Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2011. Том 52, № 6

УДК 517.98.22

О СЕКЦИОННОЙ СВЯЗНОСТИ КОНТИНГЕНЦИИ

С. П. Пономарев, М. Туровска

Аннотация. Пусть X — вещественное нормированное пространство, $f:\mathbb{R}\to X$ — непрерывное отображение. Пусть $\mathrm{T}_f(t_0)$ — контингенция графика $G(f)$ в точке $(t_0, f(t_0))$, $S^+\subset(0,\infty)\times X$ — «правая» единичная полусфера с центром в $(0,0_X)$. Доказаны следующие результаты.

1. Если $\dim X<\infty$ и растяжение $D(f,t_0)$ отображения f в t_0 конечно, то $\mathrm{T}_f(t_0)\cap S^+$ компактна и связна. Результат остается верным для $\mathrm{T}_f(t_0)\cap\overline{S^+}$ даже при бесконечном растяжении в случае, когда $f:[0,\infty)\to X$.

2. Если $\dim X=\infty$, то для любого компактного множества $F\subset S^+$ существует липшицево отображение $f:\mathbb{R}\to X$ такое, что $\mathrm{T}_f(t_0)\cap S^+=F$.

3. Если замкнутое множество $F\subset S^+$ имеет мощность больше континуума, то соотношение $\mathrm{T}_f(t_0)\cap S^+=F$ неверно для любого липшицева $f:\mathbb{R}\to X$.

Ключевые слова: контингенция (касательный конус), растяжение, связность, компактность, евклидово пространство, мощность.

1. Основные определения и вспомогательные утверждения

Определение 1 [1]. Пусть $\varnothing\neq M\subset Z$, где Z — вещественное нормированное пространство, $z\in\overline{M}$. Множество

$$\{v\in Z:\exists(z_n)_{n\in\mathbb{N}}, z_n\in M, \lim_{n\to\infty} z_n=z, \exists(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}, \lambda_n>0:\lim_{n\to\infty}\lambda_n(z_n-z)=v\}$$

называется *касательным конусом* к M в точке z и обозначается через $\mathrm{Tan}_M(z)$. Элементы $\mathrm{Tan}_M(z)$ называются *векторами, касательными к M в z*. Множество $\mathrm{Tan}_M(z)$ называется также *контингенцией* M в z [2, 3].

Как всегда, мы используем более короткий термин «контингенция». Через 0_Z обозначим нулевой вектор пространства Z. Заметим, что $\mathrm{Tan}_M(z)$ замкнуто и всегда содержит вектор 0_Z. Более подробно о контингенциях см. [4]. Полагаем $\mathbb{R}^+=(0,\infty)$, $\overline{\mathbb{R}^+}=[0,\infty)$.

Определение 2. Для любого непустого множества $A\subset Z\setminus\{0_Z\}$ множество $C(A)=\mathbb{R}^+A:=\{tx: t>0,\ x\in A\}$ назовем *конусом, порожденным A, с вершиной* 0_Z.

Далее через $X=(X,\|\cdot\|)$ обозначаем вещественное нормированное пространство. Изучим отображения $f:\mathbb{R}\to X$.

Определение 3. *Растяжение* $D(f,t_0)$ отображения $f:\mathbb{R}\to X$ в t_0 определяется по формуле

$$D(f,t_0)=\limsup_{t\to t_0}\frac{\|f(t)-f(t_0)\|}{|t-t_0|}.$$

Для точки $z \in Z$ и $r > 0$ через $B(z,r)$ обозначим открытый шар в Z с центром в z радиуса r.

В случае $Z = \mathbb{R} \times X$ зафиксируем норму $\|(t,x)\| = \sqrt{t^2 + \|x\|^2}$, где $\|x\|$ — норма в X.

Через $S(z,r)$ обозначим границу $\partial B(z,r)$ шара $B(z,r)$. В дальнейшем полагаем $S = S(0_Z, 1)$ и $S^+ = S \cap (\mathbb{R}^+ \times X)$, $\overline{S^+} = S \cap (\overline{\mathbb{R}^+} \times X)$.

