Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 517.51

ОГРАНИЧЕННОСТЬ И КОМПАКТНОСТЬ ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ С ПЕРЕМЕННЫМИ ПРЕДЕЛАМИ ИНТЕГРИРОВАНИЯ В ВЕСОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ ЛЕБЕГА

Р. Ойнаров

Аннотация. Рассматриваются интегральные операторы с неотрицательными ядрами и переменными пределами интегрирования, для которых при более слабых, чем ранее исследованные, условиях на ядра получены критерии ограниченности и компактности в весовых пространствах Лебега.

Ключевые слова: интегральный оператор с переменными пределами интегрирования, пространство Лебега, ограниченность, компактность.

§ 1. Введение

Пусть $I = (a, b)$, $-\infty \le a < b \le +\infty$, $1 < p, q < \infty$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, ρ и w — неотрицательные, измеримые и п. в. конечные на I функции такие, что ρ^p, w^q, $w^{-q'}$ и $\rho^{-p'}$ локально суммируемые на I.

Множество всех измеримых п. в. конечных на I функций f таких, что

$$\|f\|_{p,\rho} \equiv \|\rho f\|_p = \left(\int_a^b |\rho f|^p \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

обозначим через $L_{p,\rho} \equiv L_p(\rho, I)$.

Рассмотрим интегральные операторы

$$\mathbf{K}_+ f(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s) f(s)\, ds, \quad x \in I, \tag{1}$$

$$\mathbf{K}_- g(s) = \int_{\alpha(s)}^{\beta(s)} K(x,s) g(x)\, dx, \quad s \in I, \tag{2}$$

из $L_{p,\rho}$ в $L_{q,w}$. В случае, когда $K(x,s) \equiv 1$, оператор (1) обозначается через

$$Hf(x) = \int_{\alpha(x)}^{\beta(x)} f(s)\, ds, \quad x \in I, \tag{3}$$

и называется *оператором Харди — Стеклова* [1].

На граничные функции α и β накладываем следующие условия:

(i) $\alpha(x)$ и $\beta(x)$ локально абсолютно непрерывные и строго возрастающие функции на I;

(ii) $\alpha(x)<\beta(x)$ для любого $x \in I$ и $\lim\limits_{x\to a}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to a}\beta(x) = a$, $\lim\limits_{x\to b}\alpha(x) = \lim\limits_{x\to b}\beta(x) = b$.

В последнее десятилетие начались интенсивные исследования вопроса ограниченности и компактности операторов (1)–(3) в весовых пространствах Лебега [1–7] и в банаховых функциональных пространствах [8]. Достаточно хорошо изучен оператор (3) (см. [1–5, 7]). Благодаря введению понятия «фарватер-функции» в работах В. Д. Степанова и Е. П. Ушаковой [1, 7] получены критерии ограниченности и компактности оператора (3) в интегральной форме, полностью аналогичные случаю, когда одна из граничных функций оператора (3) постоянная, и найдена связь между ограниченностью оператора (3) и неравенствами вида $\|wf\|_q \le C(\|\rho f'\|_s + \|vf\|_p)$.

Ограниченность операторов (1)–(3) устанавливается применением блочно-диагонального метода [1–8], суть которого заключается в разбиении интегрального оператора с двумя переменными пределами интегрирования на сумму интегральных операторов только с одним переменным пределом интегрирования и последующем применении полученных результатов для таких операторов. Впервые такой метод применен для оператора Харди — Стеклова (3) в работе Э. Н. Батуева и В. Д. Степанова [2], когда $\alpha(x) = \alpha x$, $\beta(x) = \beta x$, $a = 0$, $b = \infty$, а общий случай с условиями (i) и (ii) был изложен в кандидатской диссертации Э. Н. Батуева [4], выполненной и защищенной в 1991 г. под научным руководством В. Д. Степанова. Поэтому, опираясь на истоки этого метода, далее его будем называть *блочно-диагональным методом Батуева — Степанова.*

Операторы вида (1) исследованы в [6–8] в случае, когда их ядро $K(x,s) \ge 0$ удовлетворяет условию

$$\frac{1}{d}(K(x,\beta(z)) + K(z,s)) \le K(x,s) \le d(K(x,\beta(z)) + K(z,s)) \tag{4}$$

при

$$a < z \le x < b, \quad \alpha(x) \le s \le \beta(z), \tag{5}$$

а операторы вида (2) [1, 7] — при условии

$$\frac{1}{d}(K(x,z) + K(\alpha(z),s)) \le K(x,s) \le d(K(x,z) + K(\alpha(z),s)) \tag{6}$$

для

$$a < s \le z < b, \quad \alpha(z) \le x \le \beta(s), \tag{7}$$

что позволяет применение блочно-диагонального метода Батуева — Степанова, где $d \ge 1$ — постоянная, не зависящая от x, z и s.

В случае, когда $\alpha(x) = a$, $\beta(x) \equiv x$, т. е. когда оператор (1) имеет вид

$$\mathbf{K}f(x) = \int\limits_a^x K(x,s)f(s)\,ds, \tag{8}$$

а его ядро $K(x,s) \ge 0$ удовлетворяет условию [9]

$$\frac{1}{d}(K(x,z) + K(z,s)) \le K(x,s) \le d(K(x,z) + K(z,s)) \tag{9}$$

при $a < s \le z \le x < b$, оператор (8) был объектом многих исследований (см. [10–13] и приведенную там библиографию). Критерии $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$-ограниченности и компактности оператора (8) даны в [14].

Нетрудно видеть, что условия (4) и (5) равносильны выполнению условия (9) на ядра $\widetilde{K}(x,s) \equiv K(x,\beta(s))$ при $s \le z \le x \le \alpha^{-1}(\beta(s))$, $s \in I$, и условия (6) и (7) эквивалентны выполнению условия (9) на ядра $\widehat{K}(x,s) \equiv K(\alpha(x),s)$ при $\beta^{-1}(\alpha(x)) \le s \le z \le x$, $x \in I$.

Здесь при более слабых, чем (4) и (6), условиях на ядра операторов (1) и (2) устанавливаются $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$-ограниченность и компактность операторов (1) и (2).

В работе полагаем $\frac{0}{0} = 0$, $\infty \cdot 0 = 0$. Соотношение $A \ll B$ означает $A \le cB$, где константа $c > 0$ может зависеть только от несущественных параметров. Пишем $A \approx B$ вместо $A \ll B \ll A$. Всюду далее $\mathbb{Z}$ — множество целых чисел, $\chi_D(\cdot)$ — характеристическая функция множества $D \subset \mathbb{R}$.

Работа организована следующим образом. В § 2 даются необходимые понятия, обозначения и известные утверждения, используемые при доказательстве основных результатов, которым посвящен § 3.

§ 2. Необходимые обозначения, понятия и утверждения

Пусть $[c,d] \subset I$. Для каждого целого $n \ge 0$ определим классы $\mathscr{O}_n^{\pm}(c,d)$ (см. [15]) ядер операторов (1) и (2) и договоримся писать $K(\cdot,\cdot) \equiv K_n(\cdot,\cdot)$, если $K(\cdot,\cdot) \in \mathscr{O}_n^{\pm}(c,d)$.

