деревьев $S \subseteq 2^{<\omega}$.

Множество $A \subseteq \mathbf{Perf}$ называется *антицепью*, когда $[S] \cap [T] = \varnothing$ для любой пары $S \neq T$ в A. Множество $D \subseteq \mathbb{X} \subseteq \mathbf{Perf}$ называется *плотным в* $\mathbb{X}$, если для любого $S \in \mathbb{X}$ найдется дерево $T \in D$, $T \subseteq S$. Заметим, что если $S, T \in \mathbf{Perf}$, то соотношение $S \subseteq T$ равносильно $[S] \subseteq [T]$.

Для каждого $S \in \mathbf{Perf}$ через $\mathrm{CO}(S)$ обозначим множество всех деревьев $T \in \mathbf{Perf}$, $T \subseteq S$, таких, что множество $[T]$ открыто-замкнуто в $[S]$. В силу компактности в этом случае $[T]$ является пересечением $[S]$ с конечным объединением множеств $\mathscr{D}_s$, $s \in 2^{<\omega}$, а потому $\mathrm{CO}(S)$ счетно. Стало быть, если $\mathbb{X} \subseteq \mathbf{Perf}$ не более чем счетно, то и множество $\mathrm{CO}(\mathbb{X}) = \bigcup_{S \in \mathbb{X}} \mathrm{CO}(S)$ не более чем счетно. Множество $\mathbb{X}$ назовем CO-*замкнутым* , если $\mathbb{X} = \mathrm{CO}(\mathbb{X})$, и CO-*плотным* , если $\mathbb{X}$ плотно в $\mathrm{CO}(\mathbb{X})$.

Лемма 2. *Если множество $\mathbb{X} \subseteq \mathbf{Perf}$ CO-плотно и $S_1, \dots, S_n \in \mathbb{X}$, то найдутся деревья $T_1, \dots, T_n \in \mathbb{X}$, для которых $T_i \subseteq S_i$ при любом i и $[T_i] \cap [T_j] = \varnothing$ при $i \neq j$.*

Доказательство. Пусть для простоты $n = 2$. Существуют точки $x_1 \in [S_1]$ и $x_2 \in [S_2]$, $x_1 \neq x_2$. Найдется число $m \in \omega$, для которого $x_1{\restriction}m = u \neq v = x_2{\restriction}m$. Тогда деревья $T_1' = \{s \in S_1 : u \subseteq s \vee s \subseteq u\}$ и $T_2' = \{s \in S_2 : u \subseteq s \vee s \subseteq v\}$ принадлежат $\mathrm{CO}(\mathbb{X})$ и $[T_1'] \cap [T_2'] = \varnothing$. В силу CO-плотности найдутся деревья $T_1, T_2 \in \mathbb{X}$, удовлетворяющие $T_i \subseteq T_i'$ при $i = 1, 2$. $\square$

Если $S \in \mathbf{Perf}$ и $\mathscr{X} \subseteq \mathbf{Perf}$, то запись $S \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup \mathscr{X}$ означает, что найдется *конечное* множество $\mathscr{X}' \subseteq \mathscr{X}$, для которого $[S] \subseteq \bigcup_{X \in \mathscr{X}'} [X]$.

Лемма 3. *Пусть $\mathbb{X} \subseteq \mathbf{Perf}$ — счетное CO-плотное множество, а $\{D_n : n \in \omega\}$ — некоторое счетное семейство плотных множеств $D_n \subseteq \mathbb{X}$. Тогда существует такая антицепь $A \subseteq \mathbf{Perf} \setminus \mathbb{X}$, что*

1) $T \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D_n$ *для всех* $n \in \omega$ *и* $T \in A$,

2) *ко всякому* $S \in \mathbb{X}$ *найдется* $T \in A$, $T \subseteq S$.

Доказательство. Фиксируем любое перечисление $\mathbb{X} = \{S_n : n \in \omega\}$. Для доказательства леммы достаточно построить семейство деревьев $T^n_s \in \mathbb{X}$, индексированных через $n \in \omega$ и $s \in 2^{<\omega}$ так, чтобы

(i) $T^n_\Lambda = S_n$ для всех n, где Λ — пустая последовательность;

(ii) $T^n_{s^\wedge 0} \cup T^n_{s^\wedge 1} \subseteq T^n_s$, но $T^n_{s^\wedge 0} \cap T^n_{s^\wedge 1} = \varnothing$;

(iii) $\operatorname{diam} T^n_s = \frac{1}{\operatorname{lh} s}$, где $\operatorname{lh} s$ — длина последовательности $s \in 2^{<\omega}$, а если $T \in \mathbf{Perf}$, то $\operatorname{diam} T$ обозначает $\frac{1}{m+1}$, где m — наибольшее число такое, что $a{\restriction}m = b{\restriction}m$ для всех $a, b \in [T]$;

(iv) пусть $X^n_k = \bigcup\limits_{\operatorname{lh} s = k} \left[T^n_s\right]$, тогда $X^n_n \cap X^m_n = \varnothing$ при $m < n$;

(v) если $n \in \omega$, $k \geq 1$, и $\operatorname{lh} s = k$, то $T^n_s \subseteq T$ для некоторого $T \in D_{k-1}$.

(vi) если $n, k \in \omega$, то либо найдется $s \in 2^{<\omega}$ такое, что $\operatorname{lh} s = k$ и $\left[T^n_s\right] \cap [S_k] = \varnothing$, либо $X^n_k \subsetneqq [S_k]$.

Детали несложного построения такой системы множеств оставим читателю. (В частности, для обеспечения п. (iv) нужно использовать лемму 2.) После того, как построение выполнено, берем $A = \{T_n : n \in \omega\}$, где $T_n = \bigcap\limits_{k \in \omega} \bigcup\limits_{\operatorname{lh} s = k} T^n_s$. Заметим, что п. (vi) влечет $A \cap \mathbb{X} = \varnothing$. $\square$

§ 3. Обозначения, связанные с кодировкой

Рассматриваются множества

$$\mathbf{R}^0 = \{b \in 2^\omega : \forall n((b)_n = (b)_0)\} \quad \text{и} \quad \mathbf{R} = \{x \in 2^\omega : \exists b \in \mathbf{R}^0(b\mathtt{E_0}x)\}.$$

Для каждого $x \in \mathbf{R}$ существует единственное $b = \mathbf{b}(x) \in \mathbf{R}^0$, для которого $x\mathtt{E_0}b$. В этом случае пусть $\mathtt{dif}(x)$ — наименьшее натуральное n такое, что $x(i) = b(i)$ для всех $i \geq n$. Если $x \in \mathbf{R}^{\text{чет}} = \{x \in 2^\omega : x_{\text{чет}} \in \mathbf{R}\}$, то положим $\mathbf{b}^{\text{чет}}(x) = \mathbf{b}(x_{\text{чет}})$ и $\boldsymbol{u}(x) = x{\restriction}(2\ \mathtt{dif}(x_{\text{чет}}))$.

Для $b \in 2^\omega$ и $n \geq 1$ пусть $U(b, n)$ — множество всех конечных последовательностей $s \in 2^{<\omega}$ длины $\operatorname{lh} s = 2n$ таких, что $s(2n-2) \neq b(n-1)$. Отдельно $U(b, 0)$ состоит из единственной пустой последовательности Λ. Положим $U(b) = \bigcup\limits_{n \in \omega} U(b, n)$. Если $u \in U(b, n)$, то определим

$$\widehat{Y}(b, u) = \{x \in \mathscr{D}_u : \forall k \geq n(x(2k = b(k))\} \quad \text{и} \quad \mathbf{T}(b, u) = \mathbf{cod}\widehat{Y}(b, u).$$

Тогда все деревья $\mathbf{T}(b, u)$, $u \in U(b)$, принадлежат $\mathbf{Perf}$, а множества $[\mathbf{T}(b, u)] = \widehat{Y}(b, u) \subseteq 2^\omega$ попарно дизъюнктны: $[\mathbf{T}(b, u)] \cap [\mathbf{T}(b, v)] = \varnothing$ при любых $u \neq v$ в $U(b)$ (безразлично одной длины или нет). Доказательство следующей леммы опускается в силу элементарности.