Через $G(f)$ обозначим график отображения $f : \mathbb{R} \to X$ и исследуем его контингенцию

$$\operatorname{Tan}_{G(f)}(t_0, f(t_0)) \tag{1}$$

для произвольного фиксированного $t_0 \in \mathbb{R}$. Проведя очевидные сдвиги, всегда можем предполагать в дальнейшем, что $t_0 = 0$ и $f(0) = 0_X$. Удобно сократить обозначения, а именно при указанных предположениях будем писать $\mathrm{T}_f(0)$ вместо (1).

Опишем главную цель работы. Известно, что контингенция каждого непустого подмножества векторного пространства, в частности, $\mathrm{T}_f(0) \subset \mathbb{R} \times X$, очевидно, связна. В этой статье будет исследована связность сечений $\mathrm{T}_f(0)$ гиперповерхностями, не проходящими через $(0, 0_X)$. Будет установлено, что такие сечения не обязаны быть связными. Для определенности в качестве гиперповерхности возьмем правую единичную полусферу S^+.

Лемма 4. *Пусть Z — вещественное нормированное пространство, M — непустое подмножество Z и 0_Z — точка сгущения M. Пусть $v \in \operatorname{Tan}_M(0_Z)$ — ненулевой вектор и C — открытый конус с вершиной 0_Z такой, что $v \in C$. Пусть $v = \lim\limits_{k\to\infty} \lambda_k z_k$, $\lambda_k > 0$, $z_k \in M$, $z_k \to 0_Z$. Тогда существует $K > 0$ такое, что $z_k \in C$ для всех $k \geq K$.*

Доказательство от противного тривиально и непосредственно следует из определения 1.

2. Случай $\dim X < \infty$

Сначала заметим, что если $\dim X < \infty$, то $\mathrm{T}_f(0)$ нетривиальна (т. е. отлична от $\{(0, 0_X)\}$) для любого отображения $f : \mathbb{R} \to X$, непрерывного в 0. Доказательство опустим ввиду простоты. Но в случае $\dim X = \infty$ возможно $\mathrm{T}_f(0) = \{(0, 0_X)\}$ [5].

Теорема 5. *Пусть $\dim X < \infty$ и $f : \mathbb{R} \to X$ — непрерывное отображение с конечным растяжением $D(f,0)$. Тогда $\mathrm{T}_f(0) \cap S^+$ компактно и связно.*

Доказательство. Поскольку $D(f,0) < \infty$ и $\dim X < \infty$, то $\mathrm{T}_f(0) \cap S^+$ — компактное подмножество S^+.

Будем доказывать от противного. Предположим, что $\mathrm{T}_f(0) \cap S^+$ не связно. Тогда существуют два непустых непересекающихся компактных (в $\mathbb{R} \times X$) множества F_1, F_2 таких, что $F_1 \cup F_2 = \mathrm{T}_f(0) \cap S^+$. Возьмем два непересекающихся множества $U_1 \subset S^+$ и $U_2 \subset S^+$ таких, что U_1, U_2 открыты в S^+, $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$.

Конусы $C(U_1)$ и $C(U_2)$ открытые, непересекающиеся и содержат конусы $C(F_1)$ и $C(F_2)$ соответственно.

Зафиксируем два вектора $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$. Ввиду определения 1 существуют последовательности $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t'_n > 0$, $t'_n \to 0$, $(t''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t''_n > 0$, $t''_n \to 0$, и последовательности $(\lambda'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda'_n > 0$, $(\lambda''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda''_n > 0$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} \lambda'_n(t'_n, f(t'_n)) = v_1 \quad \text{и} \quad \lim_{n\to\infty} \lambda''_n(t''_n, f(t''_n)) = v_2.$$

Поскольку $D(f,0)<\infty$, векторы v_1, v_2 имеют вид $v_1=(\tau',x')$, $\tau'>0$, и $v_2=(\tau'',x'')$, $\tau''>0$. Очевидно, что последовательности $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержат строго убывающие подпоследовательности $(t'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(t''_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что

$$0<t'_{n_{k+1}}<t''_{n_{k+1}}<t'_{n_k}<t''_{n_k}\quad \text{для всех } k\in\mathbb{N}.$$