Сначала определим классы $\mathscr{O}_n^{+}(c,d)$, $n \ge 0$. Пусть $\Omega_{c,d} = \{(x,s) : c \le s \le x \le d\}$ и $K^+(\cdot,\cdot)$ — неотрицательная, измеримая и определенная на $\Omega_{c,d}$ функция, неубывающая по первому аргументу. Функция $K^+(\cdot,\cdot) \equiv K_0^+(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу $\mathscr{O}_0^{+}(c,d)$ тогда и только тогда, когда $K_0^+(\cdot,\cdot)$ имеет вид $K_0^+(x,s) \equiv v(s)$.

Пусть определены классы $\mathscr{O}_i^{+}(c,d)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, $n \ge 1$. Функция $K^+(\cdot,\cdot) \equiv K_n^+(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу $\mathscr{O}_n^{+}(c,d)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $K_i^+(\cdot,\cdot) \in \mathscr{O}_i^{+}(c,d)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, и число $h_n > 0$ такие, что

$$K^+(x,s) \equiv K_n^+(x,s) \le h_n \sum_{i=0}^{n} K_{n,i}^+(x,t) K_i^+(t,s)$$

при $c \le s \le t \le x \le d$, где

$$K_{n,i}^+(x,t) = \inf_{c<s<t} \frac{K_n^+(x,s)}{K_i^+(t,s)}, \quad i = 0,1,\dots,n-1, \; K_{n,n}^+(\cdot,\cdot) \equiv 1.$$

По определению $K_n^+(x,s) \ge K_{n,i}^+(x,t) K_i^+(t,s)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, при $c \le s \le t \le x \le d$, поэтому

$$K_n^+(x,s) \approx \sum_{i=0}^{n} K_{n,i}^+(x,t) K_i^+(t,s), \quad c \le s \le t \le x \le d, \tag{10}$$

где константы эквивалентности зависят от h_n и $n \ge 0$.

Нетрудно видеть, что если для функции $K^+(\cdot,\cdot)$ существуют функции $K_i^+(\cdot,\cdot) \in \mathscr{O}_i^{+}(c,d)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, и функции $\varphi_{n,i}(\cdot,\cdot) \ge 0$, $i = 0,1,\dots,n-1$, измеримые и определенные на $\Omega_{c,d}$, такие, что

$$K^+(x,s) \approx \sum_{i=0}^{n-1} \varphi_{n,i}(x,t) K_i^+(t,s) + K^+(t,s)$$

при $c \le s \le t \le x \le d$, то $K^+(x,s) \equiv K_n^+(x,s) \in \mathscr{O}_n^+(c,d)$. Поэтому далее $K_{n,i}^+(x,t)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, будем считать произвольными неотрицательными измеримыми и определенными на $\Omega_{c,d}$ функциями, удовлетворяющими условию (10).

Пусть функция $K^-(\cdot,\cdot)$ определена, как выше, за исключением неубывания по первому аргументу. Вместо него потребуем невозрастания по второму аргументу.

Определим классы $\mathscr{O}_n^-(c,d)$, $n \ge 0$. Они состоят из функций вида $K^-(x,s) \equiv K_0^-(x,s) = u(x)$. Пусть определены классы $\mathscr{O}_i^-(c,d)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, $n \ge 1$. Функция $K^-(\cdot,\cdot) \equiv K_n^-(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу $\mathscr{O}_n^-(c,d)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $K_i^-(\cdot,\cdot) \in \mathscr{O}_i^-(c,d)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, и число $h_n > 0$ такие, что

$$K^-(x,s) \equiv K_n^-(x,s) \le h_n \sum_{i=0}^{n} K_i^-(x,t) K_{i,n}^-(t,s), \quad c \le s \le t \le x \le d,$$

где

$$K_{n,n}^-(\cdot,\cdot) \equiv 1, \quad K_{i,n}^-(t,s) = \inf_{t \le x \le d} \frac{K_n^-(x,s)}{K_i^-(x,t)}, \quad i = 0,1,\dots,n-1.$$

Как в (10), каждый класс $\mathscr{O}_n^-(c,d)$, $n \ge 1$, ядер $K_n^-(\cdot,\cdot)$ характеризуется соотношением вида

$$K_n^-(x,s) \approx \sum_{i=0}^{n} K_i^-(x,t) K_{i,n}^-(t,s), \quad c \le s \le t \le x \le d, \tag{11}$$

где $K_{i,n}^-(\cdot,\cdot)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, можно считать произвольными неотрицательными функциями, удовлетворяющими условию (11).

Ядра классов $\mathscr{O}_1^+(c,d)$ и $\mathscr{O}_1^-(c,d)$ соответственно характеризуются соотношениями

$$K_1^+(x,s) \approx K_{1,0}^+(x,t)v(s) + K_1^+(t,s), \tag{12}$$

$$K_1^-(x,s) \approx K_1^-(x,t) + u(x)K_{0,1}^-(t,s) \tag{13}$$

при $c \le s \le t \le x \le d$, причем в (12) функция $K_1^+(x,s)$ неубывающая по первому аргументу, а $K_1^-(x,s)$ в (13) невозрастающая по второму аргументу.

Будем говорить, что *функция* $K^\pm(\cdot,\cdot)$ *принадлежит* $\mathscr{O}_n^\pm(I)$, $n \ge 0$, если она принадлежит $\mathscr{O}_n^\pm(c,d)$ для любого $[c,d] \subset I$.

Функцию $K(\cdot,\cdot)$, удовлетворяющую условию (9), можно считать неубывающей по первому аргументу и невозрастающей по второму аргументу, так как она эквивалентна функции, обладающей этими свойствами [16]. Поэтому из (9), (12) и (13) вытекает, что функция, удовлетворяющая условию (9), принадлежит $\mathscr{O}_1^+(I) \cap \mathscr{O}_1^-(I)$.

Пусть функция $K^+(\cdot,\cdot) \ge 0$ определена и измерима на множестве $\Omega^+ = \{(x,s) : a < x < b,\ \alpha(x) \le s \le \beta(x)\}$ и неубывающая по первому аргументу.

Для целого $n \ge 0$ определим классы $\mathscr{O}_n^+(\alpha,\beta(\cdot),\Omega^+)$. Класс $\mathscr{O}_0^+(\alpha,\beta(\cdot),\Omega^+)$ состоит из функций вида $K^+(x,s) \equiv K_0^+(x,s) = v(s)$ при $(x,s) \in \Omega^+$. Пусть определены классы $\mathscr{O}_i^+(\alpha,\beta(\cdot),\Omega^+)$, $i = 0,1,\dots,n-1$, $n \ge 1$. Функция $K^+(\cdot,\cdot)$ принадлежит $\mathscr{O}_n^+(\alpha,\beta(\cdot),\Omega^+)$ тогда и только тогда, когда существуют определенные и измеримые на $\Omega_{a,b} = \{(x,t) : a < t \le x < b\}$ функции $K_{n,i}^+(x,t) \ge 0$,

$i=0,1,\dots,n-1$, и функции $K_i^+(\cdot,\cdot)\in\mathscr{O}_i^+(\alpha,\beta(\cdot),\Omega^+)$, $i=0,1,\dots,n-1$, такие, что

$$K^+(x,s)\equiv K_n^+(x,s)\approx\sum_{i=0}^{n}K_{n,i}^+(x,t)K_i^+(t,s),\quad K_{n,n}^+(\cdot,\cdot)\equiv 1, \tag{14}$$

при

$$a<t\le x<b,\quad \alpha(x)\le s\le\beta(t), \tag{15}$$

где константы эквивалентности не зависят от x, t и s.