Лемма 4. *Выполнено* $\mathbf{R}^{\text{чет}} = \bigcup\limits_{b \in \mathbf{R}^0} \bigcup\limits_{u \in U(b)} [\mathbf{T}(b, u)]$, *причем если* $x \in \mathbf{R}^{\text{чет}}$, *то* $b = \mathbf{b}^{\text{чет}}(x) \in \mathbf{R}^0$, $u = \boldsymbol{u}(x) \in U(b)$, *и* $x \in [\mathbf{T}(b, u)]$.

Если множество $X \subseteq 2^\omega$ *непусто и открыто, то найдется* $u \in U(b)$, *для которого* $[\mathbf{T}(b, u)] \subseteq X$.

Теперь проведем релятивизацию этих определений к произвольному совершенному множеству $[P] \subseteq 2^\omega$, где $P \in \mathbf{Perf}$. Через $h_P : 2^\omega \xrightarrow{\text{на}} [P]$ обозначим канонический гомеоморфизм, полученный через соответствие точек ветвления дерева P и всех конечных последовательностей из $2^{<\omega}$. Если $x \in \mathbf{R}_P^{\text{чет}} = \bigl\{x \in [P] : h_P^{-1}(x) \in \mathbf{R}^{\text{чет}}\bigr\}$, то определяем

$$\mathbf{b}_P^{\text{чет}}(x) = \mathbf{b}^{\text{чет}}(x') \quad \text{и} \quad \boldsymbol{u}_P(x) = \boldsymbol{u}(x'), \quad \text{где} \quad x' = h_P^{-1}(x).$$

Соответственно если $b \in \mathbf{R}^0$ и $u \in U(b)$, то полагаем

$$\widehat{Y}_P(b,u) = \{h_P(y) : y \in \widehat{Y}(b,u)\} \quad \text{и} \quad T_P(b,u) = \mathbf{cod}\widehat{Y}_P(b,u).$$

Следствие 5. *Предположим, что $P \in \mathbf{Perf}$. Тогда*

$$\mathbf{R}_P^{\text{чет}} = \bigcup_{b\in\mathbf{R}^0} \bigcup_{u\in U(b)} [T_P(b,u)],$$

причем если $x \in \mathbf{R}_P^{\text{чет}}$, то $b = \mathbf{b}_P^{\text{чет}}(x) \in \mathbf{R}^0$, $u = \boldsymbol{u}_P(x) \in U(b)$, и $x \in [T_P(b,u)]$. Дополнительно

(i) *если $b \in \mathbf{R}^0$, то множество $\mathbf{Next}_P(b) = \{T_P(b,u) : u \in U(b)\} \subseteq \mathbf{Perf}$ является антицепью, т. е. $[T_P(b,u)] \cap [T_P(b,v)] = \varnothing$, каковы бы ни были $u \neq v$ в $U(b)$;*

(ii) *если множество $X \subseteq [P]$ непусто и открыто в $[P]$, то найдется $u \in U(b)$, для которого $[T_P(b,u)] \subseteq X$.* $\square$

§ 4. Вспомогательная функция $\widehat{\varphi}$

Зафиксируем рекурсивное перечисление $\mathbb{Q} = \{r_n : n \in \omega\}$ множества рациональных чисел $\mathbb{Q}$ (без повторений). Если $\xi < \omega_1$ (конечный или счетный ординал), то через Word_ξ обозначим совокупность всех $x \in 2^\omega$ таких, что множество $\{r_n : x(n) = 0\} \subseteq \mathbb{Q}$ вполне упорядочено естественным порядком рациональных чисел по типу ξ. Положим $\mathrm{Word} = \bigcup_{\xi<\omega_1} \mathrm{Word}_\xi$ (коды ординалов) и $|x| = \xi$ для $x \in \mathrm{Word}_\xi$. Если $x \in \mathrm{Word}$, то при $|x| = \xi \geq \omega$ существует некоторая конкретно определяемая из x биекция $\mathbf{f}_x : \omega \xrightarrow{\text{на}} \xi$, детали построения которой оставляются читателю. Если же $|x| < \omega$, то просто полагаем $\mathbf{f}_x(n) = n$ для каждого n.

Определение 6. Предположим, что $\varphi \in (2^\omega)^\lambda$ и $\lambda \leq \omega_1$. Определим $\Omega_1[\varphi] = \{0\} \cup \{\xi + 1 : \xi + 1 < \lambda\}$ (все непредельные ординалы до $\lambda = \operatorname{dom}\varphi$). Через $\Omega_2[\varphi]$ обозначим множество всех ординалов $\xi \leq \lambda$, $\xi \notin \Omega_1[\varphi]$, таких, что $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]}$.

Допустим, что $\xi \in \Omega_2[\varphi]$. Через $\mu_\xi[\varphi] = \mu_\xi[\varphi\restriction\xi]$ обозначим наименьший ординал $\mu > \xi$ такой, что $\mathrm{L}_\mu[\varphi\restriction\xi]$ является моделью теории $\mathbf{ZFC}^-$ (минус означает, что изъята аксиома степени) и ординал ξ счетен уже в $\mathrm{L}_\mu[\varphi\restriction\xi]$. Положим $M_\xi[\varphi] = \mathrm{L}_{\mu_\xi[\varphi]}[\varphi\restriction\xi]$. Тогда $\xi < \mu_\xi[\varphi] < \omega_1^{\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]}$ и множество $M_\xi[\varphi]$ является счетной транзитивной моделью теории $\mathbf{ZFC}^-$.

Наконец, пусть $\Omega_3[\varphi] = \{\xi : \xi \leq \lambda\} \setminus (\Omega_1[\varphi] \cup \Omega_2[\varphi])$. $\square$

Лемма 7. *Если $\xi < \lambda \leq \omega_1$, $\varphi \in (2^\omega)^\lambda$, $\xi \in \Omega_2[\varphi]$ и M — транзитивная модель $\mathbf{ZFC}^-$, содержащая $\varphi\restriction\xi$ и ординал $\mu_\xi[\varphi]$, то ординал $\mu_\xi[\varphi]$ счетен в M, следовательно, множество $M_\xi[\varphi]$ принадлежит M и счетно в M.*

Доказательство. Пусть $\kappa = M \cap \mathtt{Ord}$. Можно предполагать, что $M = \mathrm{L}_\kappa[\varphi\restriction\xi]$. Если все ординалы $\vartheta < \kappa$ счетны в M, то результат очевиден. В противном случае $\xi < \vartheta = \omega_1^M$, так как $\mu_\xi[\varphi] \in M = \mathrm{L}_\kappa[\varphi\restriction\xi]$. $\square$

Напомним, что $\mathbf{R}^0$ состоит из всех $x \in 2^\omega$, для которых $(x)_m = (x)_0$ для любого m. Введем более узкое множество $\mathbf{R}_0^+$, состоящее из всех $x \in \mathbf{R}^0$ таких, что $((x)_0)_0$ и $((x)_0)_1$ принадлежат Word. Каждому $x \in \mathbf{R}_0^+$ мы можем сопоставить последовательность $\boldsymbol{\chi}_x \in (2^\omega)^{\lambda+1}$, где $\lambda = |((x)_0)_0|$, полагая $\boldsymbol{\chi}_x(\lambda) = x$, а если $\eta < \lambda$, то $\boldsymbol{\chi}_x(\eta) = ((x)_0)_{k+2}$, где $k \in \omega$ удовлетворяет $\mathbf{f}_{((x)_0)_0}(k) = \eta$. Роль $((b)_0)_1$ будет разъяснена чуть ниже.

