Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2011. Том 52, № 5

УДК 517.54, 517.548.2

ОДНОРОДНЫЕ ОБЛАСТИ, БЛИЗКИЕ К ШАРУ

Д. А. Троценко

Аннотация. Любая пара точек однородной области U соединяется «сигарой» — образом криволинейного конуса при мёбиусовом преобразовании. Получен ряд геометрических свойств таких областей при условии, что углы в вершинах «сигар» близки к π. Доказано, что если $\overline{\mathbb{R}^n}\backslash\overline{U} = U^* \neq \varnothing$, то U^* тоже однородна. Если ∂U не ограничена, то является почти плоской, т. е. для любого шара $B(x,r)$ его пересечение с ∂U лежит в δr-окрестности некоторой гиперплоскости. Этими свойствами обладают образы шаров при квазиконформных отображениях, близких к конформным.

Ключевые слова: однородная область, равномерная область, квазикруг, область Джона, квазиконформное отображение, устойчивость.

1. Введение

1.1. В плоском случае односвязная однородная область U такая, что $\overline{\mathbb{R}}^2\backslash\overline{U} \neq \varnothing$, есть квазикруг, т. е. образ круга при квазиконформном отображении плоскости. В пространстве класс однородных областей шире, чем класс квазишаров, но обладает многими свойствами последних. Для определения областей, близких к шару, в работе используются мёбиусово-инвариантные определения однородных областей. Любая пара точек области U соединяется «сигарой» — образом криволинейного конуса при мёбиусовом преобразовании. В работе получен ряд геометрических свойств таких областей при условии, что углы в вершинах «сигар» близки к π. Установлено, что при больших углах без дополнительных ограничений свойство однородности области для пар граничных точек эквивалентно этому свойству для всех пар точек области и для точек дополнения. Первоначальное определение Мартио и Сарваса (см. [1]) однородных областей не позволяет описать области, близкие к шару.

1.2. Как обычно, $\overline{\mathbb{R}^n}$ означает n-мерное евклидово пространство, пополненное одной точкой ∞, M_n — группа мёбиусовых преобразований $\overline{\mathbb{R}^n}$, т. е. композиций конечного числа отображений подобия и инверсий относительно сфер, естественным образом доопределенных в бесконечной точке. Далее всюду считаем $n \geq 2$. Через $[x,y]$ обозначаем отрезок не только в $\mathbb{R}$, но и в $\mathbb{R}^n$.

Под сферой* S^*, окружностью* и шаром* B^* будем понимать образы сферы, окружности и шара при мёбиусовых преобразованиях. Это значит, что шар* B^* может быть обычным шаром, полупространством или дополнением к шару в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Далее символом $\operatorname{dist}(A,B)$ будем обозначать несимметричное отношение $\operatorname{dist}(A,B) = \sup\limits_{a\in A}(\inf\limits_{b\in B}|a-b|)$. Через него легко выражается хаусдорфово расстояние $\varrho(A,B)$, равное $\max\{\operatorname{dist}(A,B), \operatorname{dist}(B,A)\}$.

1.3. Определение. Область $U \subset \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $J(d, D)$, $0 < d \le D < \infty$, если найдется точка $a \in U$ такая, что для любой точки $x \in U$ можно указать спрямляемую кривую $\alpha(s)$, $0 \le s \le l$ (параметр s — длина дуги $\alpha([0, s])$), такую, что $\alpha(0) = x$, $\alpha(l) = a$, при этом $l \le D$ и $\varrho(\alpha(s), \partial U) \ge sd/l$ для любого $s \in [0, l]$.

Классы $J(d, D)$ впервые определены Джоном в [2].

1.4. Определение. Область $U \subset \mathbb{R}^n$ *принадлежит классу* $U(\alpha, \beta)$, $0 < \alpha \le \beta < \infty$, или *является* (α, β)*-однородной*, если для любых $x_1, x_2 \in U$, $x_1 \ne x_2$, можно указать область $G \in J(\alpha|x_1 - x_2|, \beta|x_1 - x_2|)$ такую, что $G \subset U$, $x_1, x_2 \in G$.

Классы однородных областей впервые введены Мартио и Сарвасом в [1]. Там же доказана инъективность отображений с ограниченным искажением (следовательно, квазиконформность), заданных в однородной области, при условии близости к единице коэффициента искажения. Автором при тех же предположениях в [3] доказана продолжимость отображений с ограниченным искажением на все пространство $\mathbb{R}^n$. Иногда однородные области называют *равномерными* (см. [4]).

1.5. Двойное отношение. Пусть $x_1, x_2, x_3, x_4 \in \overline{\mathbb{R}^n}$. Двойное отношение $|x_1 - x_2| \times |x_3 - x_4| / |x_1 - x_3| \times |x_2 - x_4| \in [0, \infty]$ обозначим через (x_1, x_2, x_3, x_4). Доопределим его по непрерывности в случаях $x_1 = x_3$, $x_2 = x_4$ и равенства бесконечности одного или двух аргументов. Отношение не определено в случаях совпадения трех аргументов. Переставляя аргументы, получим 6 различных двойных отношений. Как замечено в [5, п. 4.5], как минимум 5 из них в литературе названы *двойным отношением*.

Здесь мы дадим простое доказательство хорошо известного факта инвариантности двойного отношения (x_1, x_2, x_3, x_4) при мёбиусовых преобразованиях пространства. Очевидно, оно инвариантно при преобразованиях подобия. Через φ обозначим инверсию относительно единичной сферы $S(0, 1)$. Положим $e_i = x_i/|x_i|$, $i = 1, 2, 3, 4$. Тогда $\varphi(x_i) = x_i/|x_i|^2 = e_i/|x_i|$ и

$$
\begin{aligned}
&(\varphi(x_1), \varphi(x_2), \varphi(x_3), \varphi(x_4)) \\
&= |e_1/|x_1| - e_2/|x_2|| \times |e_3/|x_3| - e_4/|x_4|| / |e_1/|x_1| - e_3/|x_3|| \times |e_2/|x_2| - e_4/|x_4|| \\
&\quad = |e_1|x_2| - e_2|x_1|| \times |e_3|x_4| - e_4|x_3|| / |e_1|x_3| - e_3|x_1|| \times |e_2|x_4| - e_4|x_2|| \\
&\qquad = (x_1, x_2, x_3, x_4),
\end{aligned}
$$

так как $|e_i|x_j| - e_j|x_i|| = |x_j - x_i|$. $\square$

1.6. Определение. Следуя [6], область $U \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ назовем *областью класса* $\mathbf{U}(\delta)$, $0 < \delta \le 1$, если каждая пара точек $x_1, x_2 \in U$ может быть соединена в U континуумом X таким, что

$$(x_1, x_2, x, y) \ge \delta, \quad (x_2, x_1, x, y) \ge \delta$$

для каждых $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$, $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus U$.

Заметим, что пользоваться этим определением не очень удобно. При фиксированных x_1, x_2, x точки y лежат в объединении некоторых двух шаров*.

1.7. Теорема [6, теорема 5.4]. *Если $U \in \mathbf{U}(\delta)$, то $U \in U(\alpha, \beta)$ для некоторых α, β, $0 < \alpha \le \beta < \infty$. Обратно, если $U \in U(\alpha, \beta)$, то $U \in \mathbf{U}(\delta)$ и $\delta \in]0, 1]$ зависит только от α и β.*

Доказательство теоремы громоздко и многоступенчато, явную зависимость между α, β и δ можно получить, но у нас она использоваться не будет. Важно, что в [6] не доказана устойчивость оценок при стремлении областей к шару, т. е. то, что $\delta \to 1$ при $\alpha/\beta \to 1$, и наоборот. Легко доказать, что шар и полупространство суть области класса $U(1/2, \sqrt{2}/2)$, причем константы $1/2$ и $\sqrt{2}/2$ нельзя увеличить. На плоскости класс $U(1/2, \sqrt{2}/2)$ содержит кроме шаров, например, квадраты, а в пространстве — выпуклую оболочку множества, состоящего из шара $B(x_0, r)$ и точки x_1 такой, что $|x_0 - x_1| \leq \sqrt{2}r$. Значит, определение 1.6 не подходит для описания областей, близких к шару. Так как в двумерном случае однородные области являются квазикругами, актуальна задача исследования образов кругов при квазиконформных отображениях плоскости, близких к конформным. В евклидовом пространстве размерности $n \geq 3$, как показано в [7], однородная область не обязана быть квазишаром, т. е. образом шара при квазиконформном отображении пространства, но квазишар будет однородной областью.

1.8. Следствие. *Если $U \in U(\alpha, \beta)$ для некоторых α, β, $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, то $\varphi(U) \in U(\alpha', \beta')$, где α' и β' зависят только от α, β и n.*

1.9. Определение 1.6 значительно проще, чем 1.4. В [8, 9] сформулировано еще более простое определение.

Область $U \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ назовем *δ-однородной* или *областью класса* $\widetilde{U}(\delta)$, если любые $x_1, x_2 \in U$ можно соединить в U таким континуумом X, что $(x_1, x_2, x, y) \geq \delta$ для всех $x \in X \setminus \{x_1, x_2\}$, $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus U$.

1.10. Замечания. 1. Если $0 < \delta < \delta'$, то $\widetilde{U}(\delta) \subset \widetilde{U}(\delta')$.

2. При фиксированных x_1, x_2, x_3 равенство $(x_1, x_2, x_3, y) = \delta$ задает некоторую сферу* S. Если $x_2 = \infty$, то $S = S(x_3, \delta|x_1 - x_3|)$. Круговой конус с вершиной x_1, касающийся S, имеет угол α со своей осью вращения, где $\sin\alpha = \delta$.

Если $x_1, x_2 \neq \infty$, то множество дуг окружностей*, касающихся S и имеющих концы x_1 и x_2, образует «веретено» — образ кругового конуса при некотором мёбиусовом преобразовании. Так как мёбиусово преобразование конформно, круговые конусы, касательные к «веретену» в его вершинах, имеют углы α со своими осями вращения.