Функцию $K_{n,i}^+(x,t)$, $i=0,1,\dots,n-1$, можно определить как

$$K_{n,i}^+(x,t)=\inf_{\alpha(x)\le s\le\beta(t)}\frac{K_n^+(x,s)}{K_i^+(t,s)}\quad\text{при } a<t\le x<b.$$

Если в (14) и (15) заменим s на $\beta(s)$, то получим, что включение $K^+(x,s)\in\mathscr{O}_n^+(\alpha,\beta(\cdot),\Omega^+)$ эквивалентно условию $K^+(x,\beta(s))\in\mathscr{O}_n^+(\triangle^-(t))$ для любого $t\in I$, где $\triangle^-(t)=[\beta^{-1}(\alpha(t)),t]$.

Пусть, теперь, функция $K^-(\cdot,\cdot)\ge 0$ определена, измерима на множестве $\Omega^-=\{(x,s):a<s<b,\ \alpha(s)\le x\le\beta(s)\}$ и невозрастающая по второму аргументу. Определим классы $\mathscr{O}_n^-(\alpha(\cdot),\beta,\Omega^-)$, $n\ge 0$. К классу $\mathscr{O}_0^-(\alpha(\cdot),\beta,\Omega^-)$ отнесем все функции вида $K^-(x,s)\equiv K_0^-(x,s)=u(x)$ при всех $(x,s)\in\Omega^-$. Пусть определены классы $\mathscr{O}_i^-(\alpha(\cdot),\beta,\Omega^-)$, $i=0,1,\dots,n-1$, $n\ge 1$. Тогда функция $K^-(\cdot,\cdot)$ принадлежит классу $\mathscr{O}_n^-(\alpha(\cdot),\beta,\Omega^-)$ тогда и только тогда, когда существуют функции $K_{i,n}^-(t,s)$, $i=0,1,\dots,n-1$, определенные и измеримые на множестве $\Omega_{a,b}$, и функции $K_i^-(x,t)\in\mathscr{O}_i^-(\alpha(\cdot),\beta,\Omega^-)$, $i=0,1,\dots,n-1$, такие, что

$$K^-(x,s)\equiv K_n^-(x,s)\approx\sum_{i=0}^{n}K_i^-(x,t)K_{i,n}^-(t,s),\quad K_{n,n}^-(\cdot,\cdot)\equiv 1, \tag{16}$$

при

$$a<s\le t<b,\quad \alpha(t)\le x\le\beta(s), \tag{17}$$

где константы эквивалентности не зависят от x, t и s.

Здесь функцию $K_{i,n}^-(\cdot,\cdot)$, $i=0,1,\dots,n-1$, можно определить как

$$K_{i,n}^-(t,s)=\inf_{\alpha(t)\le x\le\beta(s)}\frac{K_n^-(x,s)}{K_i^-(x,t)}\quad\text{при } a<s\le t<b.$$

Если в (16) и (17) заменим x на $\alpha(x)$, то, как выше, видим, что условие $K^-(x,s)\in\mathscr{O}_n^-(\alpha(\cdot),\beta,\Omega^-)$ эквивалентно условию $K^-(\alpha(x),s)\in\mathscr{O}_n^-(\triangle^+(t))$ для любого $t\in I$, где $\triangle^+(t)=[t,\alpha^{-1}(\beta(t))]$.

Приведем известные утверждения, необходимые при доказательстве основных результатов. Из лемм 2.1 и 2.2 работы [7] следует

Лемма 1. *Пусть* $1<p\le q<\infty$ *и* $a\le c<d\le b$. *Тогда для* $(L_{p,\rho}(\alpha(c),\beta(d))\to L_{q,w}(c,d))$*-нормы операторов*

$$H^+f(x)=\int\limits_{\alpha(c)}^{\beta(x)}f(t)\,dt,\quad H^-g(s)=\int\limits_{\alpha(s)}^{\beta(d)}g(t)\,dt$$

имеют место соотношения

$$\|H^+\|\approx\sup_{c<t<d}\left(\int\limits_t^d w^q(x)\,dx\right)^{\frac1q}\left(\int\limits_{\alpha(c)}^{\beta(t)}\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\|H^-\| \approx \sup_{c<t<d} \left(\int\limits_c^t w^q(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(d)} \rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Из теорем 5 и 6 в [15] вытекает

Лемма 2. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $a \le c < d \le b$ *и ядро оператора* $\mathbf{K}^+ f(x) = \int\limits_c^x K(x,s)f(s)\,ds$, $x \in (c,d)$, *принадлежит классу* $\mathscr{O}_n^+(c,d) \cup \mathscr{O}_n^-(c,d)$, $n \ge 1$. *Тогда оператор* $\mathbf{K}^+ : L_{p,\rho}(c,d) \to L_{q,w}(c,d)$ *ограничен тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий*

$$B_1^+ = \sup_{c<z<d} \left(\int\limits_z^d w^q(x) \left(\int\limits_c^z K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

$$B_2^+ = \sup_{c<z<d} \left(\int\limits_c^z \rho^{-p'}(s) \left(\int\limits_z^d K^q(x,s)w^q(x)\,dx \right)^{\frac{p'}{q}} ds \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

при этом для $(L_{p,\rho}(c,d) \to L_{q,w}(c,d))$*-нормы оператора* $\mathbf{K}^+$ *имеет место соотношение* $\|\mathbf{K}^+\| \approx B_1^+ \approx B_2^+$.

Лемма 3. *Пусть* $1 < p \le q < \infty$, $a \le c < d \le b$ *и ядро оператора* $\mathbf{K}^- g(s) = \int\limits_s^d K(x,s)g(x)\,dx$, $s \in (c,d)$, *принадлежит классу* $\mathscr{O}_n^+(c,d) \cup \mathscr{O}_n^-(c,d)$, $n \ge 1$. *Тогда оператор* $\mathbf{K}^- : L_{p,\rho}(c,d) \to L_{q,w}(c,d)$ *ограничен тогда и только тогда, когда выполнено одно из условий*

$$B_1^- = \sup_{c<z<d} \left(\int\limits_c^z w^q(s) \left(\int\limits_z^d K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(x)\,dx \right)^{\frac{q}{p'}} ds \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

$$B_2^- = \sup_{c<z<d} \left(\int\limits_z^d \rho^{-p'}(x) \left(\int\limits_c^z K^q(x,s)w^q(s)\,ds \right)^{\frac{p'}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} < \infty,$$

при этом для $(L_{p,\rho}(c,d) \to L_{q,w}(c,d))$*-нормы* $\|\mathbf{K}^-\|$ *оператора* $\mathbf{K}^-$ *имеет место соотношение* $\|\mathbf{K}^-\| \approx B_1^- \approx B_2^-$.