Теперь через Φ_λ, где $\lambda \le \omega_1$, обозначим множество всех функций $\varphi \in \left(\mathbf{R}_0^+\right)^\lambda$ (т. е. $\varphi : \lambda \to \mathbf{R}_0^+$), удовлетворяющих таким требованиям:

(1) $\varphi(0) \in 2^\omega$ удовлетворяет $\varphi(0)(n) = 0$ для каждого n,

(2) если $0 < \xi < \lambda$, то $|((\varphi(\xi))_0)_0| = \xi$ и $\varphi{\restriction}(\xi+1) = \boldsymbol{\chi}_{\varphi(\xi)}$, так что каждое значение $\varphi(\xi)$ кодирует ограниченную функцию $\varphi{\restriction}\xi$,

(3) если $0 < \xi < \lambda$ и $\xi \in \Omega_2[\varphi]$, то $((\varphi(\xi))_0)_1 \in \mathrm{Word}_{\mu_\xi[\varphi]}$, так что значение $\varphi(\xi)$ также кодирует ординал $\mu_\xi[\varphi{\restriction}\xi]$.

Положим $\Phi = \bigcup\limits_{\lambda \le \omega_1} \Phi_\lambda$.

Лемма 8. *Если $\lambda \le \omega_1$, $\varphi \in \Phi_\lambda$ и $\xi \in \Omega_3[\varphi]$, то $\xi = \omega_1^{\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]}$.*

Доказательство. Если $\varphi \in \Phi_\lambda$, то каждое значение $\varphi(\xi)$ кодирует не более чем счетность ординала ξ, а потому неравенство $\xi > \omega_1^{\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]}$ невозможно. В то же время по определению $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]}$ при $\xi \in \Omega_2[\varphi]$. □

Определение 9. Зафиксируем в соответствии с условием теоремы 1 какое-либо множество $W \subseteq \omega_1$, для которого $\mathrm{V} = \mathrm{L}[W]$. Определение Φ_λ не налагает слишком обременительных условий на значения $\varphi(\xi)$, $\xi \in \Omega_1[\varphi]$, а потому найдется функция $\varphi \in \Phi_{\omega_1}$, для которой $W \in \mathrm{L}[\varphi]$, а тогда, разумеется, и $\mathrm{V} = \mathrm{L}[\varphi]$. Более того, из тех же соображений вытекает, что такую функцию φ можно подобрать с выполнением следующего дополнительного требования: в любом генерическом расширении если $x \in 2^\omega$ и φ принадлежит классу Δ_1^{HC}, то W также есть Δ_1^{HC}.

Фиксируем такую $\widehat{\varphi} \in \Phi_{\omega_1}$ как основу дальнейших построений. □

§ 5. Множество вынуждающих условий

Теперь следует построение форсинга $\mathbb{P}$ для доказательства теоремы 1. Мы выполним более общую задачу: для любой последовательности $\varphi \in \Phi_{\omega_1}$ определим форсинг $\mathbb{P}[\varphi] = \bigcup\limits_{\xi<\omega_1} \mathbb{P}_\xi[\varphi]$, причем нашей целью будет соблюсти такие требования.

(А) Если $\xi < \omega_1$, то множество $\mathbb{P}_\xi[\varphi] \subseteq \mathbf{Perf}$ счетно и непусто.

(Б) Если $\eta < \xi$ и $S \in \mathbb{P}_\eta[\varphi]$, то найдется дерево $T \in \mathbb{P}_\xi[\varphi]$, $T \subseteq S$.

(В) Если $\xi \le \omega_1$, то подпоследовательность $\{\mathbb{P}_\eta[\varphi]\}_{\eta<\xi}$, а значит, и множество $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi] = \bigcup\limits_{\eta<\xi} \mathbb{P}_\eta[\varphi]$ принадлежат $\mathrm{L}[\varphi{\restriction}\xi]$.

(Г) Если $\xi \in \Omega_2[\varphi]$, то $\mathbb{P}_\xi[\varphi]$ — антицепь и соотношение $T \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D$ выполнено для любого дерева $T \in \mathbb{P}_\xi[\varphi]$ и любого множества $D \subseteq \mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$, $D \in M_\xi[\varphi]$, плотного в $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$.

Само построение производится индукцией по ξ.

1*. $\mathbb{P}_0[\varphi]$ состоит из всех деревьев вида $T_s = \mathbf{cod}\mathscr{D}_s$, где $s \in 2^{<\omega}$.

2*. Если $\xi = \eta + 1$, то пусть $\mathbb{P}_\xi[\varphi] = \bigcup\limits_{P \in \mathbb{P}_\eta[\varphi]} \mathbf{Next}_P(b)$, где $b = \varphi(\xi)$.

3*. Если $\xi \in \Omega_3[\varphi]$, то $\mathbb{P}_\xi[\varphi] = \bigcup\limits_{P \in \mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]} \mathbf{Next}_P(b)$, где $b = \varphi(\xi)$.

4*. Предположим, что $\xi \in \Omega_2[\varphi]$, другими словами, ординал ξ пределен и счетен в $\mathrm{L}[\varphi{\restriction}\xi]$, формально $\xi < \omega_1^{\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]}$. Здесь построение $\mathbb{P}_\xi[\varphi]$ требует большей работы. Прежде всего требуется согласно (В), чтобы $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi] \in \mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]$. Формально если это не так, то пусть для простоты $\mathbb{P}_\xi[\varphi] = \mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$, но на самом деле (см. ниже) эта посылка всегда будет выполнена. Рассмотрим счетную модель $M = M_\xi[\varphi] = \mathrm{L}_{\mu_\xi[\varphi]}[\varphi\restriction\xi]$ (см. § 4). Множество $\mathscr{D}$ всех плотных в $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$ множеств $D \subseteq \mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$, $D \in M$, также счетно, и в предположении $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi] \in \mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]$ выше принадлежит классу $\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]$ и счетно в нем по лемме 7. Согласно лемме 3, применяемой в $\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]$, найдется антицепь $E \in \mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]$, $E \subseteq \mathbf{Perf} \setminus \mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$, счетная в $\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]$ и такая, что 1) $T \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D$ для всех $D \in \mathscr{D}$ и $T \in E$; 2) E плотно в $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi] \cup E$, т. е. ко всякому дереву $S \in \mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$ найдется дерево $T \in E$, $T \subseteq S$. Берем в качестве $\mathbb{P}_\xi[\varphi]$ наименьшее (в смысле канонического гёделева полного упорядочения $\le^{\text{гёд}}_{\varphi\restriction\xi}$ класса $\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]$) из таких множеств E.

Шаг 4* и индуктивное построение множеств $\mathbb{P}_\xi[\varphi]$ этим закончены.

Свойство (В) вытекает из абсолютности построения: для любого $\xi < \omega_1$ начальный отрезок $\{\mathbb{P}_\eta[\varphi]\}_{\eta<\xi}$ воспроизводится в $\mathrm{L}[\varphi\restriction\xi]$. Свойство (Г) гарантируется шагом 4*. Свойство (Б) в нетривиальном случае $\xi \in \Omega_2[\varphi]$ также гарантируется в ходе построения на шаге 4*.