3. Для всех $0 < \delta < \delta'$ континуум X в определении $\mathbf{U}(\delta)$ можно считать непрерывной кривой.

Доказательство. Считаем $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$. Возьмем последовательность $(u_i) \subset X$, $i \in Z$, со следующими свойствами: $u_i \to 0$ при $i \to +\infty$; $u_i \to \infty$ при $i \to -\infty$; $|u_i - u_{i+1}| \leq (\delta_0 - \delta)|u_i|$ при $i \in Z$. Такая последовательность существует ввиду связности X. Соединим u_i последовательно отрезками. Выбрав подходящую параметризацию, получаем кривую $x(t)$ при $t \in]0, 1[$. Полагаем $x(0) = 0$, $x(1) = \infty$. Из замечания 2 следует, что $x(t)$ обладает требуемыми свойствами. $\square$

Допуская некоторую вольность, считаем, что континуум X в определениях 1.6. и 1.9 есть непрерывная кривая с концами x_1 и x_2.

4. Пусть $x_2 = \infty$. В определении 1.9 полагаем

$$x = x(t), \quad B_t = \{y : (x_1, \infty, x(t), y) \geq \delta\}.$$

Тогда множество $\bigcup B_t$ образует криволинейный конус с вершиной x_1, уходящий в ∞. Аналогичные конусы рассматривались в [10].

1.11. Пусть $x_1, x_2 \notin B^*$. Определим (x_1, x_2, B^*), полагая

$$(x_1, x_2, B^*) = \sup_{x \in B^*} \inf_{y \notin B^*} (x_1, x_2, x, y).$$

Видно, что если $x_2 = \infty, B^* = B(x_0, r)$, то $(x_1, \infty, B^*) = r/|x_1 - x_0|$.

Так как сфера $S = S(x_1, \sqrt{|x_1 - x_0|^2 - r^2})$ ортогональна сфере $S(x_0, r)$, при инверсии относительно S шар $B(x_0, r)$ отображается на себя. Отсюда и из инвариантности двойного отношения следует равенство

$$(x_1, x_2, B^*) = (x_2, x_1, B^*).$$

Таким образом, (x_1, x_2, B^*) есть синус половинного угла при вершине «сигары», больше похожей на банан, образованной дугами окружностей, проходящих через x_1 и x_2 и касающихся B^*. Мёбиусово отображение, переводящее любую из вершин x_1, x_2 «сигары» в ∞, отображает «сигару» на круговой конус, имеющий угол α при вершине, где $\sin \alpha = (x_1, x_2, B^*)$. В дальнейшем мы не раз воспользуемся этим наглядным свойством. Нас обычно будет интересовать случай, когда угол α близок к $\pi/2$.

1.12. Определение. Естественно определяется непрерывное семейство обычных шаров $B_t = B(x(t), r(t))$. Нам понадобится мёбиусово-инвариантное определение непрерывности семейства шаров*. Используем (обычную) сферическую метрику в $\overline{\mathbb{R}^n}$. Семейство B_t^* считаем *непрерывным*, если центры $x(t)$ и радиусы $r(t)$ шаров в некоторой сферической метрике непрерывно зависят от t. Свойство непрерывности сохраняется при мёбиусовых преобразованиях пространства. Будем полагать, что $B_t \to x$ при $t \to t_0$, если $x(t) \to x$ и $r(t) \to 0$ при $t \to t_0$.

1.13. Определение. Вышеизложенное позволяет переформулировать определение 1.9 областей класса $\widetilde{U}(\delta)$. Будем говорить, что область $U \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ *принадлежит классу* $\widetilde{U}(\delta)$, если любые точки $x_1, x_2 \in U$ можно соединить в U непрерывным семейством шаров* $B_t^* \subset U$, $t \in]0, 1[$, таких, что $(x_1, x_2, B_t^*) \geq \delta$ и $B_t \to x_1$ при $t \to 0$, $B_t \to x_2$ при $t \to 1$.

1.14. Лемма. *$U(\delta) \subset \widetilde{U}(\delta) \subset U(\tau)$, где $\tau = 1 - \sqrt{(1-\delta)/(1+\delta)}$.*

Доказательство. Первое включение очевидно, докажем второе. Пусть $U \in \widetilde{U}(\delta)$, $x_1, x_2 \in U$. Можем считать, что $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$, $x(t) = 1 = (1, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$.

Через φ обозначим инверсию относительно сферы $S(0, \sqrt{1 - \delta^2})$. Положим $y = (\sqrt{1-\delta^2}, 0, \dots, 0) \in \mathbb{R}^n$. Тогда $\varphi(y) = y$, $\varphi(B(1, \delta)) = B(1, \delta)$. Так как $B_0 = B(y, \sqrt{1-\delta^2} + \delta - 1)$ содержится в $B(1, \delta)$ по построению, то $\varphi(B_0) \subset B(1, \delta)$.

Мы доказали, что неравенства

$$(0, \infty, y, z) \geq (\sqrt{1-\delta^2} - 1 + \delta)/\sqrt{1-\delta^2} = \tau, \quad (0, \infty, z, y) \geq \tau,$$

выполнены для всех $z \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus B(1, \delta)$. Тем самым они справедливы для $z \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus U$.

В качестве континуума, соединяющего 0 и ∞ по определению 1.6 области класса $U(\delta)$, можно взять кривую $y(t) = x(t)\sqrt{1-\delta^2}$, $y(0) = 0, y(1) = \infty$. $\square$

1.15. Замечание. Видно, что $\tau \to 1$ при $\delta \to 1$, т. е. оба определения годятся для описания областей, близких к шару.

2. Классы областей, близких к шару

2.1. Теорема. *Классы $U(1)$ и $\widetilde{U}(1)$ состоят только из шаров* и дополнений к замкнутым подмножествам $(n-2)$-мерных сфер*.*

Доказательство. Из определения 1.13 классов $\widetilde{U}(\delta)$ следует, что если $0,\infty \in U \in \widetilde{U}(1)$, то найдется непрерывное семейство шаров* $B(x(t),|x(t)|) \subset U$. При инверсии относительно $S(0,1)$ получаем семейство открытых полупространств, расположенных на произвольном расстоянии от 0. Выбрав последовательность полупространств, приближающихся к 0, со сходящимися единичными векторами нормалей, доказываем, что найдется полупространство $P \subset U$, касающееся 0. Так как $0,\infty \in \overline{U}$, доказано, что для любых $x_1, x_2 \in U$ найдется $B^* \subset U$ такой, что $x_1, x_2 \in \overline{B}^*$.

Устремляя x_1, x_2 к ∂U, аналогично доказываем, что для любых $x_1, x_2 \in \overline{U}$ найдется $B^* \subset U$ такой, что $x_1, x_2 \in \overline{B}^*$.

Утверждение теоремы верно, если $\partial U = \varnothing$, т. е. $\overline{U} = \overline{\mathbb{R}^n}$. Пусть $\infty \in \partial U$. Тогда шар* в U может быть только шаром или полупространством. Доказанное выше свойство означает, что $\overline{U}$ выпукло и содержит полупространство. Как замечено в [11] (свойство 2.4), отсюда следует, что $\overline{U}$ есть замкнутое полупространство или все пространство $\overline{\mathbb{R}^n}$. Если $\overline{U}$ — полупространство, то ∂U не может содержать его внутренних точек, так как содержит полупространства на сколь угодно малом расстоянии от любой граничной точки. Значит, U — открытое полупространство.

Рассмотрим случай $\overline{U} = \overline{\mathbb{R}^n}$. Напомним, что мы рассматриваем случай $\infty \in \partial U$. В этом случае теорема утверждает, что ∂U содержится в $(n-2)$-мерном аффинном подпространстве. Предположим, что нашлись точки $a_1, \dots, a_n \in \partial U$ — вершины $(n-1)$-мерного невырожденного симплекса, лежащего в гиперплоскости P. Для приведения к противоречию докажем следующую лемму.

2.2. Лемма. *Пусть A — невырожденный симплекс в $\mathbb{R}^{n-1}$ с вершинами $a_1, \dots, a_n$, $d = \operatorname{diam} A$. Возьмем точку $x_0 \in \operatorname{int} A$, $\varrho(x_0, \partial A) = \varrho > 0$. Тогда для любого шара $B(x,r)$ если $x_0 \in B(x,r)$ и $r \geq 2d^2/\varrho$, то найдется a_i — вершина A, принадлежащая $B(x,r)$.*

Доказательство. Пусть D — полупространство, $\varrho(x_0, D) \leq \varrho/2$. Если все a_i принадлежат $\mathbb{R}^n \setminus D$, то $A \subset \mathbb{R}^n \setminus D$. Пусть $B = B(x,r)$ и $|x - x_0| < d^2/\varrho$. Тогда $|x - a_i| < d^2/\varrho + d < r$. Значит, $A \subset B$. Если же $|x - x_0| \geq d^2/\varrho$, то возьмем полупространство D такое, что гиперплоскость ∂D перпендикулярна вектору $\overline{x_0 x_1}$ и $\varrho(x_0, D) = \varrho/2$. Выберем $a_i \in D$. Так как $|a_i - x|^2 \leq d^2 + (r - \varrho/2)^2 < r^2$, то $a_i \in B(x,r)$. $\square$

Используем лемму для завершения доказательства теоремы 2.1. В гиперплоскости P возьмем точку внутри симплекса A. Положим $\varrho = \varrho(x_0, \partial_P A) > 0$, $d = \operatorname{diam} A$. На перпендикуляре к P в точке x_0 возьмем точки x_1 и x_2, симметричные относительно P и такие, что $\varrho(x_i, P) = 2d^2/\varrho$. Тогда по лемме 2.2 любой шар или полупространство, включающие $x_1, x_2 \in B$, будут включать хотя бы одну точку a_i. Так как a_i — граничные точки, $x_1, x_2 \in \overline{U}$, $B \subset U$, требуемое противоречие получено. $\square$

2.3. Определения классов областей с «почти плоской» границей. Пусть $0 < \varepsilon \leq 1$ и область $U \subset \overline{\mathbb{R}^n}$ такова, что $U^* = C\overline{U} \neq \varnothing$ и $\infty \in \partial U$. Будем говорить, что

(2.3.1) область U *принадлежит классу* $V_0(\varepsilon)$, если $U \in \widetilde{U}(1-\varepsilon)$;

(2.3.2) область U *принадлежит классу* $V_1(\varepsilon)$, если для любых $x_1, x_2 \in \partial U$ найдется непрерывное семейство шаров $B_t \subset U$ при $t \in]0,1[$ такое, что $(x_1, x_2, B_t) \geq 1 - \varepsilon$ и $B_t \underset{t\to 0}{\longrightarrow} x_1$, $B_t \underset{t\to 1}{\longrightarrow} x_2$;

(2.3.3) область U *принадлежит классу* $V_2(\varepsilon)$, если для любого $x \in \partial U \setminus \{\infty\}$ для каждого $r > 0$ найдутся шары $B(y, r(1-\varepsilon)) \subset U$ и $B(z, r(1-\varepsilon)) \subset U$ такие, что $|x - y| = |x - z| = r$;

(2.3.4) область U *принадлежит классу* $V_3(\varepsilon)$, если для каждого $x \in \partial U \setminus \{\infty\}$ для любого $r > 0$ найдется гиперплоскость $p = p(x, r)$ такая, что $x \in p$ и $\operatorname{dist}(\partial U \cap B(x, r), p) \leq \varepsilon r$.