Применяя лемму 4 к векторам v_1, v_2 и конусам $C(U_1)$, $C(U_2)$, заключаем, что существует натуральное K такое, что для всех $k\geq K$

$$(t'_{n_k},f(t'_{n_k}))\in C(U_1),\quad (t''_{n_k},f(t''_{n_k}))\in C(U_2). \tag{2}$$

Для каждого $k\geq K$ рассмотрим дугу $\Gamma_k=\{(t,f(t)):t\in[t'_{n_k},t''_{n_k}]\}$, которая является континуумом, поскольку f непрерывное. Так как $C(U_1)$, $C(U_2)$ открытые непересекающиеся, в силу (2) для каждого $k\geq K$ получим

$$\Gamma_k\setminus(C(U_1)\cup C(U_2))\neq\varnothing.$$

Для любого $k\geq K$ выберем точку $(t^*_k,f(t^*_k))\in\Gamma_k\setminus(C(U_1)\cup C(U_2))$ с $t^*_k\in[t'_{n_k},t''_{n_k}]$, тем самым $t^*_k\to 0$. Поскольку $D(f,0)<\infty$, последовательность $\left(\frac{f(t^*_k)}{t^*_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ ограничена, значит, содержит сходящуюся подпоследовательность $\left(\frac{f(t^*_{k_i})}{t^*_{k_i}}\right)_{i\in\mathbb{N}}$, предел которой обозначим через v. Отсюда

$$\lim_{i\to\infty}\frac{1}{t^*_{k_i}}(t^*_{k_i},f(t^*_{k_i}))=(1,v)\in\mathrm{T}_f(0).$$

Следовательно,

$$\frac{(1,v)}{\|(1,v)\|}=\frac{(1,v)}{\sqrt{1+\|v\|^2}}\in\mathrm{T}_f(0)\cap S^+=F_1\cup F_2.$$

Можем считать, что $\frac{(1,v)}{\sqrt{1+\|v\|^2}}\in F_1$. Поскольку $F_1\subset U_1$, в силу леммы 4 существует натуральное число N такое, что $(t^*_{k_i},f(t^*_{k_i}))\subset C(U_1)$ для всех $i\geq N$, а это противоречит выбору точки $(t^*_k,f(t^*_k))$. Тем самым $\mathrm{T}_f(0)\cap S^+$ связно, что и требовалось доказать. $\square$

Следующий пример показывает, что предположение $D(f,0)<\infty$, вообще говоря, не может быть опущено.

Пример 6. Рассмотрим $f(t)=\sqrt[3]{t}$, $t\in\mathbb{R}$. Имеем $D(f,0)=\infty$, $\mathrm{T}_f(0)=\{\xi(0,1):\xi\in\mathbb{R}\}$ и $\mathrm{T}_f(0)\cap S^+=\varnothing$. Но $\mathrm{T}_f(0)\cap\overline{S^+}=\{(0,-1),(0,1)\}$ несвязно.

Тем не менее покажем, что если f рассматривается только для $t\geq 0$, то предположение $D(f,0)<\infty$ может быть опущено.

Лемма 7. *Пусть* $\dim X<\infty$, $C\subset\mathbb{R}\times X$ *— открытый конус с вершиной* $0_Z=(0,0_X)$ *такой, что* $C\cap(\overline{\mathbb{R}^+}\times X)\neq\varnothing$. *Предположим, что* 0_Z *— точка сгущения* $E\subset\mathbb{R}^+\times X$ *и* $E\cap C=\varnothing$. *Тогда* $\mathrm{Tan}_E(0_Z)$ *нетривиальна и не пересекается с* C.

Доказательство. По предположению существует последовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n\in E$, $z_n\to 0_Z$, $z_n\neq 0_Z$. Рассмотрим последовательность единичных векторов $\left(\frac{z_n}{\|z_n\|}\right)_{n\in\mathbb{N}}$. Поскольку единичная сфера S компактна, существует подпоследовательность $\left(\frac{z_{n_k}}{\|z_{n_k}\|}\right)_{k\in\mathbb{N}}$, сходящаяся к некоторому $v\in S$. Очевидно, что

$v \in \mathrm{Tan}_E(0_Z)$. Действительно, достаточно положить $\lambda_k = \frac{1}{\|z_{n_k}\|}$ и применить определение 1.