Выберем $\widehat{\varphi} \in \Phi_{\omega_1}$, следуя определению 9. Положим $\widehat{\mathbb{P}}_\xi = \mathbb{P}_\xi[\widehat{\varphi}]$ при любом ξ и $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P}[\widehat{\varphi}] = \bigcup\limits_{\xi<\omega_1} \widehat{\mathbb{P}}_\xi$. Это множество $\widehat{\mathbb{P}}$ и будет нашим форсингом.

С использованием следствия 5 легко получается

Лемма 10. *Множество* $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P}[\widehat{\varphi}]$ CO-*плотно в смысле* § 2.

Дополнительно если $\vartheta < \omega_1$, *то множество* $\widehat{\mathbb{P}}^{\ge\vartheta} = \bigcup\limits_{\vartheta\le\xi<\omega_1} \widehat{\mathbb{P}}_\xi$ *плотно в* $\widehat{\mathbb{P}}$, *а если* $\vartheta < \lambda < \omega_1$, *то множество* $\widehat{\mathbb{P}}^{\ge\vartheta}_{<\lambda} = \bigcup\limits_{\vartheta\le\xi<\lambda} \widehat{\mathbb{P}}_\xi$ *плотно в* $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda} = \bigcup\limits_{\xi<\lambda} \widehat{\mathbb{P}}_\xi$. $\square$

Из первого утверждения леммы следует, что любое $\widehat{\mathbb{P}}$-генерическое множество $G \subseteq \widehat{\mathbb{P}}$ порождает $\widehat{\mathbb{P}}$-генерическую точку $x_G \in 2^\omega$, т. е. единственный элемент пересечения $\bigcap\limits_{T\in G} [T]$, и тогда $G = \{T \in \widehat{\mathbb{P}} : x_G \in [T]\}$, так что $\mathrm{L}[G] = \mathrm{L}[x_G]$. Точки вида x_G (для $\widehat{\mathbb{P}}$-генерических множеств $G \subseteq \widehat{\mathbb{P}}$) сами называются $\widehat{\mathbb{P}}$-*генерическими*.

Лемма 11. *Если* M — *счетная транзитивная модель теории* $\mathbf{ZFC}^-$, $\lambda \in M$ — *ординал и* $\varphi \in \Phi_\lambda \cap M$, *то* $\mathbb{P}_\xi[\varphi] = (\mathbb{P}_\xi[\varphi])^M$ *для любого* $\xi < \lambda$. *Если, кроме того,* $\mu_\lambda[\varphi] \in M$, *то также* $\mathbb{P}_\lambda[\varphi] = (\mathbb{P}_\lambda[\varphi])^M$.

Доказательство. Если $\xi < \lambda$ и $\xi \in \Omega_2[\varphi]$, то ординал $\mu_\xi[\varphi]$ кодируется точкой $\varphi(\xi)$ по определению Φ_ξ. Следовательно, $\mu_\xi[\varphi] \in M$, так что модель $M_\xi[\varphi]$ принадлежит M и счетна в M по лемме 7. Это влечет требуемую абсолютность. $\square$

§ 6. Кардиналы сохраняются

Мы утверждаем, что *форсинг* $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P}[\widehat{\varphi}]$ *сохраняет кардиналы*, другими словами, если два множества $X, Y \in \mathrm{L}[\varphi]$ имеют разную мощность в $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}]$, то их мощность остается разной и в $\widehat{\mathbb{P}}$-генерических расширениях класса $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}]$. Достаточно доказать, что $\omega_1^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}]}$ остается кардиналом в указанных генерических расширениях. Следующая лемма выводит одно известное достаточное условие для сохранения $\omega_1^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}]}$ в нашем случае.

Лемма 12. *Предположим, что* $\{D_n : n \in \omega\}$ *— семейство плотных подмножеств множества* $\widehat{\mathbb{P}}$ *и* $S \in \widehat{\mathbb{P}}$. *Тогда найдется дерево* $T \in \widehat{\mathbb{P}}$, $T \subseteq S$, *такое, что* $T \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D_n$ *для каждого* n.

Доказательство. Докажем более общий факт: если $\lambda \in \Omega_3[\widehat{\varphi}]$ либо $\lambda = \omega_1$, то множество $\mathbb{P}_{<\lambda}$ (которое принадлежит $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]$ согласно (В) из § 5) удовлетворяет тому же требованию из условия леммы внутри $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]$. Доказываем этот факт по трансфинитной индукции, т. е. выведем его для какого-то ординала $\lambda \in \Omega_3[\widehat{\varphi}] \cup \{\omega_1\}$, предполагая, что для любого ординала $\lambda' \in \Omega_3[\widehat{\varphi}]$ с $\lambda' < \lambda$ оно выполнено. Сюда относятся случаи, когда λ — наименьший ординал в $\Omega_3[\widehat{\varphi}]$ либо когда $\lambda = \omega_1$ и $\Omega_3[\widehat{\varphi}]$ — пустое множество.

Итак, пусть $\lambda \in \Omega_3[\widehat{\varphi}] \cup \{\omega_1\}$. Тогда $\lambda = \omega_1^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]}$. Допустим, что $S \in \mathbb{P}_{<\lambda}$, все множества $D_n \subseteq \mathbb{P}_{<\lambda}$ плотны в $\mathbb{P}_{<\lambda}$ и $\{D_n\}_{n\in\omega} \in \mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]$. Эта гипотеза, записанная в виде формального предложения, тогда будет верна в модели $\mathrm{L}_\delta[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]$, где $\delta = \omega_2^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]}$. Взяв в $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]$ счетную элементарную подмодель модели $\mathrm{L}_\delta[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]$, содержащую S и последовательность множеств D_n, и применив к ней коллапс Мостовского (т. е. $\in$-изоморфизм на транзитивное множество), получим ординалы $\xi < \nu < \lambda$ такие, что $S \in \mathbb{P}_{<\xi}$, а все множества $D'_n = D_n \cap \mathbb{P}_{<\xi}$ плотны в $\mathbb{P}_{<\xi}$ и принадлежат множеству $N = \mathrm{L}_\mu[\widehat{\varphi}\restriction\xi]$. Здесь возможны два случая.

Случай 1. $\xi \in \Omega_3[\widehat{\varphi}]$. По индуктивному предположению результат верен для ξ, а потому дерево $T \subseteq S$ такое, что $T \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D'_n$ для всех n, имеется в $\mathbb{P}_{<\xi}$.

Случай 2. $\xi \in \Omega_2[\widehat{\varphi}]$. Ординал ξ несчетен в N, поскольку $\lambda = \omega_1^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]}$ несчетно в $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]$ и тем более в $\mathrm{L}_\delta[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]$. Отсюда следует $\nu < \mu_\xi[\widehat{\varphi}]$, а тогда $N \subseteq M_\xi[\widehat{\varphi}] = \mathrm{L}_{\mu_\xi[\widehat{\varphi}]}[\widehat{\varphi}\restriction\xi]$, так что все множества D'_n принадлежат $M_\xi[\widehat{\varphi}]$. Согласно (Б) из § 5 найдется дерево $T \in \widehat{\mathbb{P}}_\xi$, для которого $T \subseteq S$. В силу (Г) выполнено $T \subseteq^{\mathrm{fin}} D'_n$ для всех n, тем более $T \subseteq^{\mathrm{fin}} D_n$. $\square$

§ 7. Кодирующие свойства форсинга

Следующая процедура раскодировки и восстановления значений $\widehat{\varphi}(\xi)$ основана на следствии 5: зная дерево $P \in \mathbf{Perf}$ и точку $x \in [T_P(b,u)]$, мы можем восстановить значения b и u, а тогда и само множество $[T_P(b,u)]$.