Будем говорить, что область *удовлетворяет условию* $V_i(\varepsilon)$, если она принадлежит классу $V_i(\varepsilon)$.

2.4. Замечания. Условие $V_3(\varepsilon)$ означает, что граница области ∂U является «почти плоской» с точностью до ε. В двумерном случае этот класс совпадает с классом «почти прямых», названных в [12, 13] фрактальными прямыми.

Принципиальное различие между условиями в том, что условие V_0 внутреннее одностороннее (выполняется для внутренних точек области), V_1 граничное одностороннее, а условия V_2 и V_3 граничные двусторонние.

2.5. Теорема (об асимптотической эквивалентности определений). *Классы V_0, V_1, V_2, V_3 областей эквивалентны при достаточно малых ε, т. е. для каждой пары классов V_i и V_j найдутся $\varepsilon_{ij} > 0$ и функция $g_{ij}(\varepsilon)$ такие, что $g_{ij}(\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} 0$ и $V_i(\varepsilon) \subset V_j(g_{ij}(\varepsilon))$, если $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_{ij}$. При доказательстве получены следующие ε_{ij} и $g_{ij}(\varepsilon)$:*

$$g_{01}(\varepsilon) = \varepsilon \text{ при } \varepsilon < 1, \quad g_{12}(\varepsilon) = \sqrt{8\varepsilon} \text{ при } \varepsilon < 0,1,$$
$$g_{23}(\varepsilon) = 43\varepsilon \text{ при } \varepsilon < 10^{-4}, \quad g_{32}(\varepsilon) = 2\varepsilon \text{ при } \varepsilon < 1,$$
$$g_{21}(\varepsilon) = 230\sqrt{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon < 10^{-5}, \quad g_{20}(\varepsilon) = 690\sqrt{\varepsilon} \text{ при } \varepsilon < 2 \cdot 10^{-6}.$$

Оставшаяся часть раздела посвящена доказательству этой теоремы и некоторых других свойств однородных областей.

2.6. Лемма. $V_0(\varepsilon) \subset V_1(\varepsilon)$.

Доказательство. Пусть $x_1 \in U$, $x_2 \in \partial U$. Сделав подходящее мёбиусово преобразование, будем считать, что $x_1 = 0$, $x_2 = \infty$. Возьмем последовательность $z_m \in U$ такую, что $|z_m| = r_m \to \infty$ монотонно, соединим x_1 с z_m континуумом Z_m по определению 1.6. Пусть $\lambda_m = \sqrt{r_m}$. Через Y_m обозначим компоненту связности множества $Z_m \cap \overline{B}(0, \lambda_m)$, соединяющую 0 и $S(0, \lambda_m)$. Положим $X_m = \overline{\bigcup_{k \geq m} Y_k}$. Тогда X_m соединяет 0 с ∞. Для $x \in Y_m$, $y \in \overline{\mathbb{R}^n} \setminus U$ имеем оценку $(0, z_m, x, y) \geq 1 - \varepsilon$. Так как $|z_m - y| \geq |z_m| - |x| - |x - y|$ и $|x| \leq \lambda_m$, то

$$\frac{|x-y|}{|x|(r_m - |x| - |x-y|)} \geq \frac{(1-\varepsilon)}{r_m}, \quad \frac{|x|(r_m - |x|)}{|x-y|} \leq |x| + \frac{r_m}{(1-\varepsilon)},$$
$$\frac{|x|(r_m - \lambda_m)}{|x-y|} \leq \frac{(r_m + \lambda_m(1-\varepsilon))}{(1-\varepsilon)}, \quad \frac{|x-y|}{|x|} \geq \frac{(1-\varepsilon)(r_m - \lambda_m)}{(r_m + \lambda_m(1-\varepsilon))} = (1-\varepsilon)\mu_m.$$

Значит, $B(x, (1-\varepsilon)\mu_m) \subset U$ и $(0, \infty, B) \geq (1-\varepsilon)\mu_m$. Так как μ_m стремится к 1, монотонно возрастая, это же неравенство справедливо для всех $x \in X_m$. Пусть $X_0 = \bigcap X_m$, X — компонента X_0, соединяющая 0 с ∞. По построению при всех $x \in X$ для $B = B(x, (1-\varepsilon)|x|)$ справедливо нужное неравенство $(0, \infty, B) \geq 1 - \varepsilon$. Повторяем рассуждение в случае $x_1 \in \partial U$, пользуясь построенным континуумом. Замечание 1.10.3 завершает доказательство леммы. $\square$

2.7. Лемма. *Пусть* $U \in \widetilde{U}(\delta)$, $\delta > \sin(3\pi/8)$ $(\delta \geq 0{,}93)$ *и* $U^* \neq \varnothing$. *Тогда* ∂U *связна и* $\partial U = \partial U^*$.

Предположим, что ∂U несвязна, тогда $\overline{\mathbb{R}^n}\backslash U = U^* \cup \partial U$ несвязно. Пусть V — компонента связности $U^* \cup \partial U$ с непустой внутренностью и $y \in \partial U$ из другой компоненты. Применив мёбиусово преобразование, будем считать, что $y = \infty$. Тогда V ограничено. В V впишем шар $B(x_0, r)$ максимального радиуса. Из условия максимальности найдутся $x_1, x_2 \in S(x_0, r) \cap \partial V$ такие, что $|x_1 - x_2| \geq r\sqrt{2}$. В семействе шаров* B_t, соединяющих x_1 и x_2 по определению 1.13, выберем шар* B, граница которого пересекает перпендикулярно гиперплоскость $P = \{x : |x - x_1| = |x - x_2|\}$. Так как $\infty \in \partial U$, то B — шар или полупространство. Полный угол «сигары», соединяющей x_1 и x_2 и касающейся B, не превосходит $3\pi/4$. Отсюда следует, что $\delta \leq \sin 3\pi/8$ (см. замечание 1.10.2). Связность доказана. Доказательство равенства $\partial U = \partial U^*$ повторяет вышеизложенное, только в предположении противного выбираем $y \in \partial U^*\backslash\partial U$. $\square$

2.8. Лемма. *Пусть* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ *и* B_t *— непрерывное семейство шаров* таких, что* $B_t \to x_1$ *при* $t \to 0$, $B_t \to x_2$ *при* $t \to 1$ *и* $(x_1, x_2, B_t) \geq \delta$ *при* $0 < t < 1$. *Тогда в этом семействе найдется шар* B *радиуса* $r \geq |x_1 - x_2|(1 - \sqrt{1-\delta^2})/2\delta$.

Доказательство. Если среди B_t нашелся неограниченный шар*, то радиусы B_t принимают все значения из интервала $]0, \infty[$. Если же все B_t ограничены, $B_t = B(x(t), r(t))$, то возьмем $x_0 = x(t_0)$ такое, что $|x_0 - x_1| = |x_0 - x_2|$. Рассмотрим плоскость, проходящую через x_0, x_1, x_2. Проведя простые вычисления в плоском случае, получим нужную оценку для $r(t_0)$. Равенство может достигаться, если $x_0 = (x_1 + x_2)/2$. $\square$

2.9. Лемма. *Если* $U \in V_1(\varepsilon)$, $\varepsilon \leq 0{,}01$, *то по любому отображению* $\varphi \in M_n$ *такому, что* $\varphi(U)$ *ограничено, найдется шар* $B(x_0, r) \subset \varphi(U)$ *такой, что* $B(x_0, r(1 + 3{,}3\sqrt{\varepsilon})) \supset \varphi(U)$.

Доказательство. Пусть $U' = \varphi(U)$ — ограниченная область, $B(x_0, r) \subset U'$ — шар максимального радиуса. Возьмем $x_1 \in \partial U'$ произвольно и $x_2 \in \partial U'$ — на прямой, соединяющей x_1 и x_0 так, что $x_0 \in [x_1, x_2]$. По лемме 2.8 найдется шар $B(y, \varrho) \subset U'$ такой, что $\varrho \geq |x_1 - x_2|(1 - \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}/2(1 - \varepsilon)$. Так как $\varrho \leq r$ и $|x_1 - x_2| \geq |x_1 - x_0| + r$, то

$$r(2 - 2\varepsilon - 1 + \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2})/(1 - \sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}) \geq |x_1 - x_2|,$$
$$|x_1 - x_0| \leq (1 + \sqrt{2\varepsilon})/(1 - \sqrt{2\varepsilon}) \leq 1 + 3{,}3\sqrt{\varepsilon}$$

при $\varepsilon \leq 10^{-2}$, $|x_1 - x_0| \leq 1 + 2{,}9\sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \leq 10^{-4}$. $\square$

2.10. Лемма. *Пусть* $B(0, 1) \subset U \subset B(0, \lambda)$, *где* $\lambda = 1 + 3\sqrt{\varepsilon}$, $\varepsilon \leq 10^{-4}$. *Тогда если* $x_1, x_2 \in \partial U$, $x_3 = (x_1 + x_2)/2$, $\mu = 1 - 2\sqrt{\varepsilon}$ *и* $B(x_3, \mu\varrho) \subset U$, *то возможна альтернатива: или* (a) $\varrho \geq 1 - \sqrt{\varepsilon}/2$, *или* (b) $\varrho \leq 0{,}06$.