Докажем от противного, что $\mathrm{Tan}_E(0_Z) \cap C = \varnothing$. Допустим, что существует $w \in \mathrm{Tan}_E(0_Z) \cap C$. Предположим, что $\|w\| = 1$. Поскольку C — открытый конус, найдется шар $B(w,r) \subset C$. Тогда $\mathbb{R}^+ B(w,r) \subset C$. В силу определения 1 применительно к $w \in \mathrm{Tan}_E(0_Z)$ существует последовательность $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $z_n \in E$, $z_n \to 0_Z$, $\frac{z_n}{\|z_n\|} \to w$. По лемме 4 найдется натуральное K такое, что $z_n \in \mathbb{R}^+ B(w,r) \subset C$ для каждого $k \geq K$; противоречие с предположением $E \cap C = \varnothing$. $\square$

Следующее утверждение аналогично теореме 5, но теперь допускается возможность бесконечного растяжения $D(f,0)$.

Теорема 8. *Пусть X — вещественное нормированное пространство конечной размерности и $f : [0,\infty) \to X$ непрерывное. Тогда $\mathrm{T}_f(0) \cap \overline{S^+}$ компактно и связно.*

Доказательство. Очевидно, что $\mathrm{T}_f(0) \cap \overline{S^+}$ — компактное подмножество $\overline{S^+}$. За исключением некоторых деталей, теорема доказывается аналогично теореме 5, тем не менее для полноты изложения приведем доказательство целиком.

Предположим, что $\mathrm{T}_f(0) \cap \overline{S^+}$ несвязно. Тогда существуют два непустых непересекающихся замкнутых множества F_1, F_2 таких, что $F_1 \cup F_2 = \mathrm{T}_f(0) \cap \overline{S^+}$. Возьмем любые два непересекающихся множества $U_1 \subset S$ и $U_2 \subset S$ таких, что U_1, U_2 открыты в S, $F_1 \subset U_1$, $F_2 \subset U_2$. Легко заметить, что конусы $C(U_1)$, $C(U_2)$ открыты в $\mathbb{R} \times X$, не пересекаются и содержат конусы $C(F_1)$ и $C(F_2)$ соответственно.

Зафиксируем два вектора $v_1 \in F_1$, $v_2 \in F_2$. С учетом того, что f определено для $t \geq 0$, ввиду определения 1 существуют последовательности $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t'_n > 0$, $t'_n \to 0$, $(t''_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t''_n > 0$, $t''_n \to 0$, и последовательности $(\lambda'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda'_n > 0$, $(\lambda''_n)_{\in\mathbb{N}}$, $\lambda''_n > 0$, такие, что $\lambda'_n(t'_n, f(t'_n)) \to v_1$, $\lambda''_n(t''_n, f(t''_n)) \to v_2$ при $n \to \infty$. В отличие от теоремы 5 векторы v_1, v_2, вообще говоря, имеют вид

$$v_1 = (\tau', x'),\ \tau' \geq 0; \quad v_2 = (\tau'', x''),\ \tau'' \geq 0.$$

Следовательно, их первые компоненты τ', τ'' могут быть равны нулю.

Очевидно, последовательности $(t'_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(t''_n)_{n\in\mathbb{N}}$ содержат строго убывающие подпоследовательности $(t'_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$, $(t''_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что для любого $k \in \mathbb{N}$

$$0 < t'_{n_{k+1}} < t''_{n_{k+1}} < t'_{n_k} < t''_{n_k}.$$

Применяя лемму 4 к векторам v_1, v_2 и конусам $C(U_1)$, $C(U_2)$, заключаем, что существует натуральное K такое, что для любого $k \geq K$

$$(t'_{n_k}, f(t'_{n_k})) \in C(U_1) \ \text{ и } \ (t''_{n_k}, f(t''_{n_k})) \in C(U_2). \tag{3}$$