Определение 13. Пусть $x \in 2^\omega$. Трансфинитной индукцией по $\alpha < \omega_1$ определяем следующие объекты:

(а) дерево $Q_\alpha(x) \in \mathbf{Perf}$ такое, что $x \in [Q_\alpha(x)]$, и ординал $\boldsymbol{\lambda}_\alpha(x) < \omega_1$;

(б) функция $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x) \in \Phi_{\boldsymbol{\lambda}_\alpha(x)}$, причем $\alpha < \beta \Longrightarrow \boldsymbol{\psi}_\alpha(x) \subset \boldsymbol{\psi}_\beta(x)$.

Построение либо идет до ω_1, либо заканчивается на некотором ординале $\xi^* < \omega_1$.

Начало. Положим $Q_0(x) = 2^{<\omega}$, так что $[Q_0(x)] = 2^\omega$ и заведомо $x \in [Q_0(x)]$, и $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x) = \Lambda$ (пустая функция), так что $\boldsymbol{\lambda}_0(x) = 0$.

Шаг $\alpha \to \alpha + 1$. Допустим, что объекты $P = Q_\alpha(x)$, $\boldsymbol{\lambda}_\alpha(x)$, $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$ уже построены и удовлетворяют (а) и условию $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x) \in \Phi_{\boldsymbol{\lambda}_\alpha(x)}$ в (б). В частности, $x \in [P]$. Если условие:

$(*)$ $x \in \mathbf{R}_P^{\text{чет}}$, $b = \mathbf{b}_P^{\text{чет}}(x) \in \mathbf{R}_0^+$, $|((b)_0)_0| = \boldsymbol{\lambda}_\alpha(x)$ и функция $\boldsymbol{\chi}_b$ принадлежит Φ_λ для какого-то $\lambda > \boldsymbol{\lambda}_\alpha(x)$ и удовлетворяет $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x) \subset \boldsymbol{\chi}_b$,

не выполнено, то построение заканчиваем. Допустим, что $(*)$ выполнено. Тогда $u = \boldsymbol{u}_P(x) \in U(b)$ и $x \in [T_P(b,u)]$ согласно следствию 5. Положим $Q_{\alpha+1}(x) = [T_P(b,u)]$, $\boldsymbol{\psi}_{\alpha+1}(x) = \boldsymbol{\chi}_b$ и $\boldsymbol{\lambda}_{\alpha+1}(x) = \lambda = \operatorname{dom} \boldsymbol{\psi}_{\alpha+1}(x)$.

Предельный шаг. Пусть $\gamma < \omega_1$ — предельный ординал и значения $Q_\alpha(x)$, $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$, $\boldsymbol{\lambda}_\alpha(x)$ уже определены для всех $\alpha < \gamma$ и удовлетворяют (а), (б) в этой области. Положим $\boldsymbol{\psi}_\gamma(x) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$; тогда $\psi = \boldsymbol{\psi}_\gamma(x) \in \Phi_\lambda$, где $\lambda = \boldsymbol{\lambda}_\gamma(x) := \sup_{\alpha<\gamma} \boldsymbol{\lambda}_\alpha(x)$. Если условие:

(†) функция $\psi = \boldsymbol{\psi}_\gamma(x)$ удовлетворяет $\omega_1^{\mathrm{L}[\psi]} > \lambda$, где $\lambda = \operatorname{dom}\psi = \boldsymbol{\lambda}_\gamma(x)$, т. е. формально, $\lambda \in \Omega_2[\psi]$,

не выполнено, то построение заканчиваем. Допустим, что (†) выполнено. Производим в $\mathrm{L}[\psi]$ построение § 5 до шага λ. Именно, определяем множество $\mathbb{P}_\alpha[\psi] \subseteq \mathbf{Perf}$ для каждого $\alpha < \lambda$, определяем $\mathbb{P}_{<\lambda}[\psi]$ и подстраиваем антицепь $\mathbb{P}_\lambda[\psi]$ согласно 4^*. (Заметим, что $\lambda \in \Omega_2[\psi]$.) Если

(‡) существует единственное дерево $T \in \mathbb{P}_\lambda[\psi]$, для которого $x \in [T]$,

то берем это T в роли $Q_\gamma(x)$, а иначе построение заканчивается. $\square$

Лемма 14. *Если M — счетная транзитивная модель $\mathbf{ZFC}^-$, $x \in 2^\omega \cap M$, $\alpha \in M$ — ординал, счетный в M, и объекты $(\boldsymbol{\psi}_\alpha(x))^M$, $(Q_\alpha(x))^M$ определены, то $(\boldsymbol{\psi}_\alpha(x))^M = \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$ и $(Q_\alpha(x))^M = Q_\alpha(x)$.*

Доказательство проведем индукцией по α. Шаг $\alpha \to \alpha + 1$ тривиален. Пусть $\gamma \in M$ — предельный ординал, счетный в M, и объекты $(\boldsymbol{\psi}_\gamma(x))^M$ и $(Q_\gamma(x))^M$ существуют в M. Тогда $(\boldsymbol{\psi}_\alpha(x))^M$ и $(Q_\alpha(x))^M$ существуют в M для каждого $\alpha < \gamma$ и по индуктивному предположению $(\boldsymbol{\psi}_\alpha(x))^M = \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$ и $(Q_\alpha(x))^M = Q_\alpha(x)$ для $\alpha < \gamma$.

Понятно, что $(\boldsymbol{\psi}_\gamma(x))^M = \boldsymbol{\psi}_\gamma(x) = \bigcup_{\alpha<\gamma} \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$. Поэтому $\psi = \boldsymbol{\psi}_\gamma(x) \in M$. С другой стороны, $\psi \in \Phi_\lambda$, где $\lambda = \boldsymbol{\lambda}_\gamma(x)$. Стало быть, последовательность $\{\mathbb{P}_\xi[\psi]\}_{\xi<\lambda}$ также принадлежит M и совпадает с $(\{\mathbb{P}_\xi[\psi]\}_{\xi<\lambda})^M$ по лемме 11. Так как $(Q_\gamma(x))^M$ существует в M, условие (†) выполнено в M, так что $\lambda \in \Omega_2[\psi]$ в M, поэтому $\lambda \in \Omega_2[\psi]$ и в универсуме всех множеств.

Из существования $(Q_\gamma(x))^M$ следует существование $(\mathbb{P}_\lambda[\psi])^M$ в M: по существу $(Q_\gamma(x))^M$ есть единственное дерево $T \in (\mathbb{P}_\lambda[\psi])^M$, для которого $x \in [T]$. Также $(\mathbb{P}_\lambda[\psi])^M$ есть наименьшая в M в смысле гёделева порядка счетная антицепь в $\mathbf{Perf}$ среди определенного семейства антицепей. Отсюда следует, что $(\mathbb{P}_\lambda[\psi])^M$ совпадает с $\mathbb{P}_\lambda[\psi]$, тем самым $(Q_\alpha(x))^M = Q_\alpha(x)$, что и требовалось. $\square$

Следующая ключевая лемма показывает, что определение 13 правильно восстанавливает функцию $\widehat{\varphi}$ при условии, что мы используем точки x на достаточно высоких уровнях $\widehat{\mathbb{P}}_\lambda$ форсинга $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P}[\widehat{\varphi}]$.

Лемма 15. *Пусть $\lambda < \omega_1$, $T \in \widehat{\mathbb{P}}_\lambda = \mathbb{P}_\lambda[\widehat{\varphi}]$ и $x \in [T]$. Тогда найдется ординал $\alpha \le \lambda$ такой, что значения $Q_\alpha(x)$ и $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$ определены согласно определению 13, $\operatorname{dom}\boldsymbol{\psi}_\alpha(x) = \boldsymbol{\lambda}_\alpha(x) = \xi$, $\widehat{\varphi}\restriction\lambda = \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$ и $T = Q_\alpha(x)$.*

Доказательство проведем индукцией по λ. Если $\lambda = 0$, то $\widehat{\varphi}\restriction 0 = \Lambda = \boldsymbol{\psi}_0(x)$. Теперь индуктивный шаг: докажем лемму для некоторого $\lambda > 0$ в предположении, что она верна для всех ординалов $\xi < \lambda$.