Доказательство. Проведем плоскость через $0, x_1, x_2$. Так как $|x_1| \geq 1$, $|x_2| \geq 1$, $|x_3| \geq \sqrt{1 - \varrho^2}$, $|x_3| + \mu\varrho \leq \lambda$ и $\varrho \leq \lambda$, то $\sqrt{1 - \varrho^2} + \mu\varrho \leq \lambda$, $\sqrt{1 - \varrho^2} + \varrho \leq \lambda + (1 - \mu)\varrho \leq 1 + 5{,}1\sqrt{\varepsilon} = \sigma$. Совокупность решений последнего неравенства $\sqrt{1 - \varrho^2} + \varrho \leq \sigma$ — промежутки $\varrho \geq (\sigma + \sqrt{2 - \sigma^2})/2$ и $\varrho \leq (\sigma - \sqrt{2 - \sigma^2})/2$. Множество несвязно при $\sigma < \sqrt{2}$. При $\varepsilon \leq 10^{-4}$ получаем требуемые оценки. $\square$

Заметим, что в случае (a) имеем

$$|x_3| \leq \lambda - \mu\varrho \leq 1 + 3\sqrt{\varepsilon} - (1 - 2\sqrt{\varepsilon})(1 - \varepsilon/2) \leq 5{,}5\sqrt{\varepsilon},$$

$B(x_3, (1 + 8{,}5\sqrt{\varepsilon})) \supset B(0, \lambda)$, значит, $B(x_3, \varrho(1 + 9{,}2\sqrt{\varepsilon})) \supset B(0, \lambda) \supset U$. В случае (b) шар $B(x_3, 33\varrho)$ не содержит U.

2.11. Лемма. *Пусть $U \in V_1(\varepsilon)$, $\varepsilon \le 10^{-4}$. Тогда для любых $x_1, x_2 \in \partial U$, $x_1 \ne x_2$, для каждого шара B из семейства B_t, соединяющего x_1 и x_2 по $V_1(\varepsilon)$-условию, справедливо следующее: если $\varphi \in M_n$, $\varphi(x_1) = -1$, $\varphi(x_2) = 1$, $\varphi(B) = B(0,\lambda)$, $\lambda = (1-\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2})/(1-\varepsilon) > 1-2\sqrt{\varepsilon}$, то $\varphi(U) \subset B(0,\nu)$, где $\nu = 1+9,2\sqrt{\varepsilon}$, т. е. реализуется случай* (а) *из леммы* 2.10.

Доказательство. Пусть $U' = \varphi(U)$ ограничена и $B(x_0, r) \subset U' \subset B(x_0, r(1+3\sqrt{\varepsilon}))$. Возьмем $x_1, x_2 \in \partial U'$ такие, что $|x_1 - x_2| = 2\varrho \ge 2r(1-\sqrt{\varepsilon})$, $x_3 = (x_1+x_2)/2$, и шар $B_0 = B(y_0, \mu)$ из семейства B_t такой, что $|y_0 - x_1| = |y_0 - x_2|$. Пусть $|y_0 - x_3| = b\varrho$. Так как по лемме 2.8 $\mu \ge \varrho(1-2\sqrt{\varepsilon}) \ge r(1-3\sqrt{\varepsilon})$, то

$$|x_0 - y_0| \le r(1+3\sqrt{\varepsilon}) - r(1-\sqrt{\varepsilon})(1-2\sqrt{\varepsilon}) \le r \cdot 6\sqrt{\varepsilon},$$

$$|x_3 - x_0|^2 \le r^2[(1+3\sqrt{\varepsilon})^2 - (1-3\sqrt{\varepsilon})^2] \le r^2 \cdot 12\sqrt{\varepsilon},$$

$$|x_3 - x_0| \le 3,5\sqrt[4]{\varepsilon}, \quad |x_3 - y_0| \le r \cdot 4,1\sqrt[4]{\varepsilon} \le \varrho \cdot 4,2\sqrt[4]{\varepsilon}.$$

Значит, $b \le 4,2\sqrt[4]{\varepsilon}$.

Пусть $\varphi \in M_n$, $\varphi(x_1) = -1$, $\varphi(x_2) = 1$, $\varphi(B_0) = B(0,\alpha)$, где $\alpha \ge 1-2\sqrt{\varepsilon}$. По построению

$$U \subset B(x_0, r(1+3\sqrt{\varepsilon})) \subset B(x_3, r(1+4,5\sqrt[4]{\varepsilon})) \subset B(x_3, \varrho(1+4,7\sqrt[4]{\varepsilon})) = B_1.$$

Плоскость P, проходящая через $x_1, x_2, \varphi^{-1}(0)$, после преобразования φ переходит в некоторую плоскость Q. Рассмотрим сужение φ на P, считая плоскости P и Q наделенными комплексными координатами так, что $x_1 = -r$, $x_2 = r$, $x_3 = 0$, $\varphi^{-1}(0) = ari$ для некоторого $a > 0$; $\varphi(x_1) = -1$, $\varphi(x_2) = 1$. Для упрощения вычислений считаем $r = 1$. Тогда $\varphi(z) = (-z+ai)/(aiz-1)$, $\varphi^{-1}(z) = (z+ai)/(aiz+1)$. Так как

$$bi = [\varphi^{-1}(\alpha i) + \varphi^{-1}(-\alpha i)]/2 = ai(1+\alpha^2)/(1-a^2\alpha^2),$$

то $a < b \le 4,2\sqrt[4]{\varepsilon}$. Далее, $\varphi(\lambda i) = (\lambda + a)i/(1-a\lambda)$. Значит, $\varphi(B(0,\lambda)) \subset B(0, (\lambda+a)/(1-a\lambda))$. В нашем случае $\lambda \le 1,47$; $a \le 0,42$; $\varphi(U) \subset \varphi(B_1) \subset B(0; 1,89/(1-1,47 \cdot 0,42)) \subset B(0,5)$. Тем самым реализуется случай (а) из леммы 2.10.

Рассмотрим характеристику $\theta(x_1, x_2, B_t)$ для $x_1, x_2 \in \partial U$ и B_t из семейства шаров, соединяющих x_1 и x_2, полагая $\theta(x_1, x_2, B_t) = \sup |y|$ по всем $y \in \varphi(\partial U)$, где $\varphi \in M_n$ такое, что $\varphi(x_1) = -1$, $\varphi(x_2) = 1$, $\varphi(B_t) = B(0,\alpha)$. Из непрерывности B_t следует, что $\theta(x_1, x_2, B_t)$ непрерывно по t. Для рассмотренных выше x_1 и x_2 отсюда вытекает, что $\theta(x_1, x_2, B_t) \le 1+9,2\sqrt{\varepsilon}$.

Пусть для некоторых x_1, x_2 и всех B_t из семейства, соединяющего x_1 и x_2, выполнено неравенство $\theta(x_1, x_2, B_t) \le 1+9,2\sqrt{\varepsilon}$. Тогда, повторяя рассуждения, получим то же неравенство для y_1, y_2, достаточно близких к x_1 и x_2 соответственно (для этого мы выше брали $\varrho \ge r(1-\sqrt{\varepsilon})$, а не $\varrho \ge r(1-\sqrt{\varepsilon}/2)$, как следовало из случая (а) леммы 2.10 для $\varphi(x_1)$, $\varphi(x_2)$ и $\varphi(B_0)$). Так как по лемме 2.7 граница ∂U связна, то $\theta(x_1, x_2, B_t) \le 1+9,2\sqrt{\varepsilon}$ для всех $x_1, x_2 \in \partial U$, откуда следует утверждение леммы. □

2.12. Теорема. *Если $U \in V_1(\varepsilon)$, $\varepsilon \le 10^{-4}$, то $U^* \in V_1(42,4\varepsilon)$.*

Доказательство. Считаем в лемме 2.11 $x_2 = \infty$. Рассмотрим семейство отображений $\varphi_t \in M_n$ таких, что $\varphi_t(x_1) = -1$, $\varphi_t(\infty) = 1$, $\varphi_t(B_t) = B(0,\lambda)$, где $\lambda = (\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon^2})/(1-\varepsilon)$. Так как из леммы 2.11 следует, что $\varphi_t(U) \subset B(0; 1+9,2\sqrt{\varepsilon})$, то $\varphi_t(U^*) \supset \overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{B}(0; 1+9,2\sqrt{\varepsilon})$, значит, $U^* \supset \varphi_t^{-1}(\overline{\mathbb{R}^n} \setminus \overline{B}(0; 1+9,2\sqrt{\varepsilon})) = \widetilde{B}_t^*$.

Рассмотрим отображение $\psi : \overline{C} \to \overline{C}$, $\psi(z) = (z+1)/(z-1)$. Имеем $\psi(-1) = 0$, $\psi(1) = \infty$ и стандартными вычислениями при $\lambda < 1$ получаем

$$\psi(B(0,\lambda)) = B\left(\frac{1+\lambda^2}{1-\lambda^2}, \frac{2\lambda}{1-\lambda^2}\right) = B_0.$$

Аналогично при $\mu > 1$

$$\psi(\overline{C}\backslash B(0,\mu)) = B\left(\frac{1+\mu^2}{1-\mu^2}, \frac{2\mu}{\mu^2-1}\right) = B_1.$$

В нашем случае $(0,\infty,B_0) = 2\lambda/(1+\lambda^2) = 1-\varepsilon$, $\mu = 1+9,2\sqrt{\varepsilon}$, $(0,\infty,B_1) = 2\mu/(1+\mu^2) \geq 1 - 9,2^2\varepsilon/2 \geq 1 - 42,4\varepsilon$.