Для каждого $k \geq K$ рассмотрим дугу $\Gamma_k = \{(t, f(t)) : t \in [t'_{n_k}, t''_{n_k}]\}$. Поскольку $C(U_1)$, $C(U_2)$ открыты и не пересекаются, ввиду (3) для каждого $k \geq K$ имеем $\Gamma_k \setminus (C(U_1) \cup C(U_2)) \neq \varnothing$. Положим

$$E = \bigcup_{k=K}^{\infty} \Gamma_k \setminus (C(U_1) \cup C(U_2)).$$

Ясно, что множество E содержится в $\mathbb{R}^+ \times X$ и 0_Z — его точка сгущения (вспомним выбор точек $(t^*_k, f(t^*_k))$ в доказательстве теоремы 5). Значит, E удовлетворяет предположениям леммы 7. Следовательно, $\mathrm{Tan}_E(0_Z) \subset \mathrm{T}_f(0)$ непусто и не пересекается с $C(U_1) \cup C(U_2)$; противоречие. Тем самым $\mathrm{T}_f(0) \cap \overline{S^+}$ связно. $\square$

В следующем разделе покажем, что теорема 5 может быть неверна, если $\dim X = \infty$.

3. Случай $\dim X = \infty$, $F \subset S^+$ компактно

В этом разделе продолжим рассматривать вещественное нормированное пространство X бесконечной размерности. Нас интересует следующий вопрос. *Пусть задано непустое замкнутое (в $\mathbb{R} \times X$) множество $F \subset S^+$. Существует ли липшицево отображение $f : \mathbb{R} \to X$ такое, что $\mathrm{T}_f(0) \cap S^+ = F$?*

В случае компактного F ответ будет утвердительным.

Возьмем последовательность $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ единичных векторов в X, не содержащую сходящихся подпоследовательностей.

Лемма 9. *Пусть X — вещественное нормированное пространство бесконечной размерности и $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность единичных векторов в X, не содержащая сходящихся подпоследовательностей. Пусть $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $y_n \in X$, — сходящаяся последовательность, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y$, $y \in X$. Предположим, что найдутся две ограниченные последовательности вещественных чисел $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что существует $\lim\limits_{n\to\infty}(\alpha_n y_n + \beta_n e_n) = v$. Тогда*

(i) $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$;

(ii) $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n y_n = v$.

Доказательство. Поскольку последовательности $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ограничены, существуют сходящиеся подпоследовательности $(\alpha_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$, $(\beta_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$. Пусть $\alpha = \lim\limits_{i\to\infty} \alpha_{n_{k_i}}$, $\beta = \lim\limits_{i\to\infty} \beta_{n_{k_i}}$. Тогда

$$\lim_{i\to\infty}(\alpha_{n_{k_i}} y_{n_{k_i}} + \beta_{n_{k_i}} e_{n_{k_i}}) = \alpha y + \lim_{i\to\infty} \beta_{n_{k_i}} e_{n_{k_i}} = v,$$

откуда $\lim\limits_{i\to\infty} \beta_{n_{k_i}} = \beta = 0$, иначе последовательность $(e_{n_{k_i}})_{i\in\mathbb{N}}$ сходящаяся, что невозможно.

Таким образом, все сходящиеся подпоследовательности ограниченной последовательности $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ имеют одинаковый предел 0. Отсюда $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_n = 0$, т. е. получаем утверждение (i), из которого следует (ii). $\square$

Замечание 10. В случае $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y \neq 0_X$ сразу заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$ существует, значит, $v = \alpha y$. Но если $y = 0_X$, то последовательность $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ не должна быть сходящейся, в чем легко убедиться на простых примерах.

Аналогичное утверждение в случае $y_n = y$, $n \in \mathbb{N}$, доказано в лемме 2.2 из [6], существенной там, но бесполезной в данной статье.

Первый основной результат представляет следующая

Теорема 11. *Пусть X — вещественное нормированное бесконечномерное пространство. Тогда для каждого компактного в $\mathbb{R} \times X$ множества $F \subset S^+$ существует липшицево отображение $f : \mathbb{R} \to X$ такое, что*

$$\mathrm{T}_f(0) \cap S^+ = F. \tag{4}$$

Доказательство. Сначала ограничимся рассмотрением бесконечного F. Случай конечного F аналогичен, но более прост и будет рассмотрен в самом конце этого раздела.

Как и в лемме 9, возьмем последовательность $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $e_n \in X$, единичных векторов, не содержащую сходящихся подпоследовательностей. По техническим причинам будет удобнее проводить доказательство, заменяя S^+ «вертикальной» гиперплоскостью $X_0 = \{1\} \times X$. А именно, определим проекцию $H : S^+ \to X_0$, полагая

$$H(t,x) = \left(1, \frac{x}{t}\right).$$

Очевидно, что H — гомеоморфизм (даже C^∞-диффеоморфизм) S^+ на X_0.