Случай 1. $\lambda \in \Omega_1[\widehat{\varphi}] \cup \Omega_3[\widehat{\varphi}]$. По определению найдутся ординал $\xi < \lambda$ (например, $\lambda = \xi + 1$ при $\lambda \in \Omega_1[\widehat{\varphi}]$) и дерево $P \in \widehat{\mathbb{P}}_\xi$ такие, что $T = T_P(b, u)$ для некоторого $u \in U(b)$, где $b = \widehat{\varphi}(\lambda)$. Тогда $T \subseteq P$, а потому $x \in [P]$. По индуктивному предположению существует ординал $\alpha \le \xi$ такой, что значения

$Q_\alpha(x) = P$ и $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x) = \widehat{\varphi}{\restriction}\xi$ определены в соответствии с определением 13. Коль скоро $x \in [T]$ и $T = T_P(b,u)$, имеем $x \in \mathbf{R}_P^{\text{чет}}$ согласно следствию 5, причем $b = \widehat{\varphi}(\lambda) = \mathbf{b}_P^{\text{чет}}(x) \in \mathbf{R}_0^+$. Тогда по построению $Q_{\alpha+1}(x) = T$. Кроме того, раз $b = \widehat{\varphi}(\lambda)$, имеем $\boldsymbol{\chi}_b = \widehat{\varphi}{\restriction}(\lambda+1)$ по выбору $\widehat{\varphi}$ в § 4. Тем самым условие $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x) \subset \boldsymbol{\chi}_b$ выполнено, так что $\boldsymbol{\psi}_{\alpha+1}(x) = \boldsymbol{\chi}_b = \widehat{\varphi}{\restriction}(\lambda+1)$.

Случай 2. $\lambda \in \Omega_2[\widehat{\varphi}]$. Тогда $\widehat{\mathbb{P}}_\lambda \in \mathrm{L}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda]$ — антицепь в **Perf**, счетная в $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda]$, и для любого дерева $T \in \widehat{\mathbb{P}}_\lambda$ имеем $T \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup D$, каково бы ни было плотное в $\mathbb{P}_{<\lambda}$ множество $D \subseteq \mathbb{P}_{<\lambda}$, $D \in M_\lambda[\widehat{\varphi}] = \mathrm{L}_{\mu_\lambda[\widehat{\varphi}]}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda]$, где $\mu_\lambda[\widehat{\varphi}] < \omega_1$ есть наименьший ординал ν такой, что λ счетно уже в $\mathrm{L}_\nu[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda]$ и $\mathrm{L}_\nu[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda]$ удовлетворяет $\mathbf{ZFC}^-$. Однако все множества вида $\mathbb{P}_{<\lambda}^{\geq\vartheta} = \bigcup_{\vartheta\leq\xi<\lambda} \widehat{\mathbb{P}}_\xi$, $\vartheta < \lambda$, плотны в $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda}$ по построению и принадлежат модели $M_\lambda[\widehat{\varphi}]$. (Сама последовательность $\{\widehat{\mathbb{P}}_\xi\}_{\xi<\lambda}$ принадлежит $M_\lambda[\widehat{\varphi}]$ по лемме 11.)

Итак, $T \subseteq^{\mathrm{fin}} \bigcup \mathbb{P}_{<\lambda}^{\geq\vartheta}$ для каждого $\vartheta < \lambda$, т. е. поскольку $x \in [T]$, ко всякому $\vartheta < \lambda$ имеются ординал ξ, $\vartheta \leq \xi < \lambda$, и дерево $S \in \widehat{\mathbb{P}}_\xi$ такие, что $x \in [S]$. Тогда по индуктивному предположению найдется ординал $\alpha(\xi) \leq \xi$, для которого $Q_{\alpha(\xi)}(x) = S$ и $\boldsymbol{\psi}_{\alpha(\xi)}(x) = \widehat{\varphi}{\restriction}\xi$. Отсюда $\boldsymbol{\psi}_\gamma(x) = \widehat{\varphi}{\restriction}\lambda \in \Phi_\lambda$ для некоторого предельного ординала $\gamma \leq \lambda$.

Обратимся к последнему абзацу определения 13 (перед леммой 15), взяв $\psi = \boldsymbol{\psi}_\gamma(x) = \widehat{\varphi}{\restriction}\lambda$. Тогда множество $\mathbb{P}_{<\lambda}[\psi]$ совпадает с нашим $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda}$, а антицепь $\mathbb{P}_\lambda[\psi]$ — с $\widehat{\mathbb{P}}_\lambda = \mathbb{P}_\lambda[\widehat{\varphi}]$. Однако $T \in \widehat{\mathbb{P}}_\lambda$ и $x \in [T]$. Отсюда по определению следует $Q_\gamma(x) = T$, что и завершает индуктивный шаг. □

Следствие 16. *Пусть $x = x_G$ является $\widehat{\mathbb{P}}$-генерической точкой над $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}] = \mathrm{L}[W]$. Тогда элементы $Q_\alpha(x)$, $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$, $\boldsymbol{\lambda}_\alpha(x)$ определены для всех $\alpha < \omega_1^{\mathrm{L}[\varphi]}$ согласно определению 13 и $\widehat{\varphi} = \bigcup_{\alpha<\omega_1^{\mathrm{L}[\varphi]}} \boldsymbol{\psi}_\alpha(x) \in \mathrm{L}[x]$.*

Отсюда следует $\omega_1^{\mathrm{L}[\varphi]} = \omega_1^{\mathrm{L}[\varphi,x]} = \omega_1^{\mathrm{L}[x]}$.

Доказательство. Множества $\widehat{\mathbb{P}}^{\geq\vartheta} = \bigcup_{\vartheta\leq\xi<\omega_1} \widehat{\mathbb{P}}_\xi$, $\vartheta < \omega_1$, плотны в $\widehat{\mathbb{P}}$. Поэтому для каждого $\vartheta < \omega_1$ имеются ординал ξ, $\vartheta \leq \xi < \omega_1^{\mathrm{L}[\varphi]}$, и дерево $T \in \widehat{\mathbb{P}}_\xi$ такие, что $x \in [T]$. Тогда $\widehat{\varphi} = \bigcup_{\alpha<\omega_1^{\mathrm{L}[\varphi]}} \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$ по лемме 15. Поэтому $\widehat{\varphi} \in \mathrm{L}[x]$, так как конструкция функций $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x)$ абсолютна. □

§ 8. Минимальность

Сначала докажем теорему 1 без свойства минимальности.