В общем случае пусть $B_t = B(x(t), r(t))$. Плоскость, проходящая через x_1 перпендикулярно $S_t = \partial B_t$, перейдет в сферу*, проходящую через ± 1 перпендикулярно $S(0,\lambda)$, т. е. в плоскость. Введя в этих плоскостях комплексные координаты, видим, что φ^{-1} совпадает с ψ с точностью до подобия: $\varphi^{-1} = T_t\psi$, где T_t — подобие, переводящее 0 в x_1 и B_0 в B_t. При этом шар B_1 перейдет в $\widetilde{B}_t^* = B(z(t), \varrho(t))$, где по построению $z(t) - x_0 = k(x_0 - x(t))$, $k = (1+\mu^2)(1-\lambda^2)/(\mu^2-1)(1+\lambda^2)$, $\varrho(t) \geq (1-42,4\varepsilon)|z(t)-x_0|$. Значит, кривая $z(t)$, соединяющая x_1 с ∞ в U^* по определению V_1-области, получена из кривой $x(t)$ в U при помощи отражения относительно x_0 и растяжения в k раз. $\square$

2.13. Лемма. $V_3(\varepsilon) \subset V_2(2\varepsilon/(1+\varepsilon))$.

Доказательство. Фиксируем $x \in \partial U\backslash\{\infty\}$, $r > 0$. Считаем $x = 0$, $P(x,r) = \{(x_1,\dots,x_n) : x_1 = 0\}$. Положим $y_1 = r(1+\varepsilon)/2$, $z_1 = -y_1$, $\varrho = r(1-\varepsilon)/2$, $y = (y_1, 0, \dots, 0)$, $z = (z_1, 0, \dots, 0)$. Тогда $B(y,\varrho)$ и $B(z,\varrho)$ не пересекаются с ∂U и по построению один из этих шаров лежит в U, другой —в U^*, $1 - \varrho/y_1 = 2\varepsilon/(1+\varepsilon)$. $\square$

2.14. Лемма. $V_2(\varepsilon) \subset V_3(\sqrt{8\varepsilon})$ *при* $\varepsilon < 0,1$.

Доказательство. Пусть $x \in \partial U\backslash\{\infty\}$. Считаем $x_0 = 0$. Для произвольного $r > 0$ возьмем $B_1 = B(y, r(1-\varepsilon)) \subset U$, $B_2 = B(z, r(1-\varepsilon)) \subset U^*$, $|y| = |z| = r$. Положим $\varrho = r\sqrt{1-(1-\varepsilon)^2} = r\sqrt{2\varepsilon-\varepsilon)^2}$. Тогда $S(0,\varrho)$ перпендикулярна ∂B_1 и ∂B_2. Пусть P — гиперплоскость $\{x : |x-y| = |x-z|\}$, проходящая через 0 перпендикулярно $[y,z]$. Так как $\partial U \cap B(0,\varrho) \subset B(0,\varrho)\backslash(B_1 \cup B_2)$, то $\operatorname{dist}(\partial U \cap B(0,\varrho), P) \leq \max|x - \pi_P(x)|$ по всем $x \in B(0,\varrho)\backslash(B_1\cup B_2)$. Проведя плоскость через $0, y, z$, сведем задачу к двумерной, тем самым заключаем, что $|x - \pi_P(x)| \leq 2\varrho(1-\varepsilon)\sqrt{2\varepsilon - \varepsilon^2}$ при $\varepsilon \leq 1 - 1/\sqrt{2}$, откуда вытекают оценки леммы. Из произвольности r следует произвольность ϱ. $\square$

2.15. Лемма. *Пусть* $U \in V_2(\varepsilon)$. *Тогда* $U \in V_1(230\sqrt{\varepsilon})$ *при* $\varepsilon \leq 10^{-5}$, $U \in V_0(690\sqrt{\varepsilon})$ *при* $\varepsilon \leq 2\cdot 10^{-6}$.

Доказательство этой леммы наиболее громоздко.

2.15.1. Считаем, что $x = 0 \in \partial U$. Пусть $|y| = |z| = r$, $B(y, r(1-\varepsilon)) \subset U$, $B(z, r(1-\varepsilon)) \subset U^*$. Положим $\beta = \angle y0z$, тогда по теореме косинусов получаем неравенства

$$\cos\beta \leq 1 - 2(1-\varepsilon)^2 \leq -1 + 4\varepsilon, \quad \sin\beta \leq \sqrt{8\varepsilon}.$$

Возьмем точку $y_1 \in U$ такую, что $|y_1| = 2r$ и $B(y_1, 2r(1-\varepsilon)) \subset U$. Если $\varphi = \angle y_1 0 z$, то $\cos\varphi \leq [5 - 9(1-\varepsilon)^2]/4 \leq -1 + 4,5\varepsilon$; $\sin\varphi \leq \sqrt{9\varepsilon}$. Для $\gamma = \angle y_1 0 y$

имеем оценку $\gamma \le 2\pi - \beta - \varphi$, а так как $\cos\varphi < 0$, $\cos\beta < 0$, то $\sin\gamma \le \sin\beta + \sin\varphi \le 5,83\sqrt{\varepsilon}$, $\sin^2\gamma \le 34\varepsilon$. Теперь оценим $|y - y_1|$, учитывая, что γ — острый угол:

$$|y-y_1|^2 = |y_1 - z|^2 + |y-z|^2 - 2|y_1 - z|\cdot|y-z|\cos\gamma \le r^2[4(1-\varepsilon)^2 + 9$$
$$-12(1-\varepsilon)\sqrt{1-34\varepsilon}] \le r^2(4 - 8\varepsilon + 4\varepsilon^2 + 9 - 12 + 217\varepsilon - 205\varepsilon^2) \le r^2(1+209\varepsilon),$$

максимум достигается при $|y - z| = 2(1-\varepsilon)$, $|y_1 - z| = 3$. Здесь мы воспользовались оценкой $\sqrt{1-\delta} \ge 1 - \delta(1 - \sqrt{1-\delta_0})/\delta_0$ при $0 \le \delta \le \delta_0$, где $\delta_0 = 0,0034$; $\sqrt{1-\delta} \le 1 - \delta/2$ при $0 \le \delta \le 1$. Следовательно, $|y - y_1| \le r(1 + 104,5\varepsilon)$.

Пусть $\alpha = \angle 0yy_0$. Тогда

$$\cos\alpha = \frac{(|y|^2 + |y-y_1|^2 - |y_1|^2)}{2|y|\cdot|y-y_1|} \le \frac{-2+209\varepsilon}{2(1+104,5\varepsilon)} \le -1 + 209\varepsilon.$$

2.15.2. Для $x \in \partial U \backslash \{\infty\}$ строим ломаную $x(t), 0 \le t \le \infty$, соединяя последовательно центры y_i шаров $B(y_i, 2^i r(1-\varepsilon)) \subset U$ таких, что $|y_i - x| = 2^i r$, $i \in \mathbb{Z}$. Полагаем $x(0) = x$, $x(\infty) = \infty$, $t = |x(t)|$. Так как $x(t)$ — спрямляемая кривая, и углы $\alpha_i = \angle xy_iy_{i+1}$ удовлетворяют неравенству $\cos\alpha_i \le -1 + 209\varepsilon$, длина $s(t)$ отрезка кривой $[x, x(t)]$ не превосходит $t\sup(1/\cos(\pi - \alpha_i)) \le t/(1 - 209\varepsilon) \le t(1 + 210\varepsilon)$. Здесь воспользовались неравенством $1/(1-\delta) \le 1 + \delta/(1-\delta_0)$ при $0 \le \delta \le \delta_0 < 1$. Положим $\sigma = 1 - 106,5\varepsilon$. Пусть $x(t) \in [y_i, y_{i+1}]$ для некоторого $i \in \mathbb{Z}$. Тогда

$$|x(t) - y_i + 1| + \sigma t \le |y_i - y_{i+1}| + \sigma r \cdot 2^i$$
$$\le r \cdot 2^i(1 + 104,5\varepsilon) + r\cdot 2^i(1 - 106,5\varepsilon) \le r \cdot 2^{i+1}(1-\varepsilon) = |y_{i+1} - x|(1-\varepsilon).$$

Значит, $B(x(t), \sigma t) \subset B(y_{i+1}, (1-\varepsilon)|y_{i+1} - x|) \subset U$.

Для произвольного $x_1 \in \partial U \setminus \{\infty\}$ и $x_2 = \infty$ построено непрерывное семейство шаров B_t, требуемое в условии $V_1(\tau)$, где $\tau = 106,5\varepsilon$.

2.15.3. Пусть теперь $u \in U$. Возьмем точку $x \in \partial U$, ближайшую к u, и положим $|u - x| = r$. Найдем $y_1 \in U$ такую, что $|y_1 - x| = 2r$ и $B(y_1, 2r(1-\varepsilon)) \subset U$. Аналогично предыдущему оценим: $|y_1 - u| \le r(1 + 104,5\varepsilon)$. Строим ломаную $x(t)$, соединяя u с y_1 и далее y_i с y_{i+1}, где y_i — точки, построенные выше для x.

2.15.4. Пусть $B = B(x, r)$, $\lambda < 1$. Если $|x_1 - x_2| = r/\lambda$, то $(x_1, \infty, B) = \lambda$. Если I — инверсия относительно сферы $S(x_1, r\sqrt{1-\lambda^2})$, то $I(B) = B$, $I(x_1) = \infty$, $I(\infty) = x_1$.

Рассмотрим случай $x_1 = 0$, $x = 1 = (1, 0, \dots, 0)$, $r = \lambda$. Тогда $I(y) = y(1-\lambda^2)/|y|^2$. Пусть $\eta > 1$. На оси $l = \{x = (x_1, 0, \dots, 0)\}$ имеем $I(1-\eta) = (1-\lambda^2)/(\eta - 1)$, $I(1+\eta) = (1-\lambda^2)/(\eta+1)$. Так как сферы*, перпендикулярные l, переходят в такие же сферы*, то $I(B(1,\eta)) \subset B(0, (1-\lambda^2)/(\eta-1))$. Отсюда следует, что если $x_2 \in B(0, (1-\lambda^2)/(\eta-1))$, то $(0, x_2, B(1,\lambda)) \ge \lambda/\eta$. В общем случае если $|x_1 - x_2| = r$, $|x - x_2| \ge r(1-\lambda^2)/(\eta - 1)$, то $(x_1, x_2, B(x, \lambda r)) \ge \lambda/\eta$.