§ 3. Основные результаты

Положим

$$A_1^+(z) = \sup_{y \in \triangle^-(z)} \left(\int\limits_y^z w^q(x) \left(\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(y)} K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_2^+(z) = \sup_{y \in \triangle^-(z)} \left(\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(y)} \rho^{-p'}(s) \left(\int\limits_y^z K^q(x,s)w^q(x)\,dx \right)^{\frac{p'}{q}} ds \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_1^-(z) = \sup_{y\in\triangle^+(z)} \left(\int\limits_z^y w^q(s) \left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(z)} K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(x)\,dx \right)^{\frac{q}{p'}} ds \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$A_2^-(z) = \sup_{y\in\triangle^+(z)} \left(\int\limits_{\alpha(y)}^{\beta(z)} \rho^{-p'}(x) \left(\int\limits_z^y K^q(x,s)w^q(s)\,ds \right)^{\frac{p'}{q}} dx \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$A_i^{\pm} = \sup_{a<z<b} A_i^{\pm}(z), \quad i = 1,2.$$

Напомним, что $\triangle^+(z) = [z, \alpha^{-1}(\beta(z))]$, $\triangle^-(z) = [\beta^{-1}(\alpha(z)), z]$.

Теорема 1. *Пусть $1 < p \le q < \infty$. Если ядро оператора* (1) *принадлежит $\mathscr{O}_n^+(\alpha,\beta(\cdot),\Omega^+) \cup \mathscr{O}_n^-(\beta^{-1}(\cdot),\alpha^{-1},\Omega^+)$, $n \ge 1$, то*

(i) *оператор* (1) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$*-ограничен тогда и только тогда, когда выполняется условие $A_i^+ < \infty$ хотя бы при одном $i = 1,2$, при этом для* $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$*-нормы оператора* (1) *имеет место соотношение $\|\mathbf{K}_+\| \approx A_1^+ \approx A_2^+$;*

(ii) *оператор* (1) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$*-компактен тогда и только тогда, когда $A_i^+ < \infty$ и $\lim\limits_{y\to a} A_i^+(y) = \lim\limits_{y\to b} A_i^+(y) = 0$ хотя бы при одном $i = 1,2$.*

Теорема 2. *Пусть $1 < p \le q < \infty$. Если ядро оператора* (2) *принадлежит $\mathscr{O}_n^-(\alpha(\cdot),\beta,\Omega^-) \cup \mathscr{O}_n^+(\beta,\alpha^{-1}(\cdot),\Omega^-)$, $n \ge 1$, то*

(i) *оператор* (2) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$*-ограничен тогда и только тогда, когда выполняется условие $A_i^- < \infty$ хотя бы при одном $i = 1,2$, при этом для $L_{p,\rho} \to L_{q,w}$ нормы оператора* (2) *имеет место соотношение $\|\mathbf{K}_-\| \approx A_1^- \approx A_2^-$;*

(ii) *оператор* (2) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$*-компактен тогда и только тогда, когда $A_i^- < \infty$ и $\lim\limits_{z\to a} A_i^-(z) = \lim\limits_{z\to b} A_i^+(z) = 0$ хотя бы при одном $i = 1,2$.*

Сначала докажем теоремы 3 и 4, которые являются частными случаями теорем 1 и 2 соответственно, а затем докажем теоремы 1 и 2.

Теорема 3. *Пусть $1 < p \le q < \infty$. Если ядро оператора* (1) *принадлежит $\mathscr{O}_n^+(\alpha,\beta(\cdot),\Omega^+)$, $n \ge 1$, то*

(i) *оператор* (1) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$*-ограничен тогда и только тогда, когда выполняется условие $A_i^+ < \infty$ хотя бы при одном $i = 1,2$, при этом $\|\mathbf{K}_+\| \approx A_1^+ \approx A_2^+$;*

(ii) *оператор* (1) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$*-компактен тогда и только тогда, когда $A_i^+ < \infty$ и $\lim\limits_{z\to a} A_i^+(z) = \lim\limits_{z\to b} A_i^+(z) = 0$ хотя бы при одном $i = 1,2$.*

Теорема 4. *Пусть $1 < p \le q < \infty$. Если ядро оператора* (2) *принадлежит $\mathscr{O}_n^-(\alpha(\cdot),\beta,\Omega^-)$, $n \ge 1$, то*

(i) *оператор* (2) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$*-ограничен тогда и только тогда, когда выполняется условие $A_i^- < \infty$ хотя бы при одном $i = 1,2$, при этом $\|\mathbf{K}_-\| \approx A_1^- \approx A_2^-$;*

(ii) *оператор* (2) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$*-компактен тогда и только тогда, когда $A_i^- < \infty$ и $\lim\limits_{z\to a} A_i^-(z) = \lim\limits_{z\to b} A_i^+(z) = 0$ хотя бы при одном $i = 1,2$.*

Доказательство теоремы 3. (i). Достаточность. Пусть $A_i^+ < \infty$ хотя бы при одном $i = 1,2$. Для доказательства $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$-ограниченности оператора (1) применим блочно-диагональный метод Батуева — Степанова.

Для фиксированного $t_0 \in I$ построим последовательность точек $\{t_k\}_{k\in\mathbb{Z}} \subset I : t_{k+1} = \alpha^{-1}(\beta(t_k))$, $k \in \mathbb{Z}$, и положим $\triangle_k \equiv \triangle^+(t_k)$, $\delta_k = [\tau_k, \tau_{k+1}]$, где $\tau_k = \alpha(t_k) = \beta(t_{k-1})$, $k \in \mathbb{Z}$.

Из условий (i), (ii), наложенных на функции $\alpha(\cdot)$ и $\beta(\cdot)$, следует, что $I = \bigcup\limits_k \triangle_k = \bigcup\limits_k \delta_k$. Тогда для функции $f \geq 0$ имеем

$$\|w\mathbf{K}_+ f\|_q^q = \int\limits_a^b w^q(x)\Bigg(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s)f(s)\,ds\Bigg)^q dx$$
$$= \sum_k \int\limits_{\triangle_k} w^q(x)\Bigg(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s)f(s)\,ds\Bigg)^q dx. \quad (18)$$

Так как $\alpha(t_k) \leq \alpha(x) \leq \alpha(t_{k+1}) = \beta(t_k) \leq \beta(x) \leq \beta(t_{k+1})$ при $x \in \triangle_k$, то

$$\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s)f(s)\,ds = \int\limits_{\alpha(x)}^{\alpha(t_{k+1})} K(x,s)f(s)\,ds + \int\limits_{\beta(t_k)}^{\beta(x)} K(x,s)f(s)\,ds, \quad x \in \triangle_k. \quad (19)$$

Следуя [1], рассмотрим операторы

$$T_k^+ f(x) = \int\limits_{\alpha(x)}^{\alpha(t_{k+1})} K(x,s)f(s)\,ds, \quad T_k^+ : L_{p,\rho}(\delta_k) \to L_{q,w}(\triangle_k),$$

$$S_k^+ f(x) = \int\limits_{\beta(t_k)}^{\beta(x)} K(x,s)f(s)\,ds, \quad S_k^+ : L_{p,\rho}(\delta_{k+1}) \to L_{q,w}(\triangle_k).$$

Из (18) и (19) имеем

$$\|w\mathbf{K}_+ f\|_q^q \approx \sum_k \int\limits_{\triangle_k} w^q(x)\big(T_k^+ f(x)\big)^q dx + \sum_k \int\limits_{\triangle_k} w^q(x)\big(S_k^+ f(x)\big)^q dx$$
$$\leq \sum_k \big\|T_k^+\big\|^q \Bigg(\int\limits_{\delta_k} |\rho f|^p\Bigg)^{\frac{q}{p}} + \sum_k \big\|S_k^+\big\|^q \Bigg(\int\limits_{\delta_{k+1}} |\rho f|^p\Bigg)^{\frac{q}{p}}$$
$$\ll \max\big\{\sup_k \big\|T_k^+\big\|, \sup_k \big\|S_k^+\big\|\big\}^q \|\rho f\|_p^q.$$

Отсюда

$$\|\mathbf{K}_+\| \ll \max\big\{\sup_k \big\|T_k^+\big\|, \sup_k \big\|S_k^+\big\|\big\}, \quad (20)$$

где $\big\|T_k^+\big\|$ и $\big\|S_k^+\big\|$ — нормы операторов T_k^+ и S_k^+ соответственно из $L_{p,\rho}(\delta_k)$ в $L_{q,w}(\triangle_k)$ и из $L_{p,\rho}(\delta_{k+1})$ в $L_{q,w}(\triangle_k)$.