Лемма 17. *Любая точка $x = x_G$, $\widehat{\mathbb{P}}$-генерическая над $\mathrm{L}[W] = \mathrm{L}[\widehat{\varphi}]$, удовлетворяет теореме 1, кроме, возможно, минимальности.*

Доказательство. Форсинг $\widehat{\mathbb{P}}$ сохраняет кардиналы (см. § 6). Далее, $\widehat{\varphi}$ и W принадлежат $\mathrm{L}[x]$ согласно следствию 16. Докажем, что $\widehat{\varphi}$, а тогда и W (см. определение 9) принадлежат Δ_1^{HC} в $\mathrm{L}[x]$. Заметим, что равенство $\widehat{\varphi}(\xi) = r$ равносильно любой из следующих двух формул:

$$\exists M \exists \alpha \big(\alpha < \omega_1^M \wedge \xi, r \in M \wedge M \models \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)(\xi) = r\big);$$

$$\forall M \forall \alpha \big(\alpha < \omega_1^M \wedge \xi, r \in M \Longrightarrow M \models (!\boldsymbol{\psi}_\alpha(x)(\xi) \Longrightarrow \boldsymbol{\psi}_\alpha(x)(\xi) = r)\big),$$

где M пробегает все счетные транзитивные модели $\mathbf{ZFC}^-$, α — ординалы в M, а $!\boldsymbol{\psi}_\alpha(x)(\xi)$ означает, что значение $\boldsymbol{\psi}_\alpha(x)(\xi)$ определено. Эквивалентность следует из леммы 14 и следствия 16. Первая из формул дает класс $\Sigma_1^{\mathrm{HC}}(x)$ для $\widehat{\varphi}$, а вторая — класс $\Pi_1^{\mathrm{HC}}(x)$. $\square$

Покажем теперь, как добиться минимальности $\widehat{\mathbb{P}}$-генерических точек.

Рассуждаем в универсуме $\mathrm{V} = \mathrm{L}[A] = \mathrm{L}[\widehat{\varphi}]$ теоремы 1.

Допустим, что $\mathbb{Q} \subseteq \mathbf{Perf}$ — любой форсинг, не обязательно равный $\widehat{\mathbb{P}}$ из § 5. Через $\mathbf{N}_{\mathbb{Q}}$ обозначим совокупность всех множеств $t \subseteq \mathbb{Q} \times \omega$, т. е. всех $\mathbb{Q}$-*имен* для подмножеств ω. Если $t \in \mathbf{N}_{\mathbb{Q}}$, $k \in \omega$, и $T \in \mathbb{Q}$, то определим, что T $\mathbb{Q}$-*влечет* $k \notin t$, когда T несовместно в $\mathbb{Q}$ ни с каким $S \in t''k = \{S \in \mathbb{Q} : \langle S, k\rangle \in t\}$, и что T $\mathbb{Q}$-*влечет* $k \in t$, когда каждое дерево $T' \in \mathbb{Q}$, $T' \subseteq T$, совместно в $\mathbb{Q}$ хотя бы с одним $S \in t''k$.

Положим $t[G] = \{k \in \omega : \exists T \in G(\langle T, k\rangle \in t)\}$ для каждого $\mathbb{Q}$-генерического множества $G \subseteq \mathbb{Q}$ и $t \in \mathbf{N}_{\mathbb{Q}}$. Известно, что для любого множества $Y \in \mathrm{V}[G]$, $Y \subseteq \omega$, найдется имя $t \in \mathbf{N}_{\mathbb{Q}}$ в V, для которого $Y = t[G]$.

Имя $t \in \mathbf{N}_{\mathbb{Q}}$ называется $\mathbb{Q}$-*константой на* $T \in \mathbb{Q}$, если для любого $k \in \omega$ либо T $\mathbb{Q}$-влечет $k \in t$, либо T $\mathbb{Q}$-влечет $k \notin t$ в указанном смысле. В этом случае T $\mathbb{Q}$-вынуждает, что $t[\underline{G}]$ принадлежит данному универсуму V, где $\underline{G}$ — каноническое имя для G.

Расщепляющейся системой в $\mathbb{Q}$ называется любое такое семейство $\{T_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ деревьев $T_s \in \mathbb{Q}$, которое удовлетворяет двум условиям:

(i) $T_{s^\wedge 0} \cup T_{s^\wedge 1} \subseteq T_s^n$, но $T_{s^\wedge 0} \cap T_{s^\wedge 1}^n = \varnothing$;

(ii) $\operatorname{diam} T_s \le \frac{1}{\operatorname{lh} s}$, где $\operatorname{lh} s$ — длина s, $\operatorname{diam} T = \frac{1}{m+1}$, а m — наибольшее число такое, что $a{\restriction}m = b{\restriction}m$ для всех $a, b \in [T]$;

В этом случае $S = \bigcap\limits_n \bigcup\limits_{\operatorname{lh} s = n} T_s \in \mathbf{Perf}$, но не обязательно $\in \mathbb{Q}$. Если же $S \in \mathbb{Q}$, то будем говорить, что система $\{T_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ *сходится* (к S) в $\mathbb{Q}$.

Расщепляющаяся система $\{T_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ называется t-*биективной в* $\mathbb{Q}$ (всё еще $t \in \mathbf{N}_{\mathbb{Q}}$), если существует число $n \in \omega$ такое, что для любого $s \in 2^{<\omega}$ с $\operatorname{lh} s \ge n$, найдется число $k \in \omega$, для которого либо 1) $T_{s^\wedge 0}$ $\mathbb{Q}$-влечет $k \in t$ и $T_{s^\wedge 1}$ $\mathbb{Q}$-влечет $k \notin t$, либо 2) $T_{s^\wedge 0}$ $\mathbb{Q}$-влечет $k \notin t$ и $T_{s^\wedge 1}$ $\mathbb{Q}$-влечет $k \in t$. Тогда если система $\{T_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ сходится к какому-то дереву $S \in \mathbb{Q}$, то S $\mathbb{Q}$-вынуждает $\underline{x} \in \mathrm{L}[t, \underline{G}]$, где $\underline{x}$ — каноническое имя для генерической точки x_G. Поэтому следующее свойство Д для форсинга $\widehat{\mathbb{P}}$ из § 5 достаточно для того, чтобы все $\widehat{\mathbb{P}}$-генерические точки были минимальны в смысле теоремы 1.

(Д) Если $P \in \widehat{\mathbb{P}}$ и $t \in \mathbf{N}_{\widehat{\mathbb{P}}}$, то имеется расщепляющая система $\{T_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ в $\widehat{\mathbb{P}}$ с $T_\Lambda \subseteq T$, сходящаяся в $\widehat{\mathbb{P}}$ и *спрямляющая* t в $\widehat{\mathbb{P}}$ в том смысле, что либо t есть $\widehat{\mathbb{P}}$-константа на T_Λ в $\widehat{\mathbb{P}}$, либо система t-биективна в $\widehat{\mathbb{P}}$.

Таким образом, требуется модифицировать построение в § 5 так, чтобы условие (Д) было выполнено. Следующая лемма достаточно очевидна.

Лемма 18. *Если множество* $\mathbb{Q} \subseteq \mathbf{Perf}$ CO-*замкнуто,* $P \in \mathbb{Q}$, *и для любого* $j < \omega$ *имеем* $t_j \in \mathbf{N}_{\mathbb{Q}}$, *то существует расщепляющая система* $\{T_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ *в* $\mathbb{Q}$ *с* $T_\Lambda \subseteq P$, *которая спрямляет каждое имя* t_j *в* $\mathbb{Q}$.

(Сходимость в $\mathbb{Q}$ этой системы в лемме не утверждается.)

Вернемся к шагу 4^* в § 5, где множество $\mathbb{P}_\xi[\varphi]$ определено в случае, когда $\xi \in \Omega_2[\varphi]$, как $\le^{\text{гёд}}_{\varphi\restriction\xi}$-наименьшая антицепь $E \in \mathrm{L}[\varphi{\restriction}\xi]$, $E \subseteq \mathbf{Perf}$, с определенными свойствами. Изменим это определение следующим образом.