2.15.5. Пусть $x_1, x_2 \in \partial U \backslash \{\infty\}$. Построим кривую $x(t)$, соединяющую x_1 и x_2 по определению $V_1(\varepsilon)$-области. Положим $\varrho = |x_1 - x_2|$, $r = \varrho/\sqrt{\varepsilon}$. Кривые $x_1(t)$ и $x_2(t)$ строим, как в п. 2.15.2 при данном r, но только $x_1(t)$ для $0 \le t \le r$, $x_2(t)$ для $0 \le t \le r/2$. Для простоты считаем $r = 1$. Положим $y_1 = x_1(1)$, $y_2 = x_2(1/2)$. Возьмем точку $z \in U^*$ такую, что $|z - x_1| = 1$, $B(z, 1-\varepsilon) \subset U^*$. Оценим сверху $|y_1 - x_2|$ и $|y_1 - y_2|$. Из условий на ∂U используем следующие: $2(1-\varepsilon) \le |y_1 - z| \le 2$, $|x_2 - z| \ge 1 - \varepsilon$, $|y_2 - z| \ge 1,5(1-\varepsilon)$. Введем углы $\varphi = \angle x_1zy_1$, $\psi = \angle x_2zx_1$, $\omega = \angle y_2zx_2$. Расстояния $|y_1 - x_2|$ и $|y_1 - y_2|$ максимальны, когда φ, ψ, ω лежат в одной плоскости. Расстояние $|y_1 - x_2|$ максимально, если $|y_1 - z| = 2(1-\varepsilon)$ и $|z - x_2| = 1 - \varepsilon$. Тогда $\cos\varphi = 1 - \varepsilon$, $\sin\varphi \le \sqrt{2\varepsilon}$, $\sin\psi \le \sqrt{\varepsilon}$. Пусть u — проекция x_2 на $[y_1, z]$. Тогда $|x_2 - u| \le \sqrt{\varepsilon} + \sqrt{2\varepsilon}$ и $\sin(\varphi+\psi) \le (\sqrt{2}+1)\varepsilon/(1-\varepsilon) \le 2,42\varepsilon$. Имеем оценку

$$|z - u| = (1-\varepsilon)\cos(\varphi+\psi) \ge (1-\varepsilon)\sqrt{1 - 2,42^2\varepsilon} \ge 1 - 3,95\varepsilon,$$

значит, $|y_1 - u| \le 2 - 2\varepsilon - 1 + 3,95\varepsilon \le 1 + 1,95\varepsilon$ и $|y_1 - x_2| \le \sqrt{(1+1,95\varepsilon)^2 + 5,83\varepsilon} \le 1 + 4,87\varepsilon$. Аналогично $|z - x_2| \le 1 + 4,87\varepsilon$. Угол ω максимален, когда максимально $|z - x_2| = 1 + 4,87\varepsilon$. Расстояние $|y_1 - y_2|$ максимально, когда максимальны φ, ψ, ω. Получаем оценки

$$\cos\omega \ge \frac{2,25(1-\varepsilon)^2 + (1+4,87\varepsilon)^2 - 0,25(1-\varepsilon)^2}{2\cdot 1,5\cdot(1-\varepsilon)(1+4,87\varepsilon)} \ge \frac{3+5,74\varepsilon}{3+11,61\varepsilon} \ge 1 - 1,96\varepsilon,$$

$$\sin\omega \le 1,98\sqrt{\varepsilon}, \quad \sin(\varphi+\psi+\omega) \le \sin\varphi + \sin\psi + \sin\omega \le 4,3\sqrt{\varepsilon}.$$

По теореме косинусов

$$\begin{aligned}|y_1 - y_2|^2 &\le 4(1-\varepsilon)^2 + 2,25(1-\varepsilon)^2 - 2\cdot 2\cdot 1,5(1-\varepsilon)^2\cdot\sqrt{1-4,3^2\varepsilon}\\ &\le (1-\varepsilon)^2(6,25 - 6(1-9,3\varepsilon)) = 0,25(1-\varepsilon)^2(1+223,2\varepsilon),\end{aligned}$$

$|y_1 - y_2| \le 0,5(1+110,6\varepsilon)$. Положим $y(t) = y_2 + t(y_1 - y_2)$ при $0 \le t \le 1$,

$$r(t) = 0,5(1+110,6\varepsilon)t + 0,5(1-112,6\varepsilon).$$

Тогда $|y(t) - y_1| = (1-t)|y_2 - y_1| \le 0,5(1-t)(1+110,6\varepsilon)$ и $|y(t) - y_1| + r(t) = 1 + \varepsilon$. Следовательно, $B_t = B(y(t), r(t)) \subset B(y_1, 1-\varepsilon) \subset U$. По построению

$$(x_2, \infty, B_t) = \frac{r(t)}{|x_2 - y(t)|} \ge \frac{r(0)}{|x_2 - y_2|} \ge 1 - 112,6\varepsilon.$$

2.15.6. Искомую кривую $x(t)$ получаем, полагая $x(t)$ равным $x_2(t)$ при $0 \le t \le 0,5$, $y(4t-2)$ при $0,5 \le t \le 0,75$, $x_1(4-4t)$ при $0,75 \le t \le 1$.

Воспользуемся результатом п. 2.15.4 для $\lambda = 1 - 112,6\varepsilon$. При $0 \le t \le 0,75$ имеем $|x(t) - x_2| \le 1 + 4,87\varepsilon$; $|x_1 - x_2| = \sqrt{\varepsilon}$ и $\eta - 1 \le (1+4,87\varepsilon)(225,2\varepsilon - 112,6^2\varepsilon^2)/\sqrt{\varepsilon} \le 226,4\sqrt{\varepsilon}$. Положим $\eta = 1 + 226,4\sqrt{\varepsilon}$. Тогда $(x_1, x_2, B_t) \ge (1 - 112,6\varepsilon)/(1 + 226,4\sqrt{\varepsilon})$. Для $0,75 \le t \le 1$ аналогично получаем лучшую оценку. В итоге $(x_1, x_2, B_t) \ge 1 - 230\sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon \le 10^{-5}$. Значит, $U \in V_1(230\sqrt{\varepsilon})$, и из симметрии условия $V_2(\varepsilon)$ следует, что $U^* \in V_1(230\sqrt{\varepsilon})$.

2.15.7. Пусть теперь $u_1 \in U$, $u_2 \in \overline{U}\backslash\{\infty\}$. Положим $|u_1 - u_2| = \varrho$. Возьмем точки $x_1, x_2 \in \partial U$, ближайшие к u_1 и u_2 соответственно. Если $|x_1 - u_1| \ge \varrho$, то $u_2 \in B(u_1, \varrho)$ и в шаре $B(u_1, \varrho)$ найдется непрерывное семейство шаров B_t такое, что $(u_1, u_2, B_t) \ge 1 - \varepsilon$. Остается рассмотреть случай $|x_i - u_i| < \varrho$, $i = 1, 2$. Тогда $|x_1 - x_2| = \varrho_0 < 3\varrho$. Положим $r = \varrho_0/\sqrt{\varepsilon}$. Кривые $u_1(t)$ и $u_2(t)$ строим, как в п. 2.15.3, но $u_1(t)$ при $0 \le t \le r$, $u_2(t)$ при $0 \le t \le r/2$. Далее повторяем конструкцию п. 2.15.6: соединяем отрезком $u_1(r)$ и и $u_2(r/2)$ и берем те же шары B_t. Получаем $(u_1, u_2, B_t) \ge 1 - 690\sqrt{\varepsilon} > 0$ при $\varepsilon \le 2\cdot 10^{-6}$. $\square$

3. Условия толщины множества

3.1. Определение. Для конечной последовательности точек $a_0, \dots, a_k$ в $\mathbb{R}^n$ через $\triangle = \triangle(a_0, \dots, a_k)$ обозначим выпуклую оболочку множества $\{a_0, \dots, a_k\}$. Если эти точки аффинно независимы, то $\triangle$ есть k-симплекс. Его k-мерный объем обозначим через $m_k(\triangle)$. Пусть $A \neq \varnothing$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. Следуя [14], в качестве коэффициента k-толщины множества A возьмем число

$$\omega_k(A) = \sup\{m_k(\triangle(a_0, \dots, a_k)) : a_0, \dots, a_k \in A\}.$$

Будем говорить, что множество A является (q,k)-*толстым*, если $\omega_k(A(x,r)) \geq qr^k$ для каждых $x \in A$, $r \leq \operatorname{diam} A$. Следуя [15, 16], для каждого единичного вектора $e \in S^{n-1}$ определим проекцию $\pi_e : \mathbb{R}^n \to R$, полагая $\pi_e(x) = (x, e)$. Пусть $A \neq \varnothing$ — ограниченное множество в $\mathbb{R}^n$. *Толщиной* A будем называть число

$$\theta(A) = \inf\{\operatorname{diam} \pi_e(A) : e \in S^{n-1}\}.$$

Будем говорить, что A является q-*толстым*, если $\theta(A(x,r)) \geq qr^n$ для любых $x \in A$, $r \leq \operatorname{diam} A$.