По условию ядро $K(\cdot,\cdot)$ оператора (1) принадлежит $\mathscr{O}_n^+(\alpha, \beta(\cdot), \Omega^+)$, поэтому при $x \geq t_k$, $\alpha(x) \leq s \leq \beta(t_k) = \alpha(t_{k+1})$ в силу (14) и (15) имеем

$$K(x,s) \equiv K_n(x,s) \approx \sum_{i=0}^n K_{n,i}(x,t_k)K_i(t_k,s).$$

Следовательно, для $x \in \triangle_k$

$$T_k^+ f(x) \approx \sum_{i=0}^n T_{k,i}^+ f(x), \quad (21)$$

где

$$T^+_{k,i}f(x) = K_{n,i}(x,t_k)\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(t_k)} K_i(t_k,s)f(s)\,ds,\ i=0,1,\dots,n, \quad K_{n,n}(\cdot,\cdot)\equiv 1.$$

Из (21) имеем $\left\|T^+_k\right\| \le \sum\limits_{i=0}^{n}\left\|T^+_{k,i}\right\|$, где $\|T_{k,i}\|$ — норма оператора $T^+_{k,i}$ из $L_{p,\rho}(\delta_k)$ в $L_{q,w}(\triangle_k)$. Так как операторы $T^+_{k,i}$, $i=0,1,\dots,n$, по сути, операторы Харди, то в силу леммы 1 получим

$$\|T_k\| \ll \sum_{i=0}^{n}\sup_{z\in\triangle_k}\left(\int\limits_{t_k}^{z} w^q(x)K^q_{n,i}(x,t_k)\,dx\right)^{\frac{1}{q}}\left(\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(t_k)} K_i^{p'}(t_k,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\ll \sup_{z\in\triangle_k}\left(\int\limits_{t_k}^{z} w^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(t_k)} K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{q}{p'}}dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\approx \sup_{z\in\triangle_k}\left(\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(t_k)} \rho^{-p'}(s)\left(\int\limits_{t_k}^{z} K^q(x,s)w^q(x)\,dx\right)^{\frac{p'}{q}}ds\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|T_k\| \ll \sup_{a<y<b}\ \sup_{z\in\triangle^+(y)}\left(\int\limits_{y}^{z} w^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(y)} K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{q}{p'}}dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\approx \sup_{a<y<b}\ \sup_{z\in\triangle^+(y)}\left(\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(y)} \rho^{-p'}(s)\left(\int\limits_{y}^{z} K^q(x,s)w^q(x)\,dx\right)^{\frac{p'}{q}}ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= \sup_{a<z<b}\ \sup_{y\in\triangle^-(z)}\left(\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(y)} \rho^{-p'}(s)\left(\int\limits_{y}^{z} K^q(x,s)w^q(x)\,dx\right)^{\frac{p'}{q}}ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= A_2^+ \approx A_1^+. \quad (22)$$

Оценим $\|S_k\|$, $k\in\mathbb{Z}$. Величина $\|S_k\|$ является наилучшей постоянной в неравенстве

$$\left(\int\limits_{\triangle_k} w^q(x)\left(\int\limits_{\beta(t_k)}^{\beta(x)} K(x,s)f(s)\,ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \|S_k\|\left(\int\limits_{\delta_{k+1}} |\rho(s)f(s)|^p\,ds\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Здесь, произведя замену $s=\beta(y)$ и полагая $f(\beta(y))\beta'(y)=g(y)$ с учетом $\delta_{k+1}=[\beta(t_k),\beta(t_{k+1})]$, имеем

$$\left(\int\limits_{\triangle_k} w^q(x)\left(\int\limits_{t_k}^{x} K(x,\beta(y)g(y)\,dy\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \le \|S_k\|\left(\int\limits_{\triangle_k} |\tilde\rho(y)g(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}},$$

где $\tilde{\rho}(y) = \rho(\beta(y))(\beta'(y))^{\frac{1-p}{p}}$.

Из (14), (15) следует, как сказано выше, что $K(x,\beta(y)) \in \mathscr{O}_n^+(\triangle_k)$, поэтому на основании леммы 2

$$\|S_k\| \ll \sup_{z\in\triangle_k}\left(\int_z^{t_{k+1}} w^q(x)\left(\int_{t_k}^{z} K^{p'}(x,\beta(y))(\tilde{\rho}(y))^{-p'}\,dy\right)^{\frac{q}{p'}} dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\approx \sup_{z\in\triangle_k}\left(\int_{t_k}^{z}(\tilde{\rho}(y))^{-p'}\left(\int_z^{t_{k+1}} K^q(x,\beta(y))w^q(x)\,dx\right)^{\frac{p'}{q}} dy\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Отсюда, произведя замену $\beta(y)=s$, имеем

$$\|S_k\| \ll \sup_{z\in\triangle^-(t_{k+1})}\left(\int_z^{t_{k+1}} w^q(x)\left(\int_{\alpha(t_{k+1})}^{\beta(z)} K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{q}{p'}} dx\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$= A_1^+(t_{k+1}) \approx A_2^+(t_{k+1}).$$

Тогда

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}}\|S_k\| \ll A_1^+ \approx A_2^+. \tag{23}$$

Из (20), (22) и (23) следует

$$\|\mathbf{K}_+\| \ll A_1^+ \approx A_2^+. \tag{24}$$

Необходимость. Пусть $\|\mathbf{K}_+\| < \infty$ и $z\in\triangle^-(t)$, $t\in I$. Из $(L_{p,\rho}\to L_{q,w})$-ограниченности оператора (1) следует $(L_{q',w^{-1}}\to L_{p',\rho^{-1}})$-ограниченность сопряженного оператора

$$\mathbf{K}_+^* g(s) = \int_{\beta^{-1}(s)}^{\alpha^{-1}(s)} K(x,s)g(x)\,dx. \tag{25}$$

Положим $g_0(x) = \chi_{[z,t]}(x)w^q(x)$, тогда в силу локальной суммируемости функций w^q, $w^{-q'}$ имеем $0 < \|w^{-1}g_0\|_{q'} = \|w\|_{q,(z,t)} = \gamma < \infty$. Используя условия (14) и (15), получим

$$\|\mathbf{K}_+\| = \|\mathbf{K}_+^*\| \geq \frac{\|\rho^{-1}\mathbf{K}_+^* g_0\|_{p'}}{\|w^{-1}g_0\|_{q'}}$$

$$\geq \frac{1}{\gamma}\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(z)}\rho^{-p'}(s)\left(\int_{\beta^{-1}(s)}^{\alpha^{-1}(s)} K(x,s)g_0(x)\,dx\right)^{p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\gg \frac{1}{\gamma}\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(z)}\rho^{-p'}(s)\left(\int_z^t K(x,s)g_0(x)\,dx\right)^{p'} ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\gg \frac{1}{\gamma}\left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K_i^{p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p'}}\int_z^t K_{n,i}(x,z)w^q(x)\,dx, \quad i=0,1,\ldots,n.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K_i^{p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds < \infty, \qquad i = 0,1,\ldots,n.$$