Так как F компактно, оно содержит плотное счетное множество Y. Положим $Y_0 = H(Y)$ и $F_0 = H(F)$. Представим Y_0 в виде последовательности:

$$Y_0 = \{(1,y_1),(1,y_2),\dots,(1,y_n),\dots\}, \quad \text{где } y_n \in X,\ n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Поскольку существует биекция $\mathbb{N}\times\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, очевидно, что $\mathbb{N}$ может быть записано в виде

$$\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} N_k,$$

где N_k бесконечно и $N_{k'} \cap N_{k''} = \varnothing$, $k' \neq k''$. Положим $A_k = 2N_k$, $k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$2\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{тем самым } \mathbb{N} = (2\mathbb{N} - 1) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k. \tag{6}$$

Построим требуемое липшицево отображение $f : \mathbb{R} \to X$. Достаточно определить f для $t \in [0,\infty)$ и положить $f(t) = -f(-t)$ для $t < 0$.

Зафиксируем число $c > 1$. Прежде всего определим f в каждой точке последовательности $(c^{-n})_{n\in\mathbb{N}}$ следующим образом:

$$f(c^{-n}) = \begin{cases} c^{-2m} y_k, & \text{если } n = 2m,\ m \in N_k,\ k \in \mathbb{N}; \\ c^{-2m+1} e_m, & \text{если } n = 2m-1,\ m \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{7}$$

Обратим внимание на то, что согласно (7) каждому элементу множества $A_k = 2N_k$ соответствует некоторый элемент y_k, т. е. элемент с тем же индексом k.

Положим $f(0) = 0_X$ и продолжим отображение f аффинно на каждый отрезок $[c^{-n-1}, c^{-n}]$, $n \in \mathbb{N}$, таким образом, что продолжение f принимает значения, определенные выше в концевых точках этих интервалов. На $[c^{-1},\infty)$ положим f равным константе: $f(c^{-1}) = c^{-1}e_1$. Поскольку Y_0 ограничено и $c^{-n} \to 0$, ясно, что таким образом определенное отображение f непрерывно на $[0,\infty)$. Кроме того, f липшицево. Действительно, считая, что $2m \in A_k$, согласно определению имеем

$$f(t) = \frac{ct - c^{-2m}}{c-1} y_k + \frac{c^{-2m} - t}{c-1} e_{m+1}, \quad \text{если } t \in [c^{-2m-1}, c^{-2m}], \tag{8}$$

$$f(t) = \frac{c^{-2m+1} - t}{c-1} y_k + \frac{ct - c^{-2m+1}}{c-1} e_m, \quad \text{если } t \in [c^{-2m}, c^{-2m+1}]. \tag{9}$$

Вычисляя угловые коэффициенты (8) и (9), получаем, что f липшицево с постоянной

$$L = \frac{c}{c-1}(\sup\{\|y_k\| : (1,y_k) \in Y_0\} + 1) = \frac{c}{c-1}(\sup\{\|y\| : (1,y) \in F_0\} + 1) < \infty.$$

Осталось проверить, что для такого f верно (4). Пусть $(\tau, w) \in \mathrm{T}_f(0)$ и $\tau \geq 0$. В силу определения 1 существуют последовательности $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$, и $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n > 0$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n t_n, \lambda_n f(t_n)) = (\tau, w). \tag{10}$$

Ясно, что каждое t_n попадает либо в отрезок типа $[c^{-2m-1}, c^{-2m}]$, либо типа $[c^{-2m}, c^{-2m+1}]$. Рассмотрим два случая.

(i) Существуют подпоследовательности $(n_s)_{s\in\mathbb{N}}$ и $(k_s)_{s\in\mathbb{N}}$ такие, что $2n_s \in A_{k_s}$ для любого $s \in \mathbb{N}$.

(ii) Существуют натуральное число k_0 и подпоследовательность $(n_s)_{s\in\mathbb{N}}$ такие, что $n_s \in N_{k_0}$ для всех $s \in \mathbb{N}$.