3.2. Определение. Здесь определим другое условие толщины множества, эквивалентное первому, но более удобное для дальнейших вычислений. Пусть $x \in A$, $A(x,r) = A \cap \overline{B}(x,r)$, $A \nsubseteq B(x,r)$. Определим

$$\chi_k(A(x,r)) = \sup\{k! \cdot m_k(\triangle(x, a_1, \dots, a_k))/r^k : a_1, \dots, a_k \in A(x,r)\}.$$

Другими словами, $k! \cdot m_k(\triangle(x, a_1, \dots, a_k)) = \sqrt{G(p_1, \dots, p_k)}$, где $p_i = a_i - x$, G — определитель Грама семейства векторов. Справедливы естественные неравенства:

$$\chi_k(A(x,r)) \leq \chi_{k-1}(A(x,r)).$$

Теперь можно определить следующие классы верхних множеств. Пусть $1 \leq k \leq n$, $0 < \delta \leq 1$. Тогда *k-м верхним множеством* $A^k(\delta)$ назовем

$$A^k(\delta) = \{(x,r) : x \in A,\ \chi_k(A(x,r)) \geq \delta\}.$$

Нам понадобятся также множества

$$CA^k(\delta) = A \times R^+ \setminus A^k(\delta) = \{(x,r) : x \in A,\ \chi_k(A(x,r)) < \delta\}.$$

Пополнить семейство верхних множеств можно, включив в шкалу классы «минимальных» верхних множеств (см. [17]). Они удовлетворяют «максимальному условию на шарах»:

$$A^{\min}(\delta) = \{(x,r) : x \in A,\ \overline{B}(x, \delta r) \subset A\}.$$

3.3. Замечания. 1. Имеют место включения $A^{\min}(\delta) \subset A^n(\delta) \subset \dots \subset A^1(\delta)$.

2. Если $\delta_1 \geq \delta_2$, то $A^i(\delta_1) \subset A^i(\delta_2)$.

3. $\widetilde{A} = A^1(1)$.

Ряд свойств квазикругов, квазишаров и однородных областей, связанных с рассмотренными в работе, можно найти в [18, 19].

4. Ломаная гиперболическая метрика

4.1. В этом разделе определим ломаную гиперболическую метрику ϱ в пространстве $A \times \mathbb{R}_+$ и докажем некоторые ее свойства. Повторим без доказательства некоторые утверждения работы [20].

4.2. Определения. Обычная гиперболическая метрика ϱ_h в полупространстве $\mathbb{R}^{n+1}_+ = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ определяется элементом длины

$$d\varrho_h(x,r) = \frac{(|dx|^2 + dr^2)^{1/2}}{r},$$

где $x \in \mathbb{R}^n$, $r \in \mathbb{R}_+$, $n \ge 1$. Метрику ϱ зададим элементом длины

$$d\varrho(x,r) = \frac{|dx| + |dr|}{r}.$$

Для $z, z' \in \mathbb{R}^{n+1}_+$ имеем

$$\varrho(z,z') = \inf_\gamma \int_\gamma \frac{|dx| + |dr|}{r}$$

по всем спрямляемым кривым γ, соединяющим z и z' в $\mathbb{R}^{n+1}_+$. Так как $d\varrho_h \le d\varrho \le \sqrt{2} d\varrho_h$, то

$$\varrho_h(z,z') \le \varrho(z,z') \le \sqrt{2}\varrho_h(z,z')$$

для всех $z, z' \in \mathbb{R}^{n+1}_+$. Метрику ϱ назовем *ломаной гиперболической метрикой* пространства $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

В общем случае если A — произвольное метрическое пространство, $z = (x,r)$, $z' = (x',r')$ — точки в $A \times \mathbb{R}_+$, то выберем точки $y, y' \in \mathbb{R}^n$ с $|y-y'| = |x-x'|$. Тогда число

$$\varrho(z,z') = \varrho((y,r),(y',r'))$$

не зависит от выбора y и y'. Так определяется ломаная гиперболическая метрика ϱ на $A \times \mathbb{R}_+$. Так как каждую тройку точек из A можно изометрично вложить в $\mathbb{R}^2$, видим, что ϱ на самом деле есть метрика на $A \times \mathbb{R}_+$.

Метрику ϱ на $A \times \mathbb{R}_+$ можно определить по-другому. Пусть

$$\pi : A \times \mathbb{R}_+ \to A, \quad \pi_2 : A \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$$

— проекции. *Шагом* назовем пару точек в $A \times \mathbb{R}_+$. Шаг (z,z') назовем *вертикальным*, если $\pi(z) = \pi(z')$, и *горизонтальным*, если $\pi_2(z) = \pi_2(z')$. Гиперболическая длина вертикального шага (z,z') равна

$$l_h(z,z') = \left| \ln \frac{\pi_2(z)}{\pi_2(z')} \right|,$$

а горизонтального —

$$l_h(z,z') = \frac{|\pi(z) - \pi(z')|}{\pi_2(z)}.$$

Шаговый путь в $A \times \mathbb{R}_+$ — конечная последовательность $\bar{z} = (z_0, \dots, z_N)$ точек в $A \times \mathbb{R}_+$ такая, что каждый шаг (z_{j-1}, z_j) либо горизонтальный, либо вертикальный для всех $1 \le j \le N$. Гиперболическая длина пути $\bar{z}$ — это сумма

$$l_h(\bar{z}) = \sum_{j=0}^{N} l_h(z_{j-1}, z_j).$$

Если $A = \mathbb{R}^n$, то $l_h(\bar{z})$ — обычная гиперболическая длина пути, состоящего из горизонтальных и вертикальных сегментов $[z_{j-1}, z_j]$, $1 \le j \le N$. *Ломаное гиперболическое расстояние* между точками $z, z' \in A \times \mathbb{R}_+$ определяется как

$$\varrho(z, z') = \inf_{\bar{z}} l_h(\bar{z})$$

по всем шаговым путям $\bar{z}$ от z до z'. Легко доказывается эквивалентность определений ϱ. В дальнейшем будем пользоваться вторым определением, первое дано для иллюстрации связи между ϱ и ϱ_h в $\mathbb{R}^{n+1}_+$.

4.3. Геодезические. Пусть $z = (x, r)$ и $z' = (x', r')$ — точки в $A \times \mathbb{R}_+$. Найдем геодезические, соединяющие z и z', т. е. шаговые пути $\bar{z} = (z_0, \dots, z_N)$ такие, что $z_0 = z$, $z_N = z'$ и $l_h(\bar{z}) = \varrho(z, z')$.

Пусть $r \le r'$ и $\bar{z}$ — шаговый путь из z в z'. Тогда $t = \max\{\pi_2(z_j) : 0 \le j \le N\}$ — максимальная высота $\bar{z}$. Сумма гиперболических длин всех вертикальных шагов $\bar{z}$ не меньше, чем $\ln(t/r) + \ln(t/r')$. Соответствующая сумма для горизонтальных шагов не менее $|x - x'|/t$. Значит, $l_h(\bar{z}) \ge l_h(\bar{y})$, где $\bar{y}$ — шаговый путь (z, y_1, y_2, z') с $y_1 = (x, t)$, $y_2 = (x', t)$. Имеем

$$l_h(\bar{y}) = \frac{|x - x'|}{t} + 2 \ln t - \ln(rr').$$

Элементарные вычисления показывают, что правая часть достигает минимума при $t = |x - x'|/2$. Получаем следующий результат.

4.4. Теорема. *Пусть $z = (x, r)$ и $z' = (x', r')$ — точки в $A \times \mathbb{R}_+$, $r \le r'$ и $|x - x'| = s$. Если $r' \le s/2$, то геодезическая в метрике ϱ, соединяющая z и z', есть шаговый путь $(z, (x, s/2), (x', s/2), z')$ и*

$$\varrho(z, z') = 2 + \ln \frac{s^2}{4rr'}.$$

Если $r' \ge s/2$, то геодезическая есть шаговый путь $(z, (x, r'), z')$ и

$$\varrho(z, z') = \frac{s}{r'} + \ln \frac{r'}{r}.$$

В частности, если $r = r' \ge s/2$ или $x = x'$, то геодезическая состоит из одного шага (z, z').

4.5. Замечание. В случае $A = \mathbb{R}^n$ геодезическая между z и z' может рассматриваться как обычная кривая $\gamma \subset \mathbb{R}^{n+1}_+$. Она состоит из одного, двух или трех отрезков прямых и лежит на границе квадрата Q такого, что Q и пара его сторон перпендикулярны $\mathbb{R}^n$, причем центр Q лежит в $\mathbb{R}^n$.

4.6. Обозначения. Для $x \in A$ луч $\{x\} \times \mathbb{R}_+ = \pi^{-1}\{x\} \subset A \times \mathbb{R}_+$ обозначим через $L(x)$.

4.7. Лемма. *Пусть $z = (x, r) \in A \times \mathbb{R}_+$ и $x_0 \in A$. Если $|x - x_0| \ge r$, то*

$$\varrho(z, L(x_0)) = \varrho(z, (x_0, |x - x_0|)) = 1 + \ln(|x - x_0|/r).$$

Если $|x - x_0| \le r$, то

$$\varrho(z, L(x_0)) = \varrho(z, (x_0, r)) = |x - x_0|/r.$$

Доказательство леммы можно получить из теоремы 4.4 после элементарных вычислений. Можно предложить альтернативное доказательство. Не теряя общности, считаем, что $A = \mathbb{R}$ и $x_0 = 0$. Возьмем точку $z' \in L(x_0)$, ближайшую к z. Тогда z' должна лежать на геодезической, соединяющей z и $(-x, r)$, и утверждение следует из теоремы 4.4. $\square$

4.8. Замечание. Если $A \subset \mathbb{R}^n$, то лемма 4.7 означает, что точка z' луча $L(x_0)$, ближайшая к z, такова, что z лежит на границе квадрата с вершинами $(x_0, 0)$ и z'.

4.9. Лемма. *Если $z = (x, r)$, $z' = (x', r') \in A \times \mathbb{R}_+$, то $|x - x'| \leq re^{\varrho(z,z')-1}$.*

Доказательство. Пусть $s = |x - x'|$. Так как $1 + \ln(s/r) \leq s/r$, из леммы 4.7 следует, что

$$1 + \ln \frac{s}{r} \leq \varrho(z, L(x')) \leq \varrho(z, z'),$$

откуда вытекает утверждение леммы. $\square$

4.10. Лемма. *Для любого метрического пространства справедливо неравенство $\rho(\widetilde{A}, A^1(\delta)) \leq -2\log\delta$, где ρ — хаусдорфово расстояние между множествами в метрике ρ.*

Доказательство. Действительно, $\widetilde{A} \subset A^1(\delta)$. Найдется точка $y \in A$ такая, что $|x-y| \geq \delta r$. Так как $(x, |x-y|) \in \widetilde{A}$ и $\varrho((x, |x-y|), (x, r)) = \log(r/|x-y|) \leq -\log\delta$, то $\rho(\widetilde{A}, A^1(\delta)) \leq -2\log\delta$. $\square$

5. Толстые и тонкие множества

5.1. Определения. Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ назовем (δ, k)-*толстым*, если $A^k(\delta) = A \times [0, \operatorname{diam} A]$, и (δ, k)-*тонким*, если $A^k(\delta) = \varnothing$.