Поэтому зададим пробные функции в виде

$$f_i(s) \equiv f_{i,t}(s) = \chi_{[\alpha(t),\beta(z)]}(s)K_i^{p'-1}(z,s)\rho^{-p'}(s), \quad i = 0,1,\ldots,n.$$

Тогда

$$\|\rho f_i\|_p = \left(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K_i^{p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p}}, \quad i = 0,1,\ldots,n. \tag{26}$$

Используя условия (14) и (15), имеем

$$\begin{aligned}\|w\mathbf{K}_+ f_i\|_q &\geq \left(\int\limits_z^t w^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(x)}^{\beta(x)} K(x,s)f_i(s)\,ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\geq \left(\int\limits_z^t w^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K(x,s)K_i^{p'-1}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\gg \left(\int\limits_z^t K_{n,i}^q(x,z)w^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K_i^{p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds, \quad i = 0,1,\ldots,n.\end{aligned} \tag{27}$$

Тогда из (26) и (27) следует

$$\begin{aligned}\|\mathbf{K}_+\| &\gg \sum_{i=0}^n \frac{\|w\mathbf{K}_+ f_i\|_q}{\|\rho f_i\|_p}\\ &\geq \sum_{i=0}^n \left(\int\limits_z^t K_{n,i}^q(x,z)w^q(x)\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \left(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K_i^{p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{1}{p'}}\\ &\approx \left(\int\limits_z^t w^q(x)\left(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(s)\,ds\right)^{\frac{q}{p'}} dx\right)^{\frac{1}{q}}\\ &\approx \left(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(z)} \rho^{-p'}(s)\left(\int\limits_z^t K^q(x,s)w^q(x)\,dx\right)^{\frac{p'}{q}} ds\right)^{\frac{1}{p'}}.\end{aligned}$$

Откуда в силу произвольности $z \in \triangle^-(t)$, $t \in I$, имеем

$$\infty > \|\mathbf{K}_+\| \gg A_1^+ \approx A_2^+. \tag{28}$$

Из (24) и (28) получим, что $\|\mathbf{K}_+\| \approx A_1^+ \approx A_2^+$.

П. (i) теоремы 3 доказан.

(ii). Необходимость. Пусть оператор (1) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$-компактен. Тогда он ограничен, следовательно, по утверждению п. (i) $A_i^+ < \infty$, $i = 1, 2$. Положим $\bar{f}_{i,t}(s) = \frac{f_{i,t}(s)}{\|\rho f_{i,t}\|_p}$, $i = 0, 1, \dots, n$.

Пусть $g \in L_{p',\rho^{-1}}$. Тогда

$$\int_a^b g(s)\bar{f}_{i,t}(s)\,ds = \int_{\alpha(t)}^{\beta(z)} g(s)\bar{f}_{i,t}(s)\,ds \le \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(z)} |\rho^{-1}g|^{p'}\,dt \right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Так как $z \in \triangle^-(t)$, из $t \to a$ $(t \to b)$ вытекают $z \to a$ $(z \to b)$, $\alpha(t) \to a$ $(\alpha(t) \to b)$ и $\beta(z) \to a$ $(\beta(z) \to b)$, то

$$\lim_{t\to a} \int_{\alpha(t)}^{\beta(z)} |\rho^{-1}g|^{p'}\,dt = \lim_{t\to b} \int_{\alpha(t)}^{\beta(z)} |\rho^{-1}g|^{p'}\,dt = 0.$$

Следовательно, при каждом $i = 0, 1, \dots, n$ t-семейство функций $\bar{f}_{i,t}$ слабо сходится к нулю при $t \to a$ и $t \to b$. Тогда $\lim\limits_{t\to a} \|w\mathbf{K}_+\bar{f}_{i,t}\|_q = \lim\limits_{t\to b} \|w\mathbf{K}_+\bar{f}_{i,t}\|_q = 0$, $i = 0, 1, \dots, n$, в силу $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$-компактности оператора (1).

Как в (27), имеем

$$\sum_{i=0}^n \|w\mathbf{K}_+\bar{f}_{i,t}\|_q \gg \sup_{z\in\triangle^-(t)} \sum_{i=0}^n \left(\int_z^t K_{n,i}^q(x,z)w^q(x)\,dx \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K_i^{p'}(z,s)\rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{\frac{1}{p'}} \approx A_1^+(t) \approx A_2^+(t).$$

Поэтому $\lim\limits_{t\to a} A_i^+(t) = \lim\limits_{t\to b} A_i^+(t) = 0$, $i = 1, 2$.

(ii). Достаточность. Пусть $A_i^+ < \infty$ и $\lim\limits_{t\to a} A_i^+(t) = \lim\limits_{t\to b} A_i^+(t) = 0$ хотя бы при одном $i = 1, 2$. Из условия $A_i^+ < \infty$ в силу утверждения (i) оператор (1) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$-ограничен. Пусть $a < c < d < b$. Рассмотрим оператор $\chi_{[c,d]}\mathbf{K}_+ f(x) \equiv \chi_{[c,d]}(x)\mathbf{K}_+ f(x)$. Оператор $\chi_{[c,d]}\mathbf{K}_+$ ограничен из $L_{p,\rho}$ в $L_{q,w}$, но действие его из $L_{p,\rho}$ в $L_{q,w}$ равносильно действию из $L_{p,\rho}(\alpha(c), \beta(d))$ в $L_{q,w}(c,d)$. Из $A_i^+ < \infty$ следует, что

$$\left(\int_c^d \left(\int_{\alpha(c)}^{\beta(d)} w^{p'}(x)K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}} < \infty.$$

Следовательно (см. [17, теорема 6.3]), оператор $\chi_{(c,d)}\mathbf{K}_+$ компактен из $L_{p,\rho}(\alpha(c), \beta(d))$ в $L_{q,w}(c,d)$, это равносильно его $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$-компактности. Тогда

$$\|\mathbf{K}_+ - \chi_{[c,d]}\mathbf{K}_+\| \le \|\chi_{(a,c)}\mathbf{K}_+\| + \|\chi_{(d,b)}\mathbf{K}_+\|, \tag{29}$$

где $\|\cdot\|$ — норма указанных операторов из $L_{p,\rho}$ в $L_{q,w}$. Ядро $\chi_{(a,c)}(x)K(x,s)$ $(\chi_{(d,b)}(x)K(x,s))$ оператора $\chi_{(a,c)}\mathbf{K}_+$ $(\chi_{(d,b)}\mathbf{K}_+)$ удовлетворяет условию (14) и (15), стало быть, по утверждению (i)

$$\|\chi_{(a,c)}\mathbf{K}_+\| \ll \sup_{a<z<c} A_i^+(z), \quad \|\chi_{(d,b)}\mathbf{K}_+\| \ll \sup_{d<z<b} A_i^+(z), \quad i = 1, 2. \tag{30}$$

Согласно (29), (30) оператор (1) является равномерным пределом компактных операторов $\chi_{[c,d]}\mathbf{K}_+$ при $c \to a$, $d \to b$. Следовательно, он компактен.