Заметим, что случаи (i), (ii) не взаимоисключающие.

Без потери общности можем считать, что $t_{n_s} \in [c^{-2m_{n_s}-1}, c^{-2m_{n_s}}]$ для всех $s \in \mathbb{N}$ (случай отрезков второго типа разбирается аналогично), где $(m_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$ — некоторая строго возрастающая последовательность. Такая последовательность, очевидно, существует, поскольку $t_n \to 0$.

Начнем со случая (i). В силу (10) имеем

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_{n_s} t_{n_s} = \tau, \tag{11}$$

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_{n_s} f(t_{n_s}) = \lim_{s\to\infty} \left(\lambda_{n_s} \frac{ct_{n_s} - c^{-2m_{n_s}}}{c-1} y_{k_s} + \lambda_{n_s} \frac{c^{-2m_{n_s}} - t_{n_s}}{c-1} e_{m_{n_s}+1} \right) = w. \tag{12}$$

Напомним, что F_0 — компактное множество. Следовательно, $(y_{k_s})_{s\in\mathbb{N}}$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Без потери общности можем предположить, что $(y_{k_s})_{s\in\mathbb{N}}$ сама сходится к некоторому y такому, что $(1, y) \in F_0$. Применяя лемму 9, получим

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_{n_s} \frac{c^{-2m_{n_s}} - t_{n_s}}{c-1} = 0. \tag{13}$$

Тогда из (11) и (13) следует, что $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda_{n_s} c^{-2m_{n_s}} = \tau$. В силу (12)

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_{n_s} \frac{ct_{n_s} - c^{-2m_{n_s}}}{c-1} y_{k_s} = \frac{c\tau - \tau}{c-1} \lim_{s\to\infty} y_{k_s} = \tau y = w.$$

Ввиду (10) если $(\tau, w) \in \mathrm{T}_f(0)$ и (i) верно, то $(\tau, w) = (\tau, \tau y) = \tau(1, y)$.

Теперь рассмотрим случай (ii). Тогда вместо (12) имеем

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_{n_s} f(t_{n_s}) = \lim_{s\to\infty} \left(\lambda_{n_s} \frac{ct_{n_s} - c^{-2m_{n_s}}}{c-1} y_{k_0} + \lambda_{n_s} \frac{c^{-2m_{n_s}} - t_{n_s}}{c-1} e_{m_{n_s}+1} \right) = w, \tag{14}$$

где y_{k_0} соответствует N_{k_0} (см. (7)), откуда опять в силу леммы 9 получаем тот же результат: $(\tau, w) = (\tau, \tau y_{k_0}) = \tau(1, y_{k_0})$.

Таким образом, мы показали, что

$$\mathrm{T}_f(0) \subset \bigcup_{(1,y)\in F_0} \{\tau(1, y) : \tau \in [0, \infty)\} = \overline{\mathbb{R}^+} F_0. \tag{15}$$

Чтобы доказать обратное включение, возьмем произвольно $(1, y_k) \in Y_0$ и рассмотрим только индексы $2m \in A_k$. Положим $t_m = c^{-2m}$ и $\lambda_m = c^{2m}$ для всех $2m \in A_k$. Согласно определению f имеем $f(t_m) = c^{-2m} y_k$, что влечет

$$\lambda_m t_m = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_m f(t_m) = c^{2m} c^{-2m} y_k = y_k$$

для всех $m \in N_k$. Отсюда $\lambda_m(t_m, f(t_m)) \to (1, y_k) \in \mathrm{T}_f(0)$. Следовательно, $Y_0 \subset \mathrm{T}_f(0)$. Поскольку $\overline{Y_0} = F_0$ и $\mathrm{T}_f(0)$ замкнута, получаем $F_0 \subset \mathrm{T}_f(0)$. Из того, что $\mathrm{T}_f(0)$ — конус, следует

$$\overline{\mathbb{R}^+} F_0 = \bigcup_{(1,y)\in F_0} \{\tau(1, y) : \tau \in [0, \infty)\} \subset \mathrm{T}_f(0).$$

Отсюда ввиду (15) $\mathrm{T}_f(0) = \overline{\mathbb{R}^+}F_0$ и, стало быть, $\mathrm{T}_f(0) \cap X_0 = F_0 = H(F)$. С учетом построения H и того, что $\mathrm{T}_f(0)$ — конус, легко выводим

$$\mathrm{T}_f(0) \cap S^+ = \mathrm{T}_f(0) \cap H^{-1}(X_0) = H^{-1}(\mathrm{T}_f(0) \cap X_0) = F,$$

что и требовалось показать в случае бесконечного F.