Определение 19. Определим множество $E = \mathbb{P}_\xi[\varphi]$, как указано (шаг 4* в § 5). Напомним: $M_\xi[\varphi] = \mathrm{L}_{\mu_\xi[\varphi]}[\varphi{\restriction}\xi]$ — транзитивная модель $\mathbf{ZFC}^-$, счетная в $\mathrm{L}[\varphi{\restriction}\xi]$ по лемме 7. Применим лемму 18 в $\mathrm{L}[\varphi{\restriction}\xi]$ к $\mathbb{Q} = \mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$ и семейству имен $\tau = M_\xi[\varphi] \cap \mathbf{N}_{\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]}$. Получим для каждого $P \in E$ расщепляющую систему $\sigma_P = \left\{T_s^P\right\}_{s\in 2^{<\omega}}$ в $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$ с $T_\Lambda^P \subseteq P$, которая спрямляет все имена $t \in \tau$ в $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$. Выберем это множество систем $\{\sigma_P\}_{P\in E}$ как $\leq_{\varphi\restriction\xi}^{\text{гёд}}$-наименьшее среди всех множеств этого вида в $\mathrm{L}[\varphi{\restriction}\xi]$. Пусть $P' = \bigcap\limits_{n\in\omega} \bigcup\limits_{\mathrm{lh}\, s=m} T_s^P$ для каждого $P \in E$ и теперь $\mathbb{P}_\xi[\varphi] = E' = \{P' : P \in E\}$. $\square$

Формулируем ключевое свойство модифицированного определения.

Лемма 20. *Если $\varphi \in \Phi_{\omega_1}$, $\xi \in \Omega_2[\varphi]$, $t \in M_\xi[\varphi] \cap \mathbf{N}_{\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]}$ и $P \in \mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$, то в $\mathrm{L}[\varphi{\restriction}\xi]$ существует расщепляющая система $\{T_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ в $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$ с $T_\Lambda \subseteq P$, сходящаяся в $\mathbb{P}_\xi[\varphi]$ и спрямляющая t в $\mathbb{P}_{<\xi}[\varphi]$.*

Лемма 21. *Модифицированный форсинг $\widehat{\mathbb{P}} = \mathbb{P}[\widehat{\varphi}]$ удовлетворяет* (Д)*, так что все $\widehat{\mathbb{P}}$-генерические точки минимальны в смысле теоремы* 1.

Доказательство. Индукцией по λ докажем, что если $\lambda \in \Omega_3[\widehat{\varphi}] \cup \{\omega_1\}$, то форсинг $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda} = \mathbb{P}_{<\lambda}[\widehat{\varphi}]$ удовлетворяет (Д) в $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda]$.

Пусть $\lambda \in \Omega_3[\widehat{\varphi}] \cup \{\omega_1\}$; $\lambda = \omega_1^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]}$ по лемме 8. Рассуждая в $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda]$, допустим, что $P \in \widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda}$, $t \in \mathbf{N}_{\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda}}$ и $\vartheta = \omega_3^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]}$. Берем счетную элементарную подмодель $N \subseteq \mathrm{L}_\vartheta[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda]$, содержащую $\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda$, P, $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda}$ и t, и рассмотрим коллапс по Мостовскому $h : N \xrightarrow{\text{на}} N'$ на транзитивное $N' = \mathrm{L}_{\vartheta'}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda']$, где $\lambda' < \vartheta' < \lambda = \omega_1^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda]}$. Легко видеть, что $h(\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda) = \widehat{\varphi}{\restriction}\lambda'$, $h(P) = P \in \widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda'}$, и $t' = h(t) = t \cap (\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda'} \times \omega) \in N' \cap \mathbf{N}_{\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda'}}$. Наконец, $\lambda' = \omega_1^{N'}$.

Случай 1. $\lambda' \in \Omega_3[\widehat{\varphi}]$. Тогда $\lambda' = \omega_1^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda']}$ по лемме 8. По индуктивной гипотезе форсинг $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda'}$ удовлетворяет (Д) в $\mathrm{L}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda']$, так что имеется расщепляющая система $\{T_s\}_{s\in 2^{<\omega}} \in \mathrm{L}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda']$ в $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda'}$ с $T_\Lambda \subseteq T$, сходящаяся в $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda'}$ и спрямляющая t' в $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda'}$. Однако h^{-1} — элементарное вложение, поэтому та же система спрямляет t в $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda}$, т. е. $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda}$ удовлетворяет (Д).

Случай 2. $\lambda' \in \Omega_2[\widehat{\varphi}]$. Тогда $\lambda' < \omega_1^{\mathrm{L}[\widehat{\varphi}\restriction\lambda']}$ и, более того, λ' счетно в модели $M_{\lambda'}[\widehat{\varphi}] = \mathrm{L}_{\mu_{\lambda'}[\widehat{\varphi}]}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda']$. С другой стороны, $\lambda' = \omega_1^{N'}$, где $N' = \mathrm{L}_{\vartheta'}[\widehat{\varphi}{\restriction}\lambda']$. Отсюда следует, что $\vartheta' < \mu_{\lambda'}[\widehat{\varphi}]$, $N' \in M_{\lambda'}[\widehat{\varphi}]$ и $t' \in M_{\lambda'}[\widehat{\varphi}]$. Согласно лемме 20 в $\mathrm{L}[\varphi{\restriction}\lambda']$ имеется расщепляющая система $\{T_s\}_{s\in 2^{<\omega}}$ в $\mathbb{P}_{<\lambda'}[\widehat{\varphi}]$ с $T_\Lambda \subseteq P$, которая сходится к некоторому $T \in \mathbb{P}_{\lambda'}[\widehat{\varphi}]$ и спрямляет t в $\mathbb{P}_{<\lambda'}[\widehat{\varphi}]$. Тогда, раз h^{-1} — элементарное вложение, эта же расщепляющая система спрямляет t в $\widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda}$ и, очевидно, $T \in \widehat{\mathbb{P}}_{<\lambda}$. $\square$

Легко видеть, что модифицированное определение 19 не нарушает результат о сохранении кардиналов в § 6. Более того, соответствующая модификация процедуры раскодировки (определение 7) сохраняет леммы 15 и 17. Этим завершается доказательство теоремы 1.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Справочная книга по математической логике.* II. Теория множеств / Под ред. К. Дж. Баруайза М.: Наука, 1982.

2. *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* О некоторых классических проблемах дескриптивной теории множеств // Успехи мат. наук. 2003. Т. 58, № 5. С. 3–88.

3. *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Современная теория множеств: начала дескриптивной динамики. М.: Наука, 2007.

4. *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* Современная теория множеств: борелевские и проективные множества. М.: МЦНМО, 2010.

5. *Jensen R. B., Solovay R. M.* Some applications of almost disjoint sets // Mathematical logic and foundations of set theory. Amsterdam: North-Holland, 1970. P. 84–104.

6. *Harrington L.* Long projective wellorderings // Ann. Math. Logic. 1977. V. 12. P. 1–24.

7. *Кановей В. Г.* Добавление. Проективная иерархия Лузина: современное состояние теории // Справочная книга по математической логике. II. Теория множеств. М.: Наука, 1982. С. 273–364.

8. *Beller A., Jensen R., Welch P.* Coding the universe. New York: Cambridge Univ. Press, 1982. (London Math. Soc. Lect. Note Ser.; V. 47).

9. *Friedman S. D.* Fine structure and class forcing. Berlin; New York: De Gruyter, 2000. (de Gruyter Ser. Log. Appl.; V. 3).

10. *Jensen R. B.* Definable sets of minimal degree // Mathematical logic and foundations of set theory. Amsterdam: North-Holland, 1970. P. 122–128.

11. *Кановей В. Г., Любецкий В. А.* О множестве конструктивных вещественных чисел // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова. 2004. Т. 247. С. 95–128.

Статья поступила 14 августа 2009 г.

Кановей Владимир Григорьевич, Любецкий Василий Александрович
Институт проблем передачи информации,
Большой Каретный переулок, 19, Москва 101447
`kanovei@mccme.ru, lyubetsk@ippi.ru`