Теорема 3 доказана.

Доказательство теоремы 4. Докажем достаточность утверждения (i). Остальное доказывается, как в теореме 3.

Пусть $A_i^- < \infty$ хотя бы при одном $i = 1, 2$. Применяя блочно-диагональный метод Батуева — Степанова для $g \geq 0$, получим представление

$$\|w\mathbf{K}_- g\|_q^q \approx \sum_k \int\limits_{\triangle_k} w^q(s)(T_k^- g(s))^q ds + \sum_k \int\limits_{\triangle_k} w^q(s)(S_k^- g(s))^q ds.$$

Отсюда, как в теореме 3,

$$\|\mathbf{K}_-\| \ll \max\{\sup_k \|T_k^-\|, \sup_k \|S_k^-\|\}, \tag{31}$$

где

$$T_k^- g(s) = \int\limits_{\alpha(s)}^{\beta(t_k)} K(x,s)g(x)\,dx, \quad T_k^- : L_{p,\rho}(\delta_k) \to L_{q,w}(\triangle_k),$$

$$S_k^- g(s) = \int\limits_{\alpha(t_{k+1})}^{\beta(s)} K(x,s)g(x)\,dx, \quad S_k^- : L_{p,\rho}(\delta_{k+1}) \to L_{q,w}(\triangle_k).$$

По условию теоремы ядро $K(\cdot,\cdot)$ принадлежит $\mathscr{O}_n^-(\alpha(\cdot),\beta,\Omega^-)$, поэтому в силу (16) и (17) при $s \in \triangle_k$ и $\alpha(t_{k+1}) \leq x \leq \beta(s)$ имеет место соотношение

$$K(x,s) \equiv K_n(x,s) \approx \sum_{i=0}^n K_i(x,t_{k+1})K_{i,n}(t_{k+1},s).$$

Поэтому для $s \in \triangle_k$ имеем

$$S_k^- g(s) \approx \sum_{i=0}^n K_{i,n}(t_{k+1},s) \int\limits_{\alpha(t_{k+1})}^{\beta(s)} K_i(x,t_{k+1})g(x)\,dx = \sum_{i=0}^n S_{k,i}^- g(s),$$

где

$$S_{k,i}^- g(s) = K_{i,n}(t_{k+1},s) \int\limits_{\alpha(t_{k+1})}^{\beta(s)} K_i(x,t_{k+1})g(x)\,dx, \quad i = 0,1,\dots,n.$$

Отсюда $\|S_k^-\| \ll \sum\limits_{i=0}^n \|S_{k,i}\|$, где $\|S_{k,i}\|$ — норма оператора $S_{k,i}^-$, $i = 0,1,\dots,n$, из $L_{p,\rho}(\delta_{k+1})$ в $L_{q,w}(\triangle_k)$. Так как все $S_{k,i}$, $i = 0,1,\dots,n$, являются операторами Харди, в силу леммы 1

$$\|S_k^-\| \ll \sum_{i=0}^n \sup_{z \in \triangle^-(t_{k+1})} \left(\int\limits_z^{t_{k+1}} w^q(s)K_{i,n}^q(t_{k+1},s)\,ds \right)^{\frac{1}{q}} \times \left(\int\limits_{\alpha(t_{k+1})}^{\beta(z)} K_i^{p'}(x,t_{k+1})\rho^{-p'}(x)\,dx \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$\ll \sup_{z\in\triangle^-(t_{k+1})}\left(\int\limits_z^{t_{k+1}} w^q(s)\left(\int\limits_{\alpha(t_{k+1})}^{\beta(z)} K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p'}} ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\approx \sup_{z\in\triangle^-(t_{k+1})}\left(\int\limits_{\alpha(t_{k+1})}^{\beta(z)} \rho^{-p'}(x)\left(\int\limits_z^{t_{k+1}} K^q(x,s)w^q(s)\,ds\right)^{\frac{p'}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p'}}.$$

Следовательно,

$$\sup_k \|S_k^-\| \ll \sup_{a<t<b}\sup_{z\in\triangle^-(t)}\left(\int\limits_z^t w^q(s)\left(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p'}} ds\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \sup_{a<z<b}\sup_{t\in\triangle^+(z)}\left(\int\limits_z^t w^q(s)\left(\int\limits_{\alpha(t)}^{\beta(z)} K^{p'}(x,s)\rho^{-p'}(x)\,dx\right)^{\frac{q}{p'}} ds\right)^{\frac{1}{p'}} = A_1^- \approx A_2^-. \tag{32}$$

Оценим $(L_{p,\rho}(\delta_{k+1}) \to L_{q,w}(\triangle_k))$-нормы $\|T_k^-\|$ операторов T_k^-, $k\in\mathbb{Z}$. Произведя замену $x=\alpha(y)$ в неравенстве

$$\left(\int\limits_{\triangle_k} w^q(s)\left(\int\limits_{\alpha(s)}^{\alpha(t_{k+1})} K(x,s)g(x)\,dx\right)^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \le \|T_k^-\|\left(\int\limits_{\delta(t_k)} |\rho g|^p\,dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

и затем полагая $g(\alpha(y))\alpha'(y)=f(y)$, имеем

$$\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} w^q(s)\left(\int\limits_s^{t_{k+1}} K(\alpha(y),s)f(y)\,dy\right)^q ds\right)^{\frac{1}{q}} \le \|T_k\|\left(\int\limits_{t_k}^{t_{k+1}} |\tilde\rho(y)f(y)|^p\,dy\right)^{\frac{1}{p}}, \tag{33}$$

где $\tilde\rho = \rho(\alpha(y))(\alpha'(y))^{\frac{1-p}{p}}$.

Так как $K(\alpha(y),s)\in\mathscr{O}_n^-(\triangle_k)$ в силу условия (16) и (17), из (33) на основании леммы 3 получим

$$\|T_k\| \ll \sup_{z\in\triangle_k}\left(\int\limits_{t_k}^{z} w^q(s)\left(\int\limits_z^{t_{k+1}} K^{p'}(\alpha(y),s)\tilde\rho^{-p'}(y)\,dy\right)^{\frac{q}{p'}} ds\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$\approx \sup_{z\in\triangle_k}\left(\int\limits_z^{t_{k+1}} \tilde\rho^{-p'}(y)\left(\int\limits_{t_k}^{z} K^q(\alpha(y),s)w^q(s)\,ds\right)^{\frac{p'}{q}} dy\right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \sup_{z\in\triangle^+(t_k)}\left(\int\limits_{\alpha(z)}^{\beta(t_k)} \rho^{-p'}(x)\left(\int\limits_{t_k}^{z} K^q(x,s)w^q(s)\,ds\right)^{\frac{p'}{q}} dx\right)^{\frac{1}{p'}} = A_2^-(t_k) \approx A_1^-(t_k).$$

Тогда

$$\sup_k \|T_k^-\| \ll A_1^- \approx A_2^-. \tag{34}$$

Из (31), (32) и (34) имеем $\|\mathbf{K}_-\| \ll A_1^- \approx A_2^-$. Теорема 4 доказана.