5.2. Теорема. *Множество $A \subset \mathbb{R}^n$ класса $V_3(\varepsilon)$ при всех $\varepsilon < 1$ является (ε, n)-тонким и $(\theta, n-1))$-толстым при $\theta = (1-\varepsilon^2)^{(n-1)/2}$.*

Доказательство. Первое утверждение следует непосредственно из определений. Докажем второе. Для $(x, r) \in A \times [0, \operatorname{diam} A]$ возьмем гиперплоскость P из определения $V_3(\varepsilon)$. Рассмотрим декартову систему координат $Oz_1, \dots, z_n$ с началом x, в которой P задается уравнением $z_n = 0$. Для $y \in A(x, r)$ имеем $|z_n(y)| \leq \varepsilon r$. Так как A разбивает $\mathbb{R}^n$, для любых $u = (u_1, \dots, u_{n-1}, \varepsilon r)$, $u' = (u'_1, \dots, u'_{n-1}, -\varepsilon r)$ из $\overline{B}(x, r)$ найдется точка из A на отрезке, их соединяющем. Ее первые $n-1$ координат совпадают с координатами u. Значит, можно выбрать $a_1, \dots, a_{n-1} \in A(x, r)$ такие, что векторы $p_i = a_i - x$ имеют все координаты, кроме i-й и последней, равные 0, а на месте i находится $\sqrt{1-\varepsilon^2}$. По построению $G(p_1, \dots, p_{n-1}) = (1-\varepsilon^2)^{n-1}$. $\square$

5.3. Замечание. Легко увидеть на примере полуплоскости в пространстве, что обратное утверждение неверно — полуплоскость является $(\theta, n-1)$-толстым и (δ, n)-тонким множеством при всех $\theta \leq 1$ и $\delta \geq 0$. Добавив топологическое ограничение, получим необходимое и достаточное условие на границу однородной области.

5.4. Теорема. *Пусть $\delta \geq 0$ и θ таковы, что $2\delta/\sqrt{3} < \theta \leq 1$, множество $A \subset \mathbb{R}^n$ замкнуто, не ограничено, $(\theta, n-1)$-толстое и (δ, n)-тонкое. Тогда если A разбивает $\mathbb{R}^n$ на два непустых открытых множества (т. е. объединение их замыканий равно $\mathbb{R}^n$), то оба эти множества — неограниченные области класса $V_3(\delta/\theta)$, а значит, однородны при достаточно малых δ.*

Доказательство. Пусть $(x,r) \in A \times [0, \operatorname{diam} A]$. Набор $a_1, \dots, a_{n-1} \in A(x,r) = A \cap \overline{B}(x,r)$ назовем *допустимым*, если

$$m_{n-1}(\Delta(x, a_1, \dots, a_{n-1})) \geq \theta r^{n-1}/(n-1)!.$$

Через $P = P(x, a_1, \dots, a_{n-1})$ обозначим гиперплоскость, проходящую через $x, a_1, \dots, a_{n-1}$. Так как $\chi_{n-1}(A(x,r)) \leq \delta$, то $A(x,r)$ лежит в $\delta r/\theta$-окрестности P. Пересечение шара $B(x,r)$ с этой окрестностью обозначим через M. Имеем разбиение $B(x,r)$ на центральный слой $\overline{M}$ и две выпуклые области $W_1 = W_1(x, a_1, \dots, a_{n-1})$ и W_2, которые назовем *шапочками* или, учитывая их форму, δ/θ-*шапочками*. Пусть W_1' и W_2' — шапочки, построенные по той же схеме по другому допустимому набору точек $a_1', \dots, a_{n-1}' \in A(x,r)$. Элементарное построение показывает, что при $\delta/\theta < \sqrt{3}/2$ шапочка W_1' пересечется хотя бы с одной из W_1, W_2.

Рассмотрим $B(x, tr)$ при $t > 1$. Его δ/θ-шапочки пересекаются с $B(x,r)$ по двум $t\delta/\theta$-шапочкам. Выберем $t_0 > 1$ такое, что $t_0\delta/\theta < \sqrt{3}/2$. Тогда любая δ/θ-шапочка шара $B(x, tr)$ пересечется хотя бы с одной из W_1, W_2.

Строим последовательность шаров $B\big(x, t_0^i r\big)$, выбирая по индукции в каждом шапочку W_1^i, пересекающуюся с W_1^{i-1}.

Пусть A разбивает $\mathbb{R}^n$ на два непустых открытых (не обязательно связных) множества U_1 и U_2. Если $W_1 \cap U_1 \neq \varnothing$, то $W_1 \subset U_1$ и $W_1^i \subset U_1$. Видим, что U_1 не ограничено. Возьмем $y \in U_2$ произвольно. Выберем точку $z \in A$, ближайшую к y, $R = |y - z|$. Шар $B(z,r)$ разбиваем аналогично $B(x,r)$ на шапочки и множество $\overline{M}'$. Хотя бы одна из шапочек пересекается с $B(y,R)$, а значит, целиком лежит в U_2. Обозначим ее через W_2'. Повторяя построение, видим, что U_2 также не ограничено. Выберем $r' > \max\{r, R\}$ настолько большое, что у $B(x,r')$ и $B(y,r')$ шапочки пересекутся. Так как каждая из них лежит в U_1 или U_2, шапочки с разными индексами не пересекаются. Значит, $W_2 \subset U_2$, $W_1' \subset U_1$. Мы доказали, что U_1 и U_2 связны, для любого шара шапочки лежат в разных областях и не может быть третьей области разбиения. Аналогично для каждого $x \in A$ строим последовательности шаров $B(x, t^{-i}r)$, $i \in \mathbb{N}$. Видим, что $\partial U_1 = \partial U_2 = A$. Так как на любом отрезке, соединяющем W_1 и W_2, найдется точка из $A(x,r) = A \cap \overline{B}(x,r)$, то $\varrho(\partial U \cap B(x,r), p) \leq \varepsilon r$. Это доказывает, что $U_1, U_2 \in V_3(\delta/\theta)$, и из теоремы 2.5 следует, что $U_1, U_2 \in \widetilde{U}(1-\tau)$, $\tau = 10^3\sqrt{\varepsilon}$ при $\varepsilon < 10^{-6}$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Martio O., Sarvas J.* Injectivity theorems in plane and space // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, Math. 1978/1979. V. 4. P. 383–401.
2. *John F.* Rotation and strain // Comm. Pure Appl. Math. 1963. V. 14. P. 391–413.
3. *Троценко Д. А.* Продолжение пространственных квазиконформных отображений, близких к конформным // Сиб. мат. журн. 1987. Т. 28, № 6. С. 125–133.
4. *Кармазин А. П.* Риманова структура областей Джона и равномерных областей из $\mathbb{R}^n$ // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 4. С. 786–804.
5. *Väisälä J.* Gromov hyperbolic spaces // Expo. Math. 2005. V. 23. P. 187–231.
6. *Martio O.* Definitions for uniform domains // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, Math. 1980. V. 5, N 1. P. 197–205.
7. *Tukia P.* A quasiconformal group not isomorphic to a Möbius group // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. A I, Math. 1981. V. 6. P. 149–160.
8. *Троценко Д. А.* Продолжение из области и аппроксимация пространственных отображений с малым коэффициентом искажения // Докл. АН СССР. 1983. Т. 270, № 6. С. 1331–1333.

9. *Väisälä J.* Uniform domains // Tohoku Math. J. 1988. V. 40. P. 101–118.
10. *Agard S. B., Gehring F. W.* Angles and quasiconformal mappings // Proc. London Math. Soc., III. Ser. 14 A. 1965. P. 1–21.
11. *Троценко Д. А.* Отображения, квазисохраняющие конусы // Сиб. мат. журн. 1983. Т. 23, № 3. С. 193–203.
12. *Троценко Д. А.* Образ прямой при квазиконформных отображениях пространства, близких к конформным // Докл. АН СССР. 1984. Т. 277, № 1. С. 53–56.
13. *Троценко Д. А.* Фрактальные прямые и квазисимметрии // Сиб. мат. журн. 1995. Т. 36, № 6. С. 1217–1231.
14. *Väisälä J., Vuorinen M., Wallin H.* Thick sets and quasisymmetric maps // Nagoya Math. J. 1994. V. 135. P. 121–148.
15. *Алестало П., Троценко Д. А., Вяйсяля Ю.* Линейное свойство продолжимости билипшицевых отображений // Сиб. мат. журн. 2003. Т. 44, № 6. С. 1226–1239.
16. *Alestalo P., Trotsenko D. A.* Plane sets allowing bilipschitz extensions // Math. Scand. 2009. V. 105, N 1. P. 134–146.
17. *Trotsenko D. A.* Upper sets and uniform domains // Rom. Acad. Math. Reports. 2000. V. 52, N 2. P. 553–562.
18. *Kim K., Langmeyer N.* Harmonic measure and hyperbolic distance in John disks // Math. Scand. 1998. V. 83, N 2. P. 283–299.
19. *Nakki R., Väisälä J.* John discs // Expo. Math. 1991. V. 9. P. 3–43.
20. *Trotsenko D. A., Väisälä J.* Upper sets and quasisymmetric maps // Ann. Acad. Sci. Fenn., Ser. AI, Math. 1999. V. 24. P. 465–488.

Статья поступила 16 сентября 2010 г.

Троценко Дмитрий Александрович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090
trotsenk@math.nsc.ru