Доказательство теоремы 1. Теорему 1 остается доказать только для случая, когда ядро оператора (1) принадлежит $\mathscr{O}_n^-(\beta^{-1}(\cdot), \alpha^{-1}, \Omega^+)$. Пусть $K(\cdot,\cdot) \in \mathscr{O}_n^-(\beta^{-1}(\cdot), \alpha^{-1}, \Omega^+)$. Оператор (1) $(L_{p,\rho} \to L_{q,w})$-ограничен, компактен тогда и только тогда, когда сопряженный оператор (25) соответственно $(L_{q',w^{-1}} \to L_{p',\rho^{-1}})$-ограничен, компактен. На основании теоремы 4 оператор (25) $(L_{q',w^{-1}} \to L_{p',\rho^{-1}})$-ограничен тогда и только тогда, когда $\widetilde{A}_i^- < \infty$ хотя бы при одном $i = 1, 2$, причем $\|\mathbf{K}_+\| = \|\mathbf{K}_+^*\| \approx \widetilde{A}_1^- \approx \widetilde{A}_2^-$, и $(L_{q',w^{-1}} \to L_{p',\rho^{-1}})$-компактен тогда и только тогда, когда $\widetilde{A}_i^- < \infty$ и

$$\lim_{z\to a} \widetilde{A}_i^-(z) = \lim_{z\to b} \widetilde{A}_i^-(z) = 0 \tag{35}$$

хотя бы при одном $i = 1, 2$. Здесь

$$\widetilde{A}_1^-(z) = \sup_{z \le t \le \beta(\alpha^{-1}(z))} \left(\int_z^t \rho^{-p'}(s) \left(\int_{\beta^{-1}(t)}^{\alpha^{-1}(z)} K^q(x,s) w^q(x)\,dx \right)^{\frac{p'}{q}} ds \right)^{\frac{1}{p'}},$$

$$\widetilde{A}_2^-(z) = \sup_{z \le t \le \beta(\alpha^{-1}(z))} \left(\int_{\beta^{-1}(t)}^{\alpha^{-1}(z)} w^q(x) \left(\int_z^t K^q(x,s) \rho^{-p'}(s)\,ds \right)^{\frac{q}{p'}} dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

$$\widetilde{A}_i^- = \sup_{a<z<b} \widetilde{A}_i^-(z), \quad i = 1, 2.$$

Таким образом, если мы покажем, что $\widetilde{A}_i^- \approx A_i^+$, $i = 1, 2$, и условие (35) эквивалентно условию $\lim\limits_{z\to a} A_i^+(z) = \lim\limits_{z\to b} A_i^+(z) = 0$, то теорема 1 будет доказана.

В выражении $\widetilde{A}_i^-(z)$ произведем замену $\alpha^{-1}(z) \to z$, $\beta^{-1}(t) \to t$. Тогда

$$\widetilde{A}_1^-(\alpha(z)) = \sup_{\alpha(z) \le \beta(t) \le \beta(z)} \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(t)} \rho^{-p'}(s) \left(\int_t^z K^q(x,s) w^q(x)\,dx \right)^{\frac{p'}{q}} ds \right)^{\frac{1}{p'}}$$

$$= \sup_{\beta^{-1}(\alpha(z)) \le t \le z} \left(\int_{\alpha(z)}^{\beta(t)} \rho^{-p'}(s) \left(\int_t^z K^q(x,s) w^q(x)\,dx \right)^{\frac{p'}{q}} ds \right)^{\frac{1}{p'}} = A_2^+(z),$$

поэтому $\widetilde{A}_1^- = \sup\limits_{a<z<b} \widetilde{A}_1^-(z) = \sup\limits_{a<z<b} \widetilde{A}_1^-(\alpha(z)) = \sup\limits_{a<z<b} A_2^+(z) = A_2^+$.

Аналогично $\widetilde{A}_2^-(\alpha(z)) = A_1^+(z)$ и $\widetilde{A}_2^- = A_1^+$. Легко видеть, что (32) выполняется тогда и только тогда, когда выполняется $\lim\limits_{z\to a} A_i^+(z) = \lim\limits_{z\to a} \widetilde{A}_{2-i}^-(\alpha(z)) = 0$, $\lim\limits_{z\to b} A_i^+(z) = \lim\limits_{z\to b} \widetilde{A}_{2-i}^-(\alpha(z)) = 0$.

Теорема 1 доказана.

Теорема 2 доказывается аналогично.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Степанов В. Д., Ушакова Е. П.* Об интегральных операторах с переменными пределами интегрирования // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 2001. Т. 232. С. 298–317.
2. *Батуев Э. Н., Степанов В. Д.* Весовые неравенства типа Харди. Владивосток, 1987. 22 с. (Препринт / ВЦ ДВНЦ АН СССР).

3. *Батуев Э. Н., Степанов В. Д.* О весовых неравенствах типа Харди // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 1. С. 13–22.
4. *Батуев Э. Н.* Ограниченность операторов в весовых лебеговых пространствах на полуоси: Дис. ... канд. физ.-мат. наук. Хабаровский политехнический институт, 1991.
5. *Heining H. P., Sinnamon G.* Mapping properties of integral averaging operators // Stud. Math. 1998. V. 129. P. 157–177.
6. *Chen T., Sinnamon G.* Generalized Hardy operators and normalizing measures // J. Ineq. Appl. 2002. V. 7, N 6. P. 829–866.
7. *Stepanov V. D., Ushakova E. P.* Kernel operators with variable intervals of integration in Lebesgue spaces and applications // Math. Ineq. Appl. 2010. V. 13, N 3. P. 449–510.
8. *Gogatishvili A., Lang J.* The generalized Hardy operators with kernel and variable integral limits in Banach function spaces // J. Ineq. Appl. 1999. V. 4, N 1. P. 1–16.
9. *Ойнаров Р.* Весовые неравенства для одного класса интегральных операторов // Докл. АН СССР. 1991. Т. 319, № 5. С. 1076–1078.
10. *Stepanov V. D.* Weighted norm inequalities for integral operators and related topics // Nonlinear analysis, function spaces and applications. Prague, 1994. V. 5. P. 139–175.
11. *Edmunds D. E., Stepanov V. D.* On the singular numbers of certain Volterra integral operators // J. Funct. Anal. 1995. V. 134. P. 222–246.
12. *Stepanov V. D.* On the lower bounds for Schatten–von Neuman of certain Volterra integral operators // J. London. Math. Soc. 2000. V. 61. P. 905–922.
13. *Kufner A., Perrson L.-E.* Weighted inequalities of Hardy type. River Edge: Word Sci. Publ. Co. Inc., 2003.
14. *Ойнаров Р.* Двусторонние оценки норм некоторых классов интегральных операторов // Тр. Мат. ин-та им. В. А. Стеклова РАН. 1993. Т. 204. С. 240–250.
15. *Ойнаров Р.* Ограниченность и компактность интегральных операторов вольтерровского типа // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 5. С. 1100–1115.
16. *Oinarov R.* Reversion of Hölder type inequalities for sums of weighted norms and additive weighted estimates of integral operators // Mat. Ineq. Appl. 2003. V. 6, N 3. P. 221–236.
17. *Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е.* Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. М.: Наука, 1966.

Статья поступила 28 октября 2010 г.

Ойнаров Рыскул
Евразийский национальный университет им. Л. Н. Гумилева,
ул. Мунайтпасова, 5, Астана 010080, Казахстан
o_ryskul@mail.ru