Рассмотрим случай конечного $F = \{x_1, \dots, x_p\}$. В этом случае доказательство во многом аналогично предыдущему, хотя есть некоторые технические отличия. Используем разложение (6):

$$2\mathbb{N} = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k, \quad \text{тем самым } \mathbb{N} = (2\mathbb{N} - 1) \cup \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k.$$

Положим $Y = F$, $Y_0 = H(Y) = H(F) = F_0$. Свяжем с Y_0 периодическую последовательность, напоминающую (5):

$$\{(1, y_1), (1, y_2), \dots, (1, y_n), \dots\}, \tag{16}$$

где для $n = sp + r$, $s \in \mathbb{N}$, $1 \leq r < p$, положим[1)]

$$y_n = \begin{cases} x_r, & \text{если } 1 \leq r < p, \\ x_p, & \text{если } r = p. \end{cases} \tag{17}$$

Далее, как и в случае бесконечного F, построим требуемое липшицево отображение $f : \mathbb{R} \to X$ согласно (7), где в этот раз y_k определены соотношениями (16), (17). Дальнейшие рассуждения такие же и более простые по сравнению со случаем бесконечного F, поэтому опускаем детали, чтобы избежать повторений. $\square$

Замечание 12. Сравнивая теорему 11 со случаем конечной размерности (теорема 5), заметим, что если F состоит, скажем, из двух точек $F = \{a, b\}$, то $\mathrm{T}_f(0) \cap S^+ = \{a, b\}$, очевидно, несвязно.

4. Случай, когда X — бесконечномерное евклидово пространство

Теорема 11 позволяет представить любое компактное $F \subset S^+$ в виде (4) с соответствующе выбранным липшицевым f.

Цель этого раздела — показать, что в общем случае пересечение $\mathrm{T}_f(0) \cap S^+ = F$ не должно быть компактным, даже если f липшицево.

Будем рассматривать вещественное евклидово пространство $X = (X, \langle\,,\rangle)$ бесконечной размерности, где $\langle\,,\rangle$ — скалярное произведение.

Лемма 13. *Пусть X — бесконечномерное вещественное евклидово пространство и $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — счетная ортонормированная система. Предположим, что найдутся две подпоследовательности $(e_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$, $(e_{k_s})_{s\in\mathbb{N}}$ и две последовательности вещественных чисел $(\alpha_s)_{s\in\mathbb{N}}$ и $(\beta_s)_{s\in\mathbb{N}}$ такие, что существует предел*

$$\lim_{s\to\infty} (\alpha_s e_{n_s} + \beta_s e_{k_s}) = w. \tag{18}$$

Тогда $w = 0_X$.

Доказательство. Рассмотрим два случая.

[1)] Здесь мы предполагаем $p > 1$; случай $p = 1$ почти тривиален по сравнению со случаем бесконечного F.

1. Существует возрастающая последовательность $(s_i)_{i\in\mathbb{N}}$ такая, что $n_{s_i} \neq k_{s_i}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Поскольку семейство $\{e_n : n \in \mathbb{N}\}$ ортонормировано, из (18) получим $\langle \alpha_{s_i} e_{n_{s_i}} + \beta_{s_i} e_{k_{s_i}}, e_{n_{s_i}} \rangle = \alpha_{s_i} \to 0$. Аналогично скалярное умножение на $e_{k_{s_i}}$ дает $\beta_{s_i} \to 0$. Тем самым $w = 0_X$.

2. Если предположения предыдущего пункта не выполнены, то $n_s = k_s$ для всех достаточно больших s. Тогда в силу (18)

$$\lim_{s\to\infty} (\alpha_s e_{n_s} + \beta_s e_{k_s}) = \lim_{s\to\infty} (\alpha_s + \beta_s) e_{n_s} = w,$$

откуда $w = 0_X$, что завершает доказательство. $\square$

Замечание 14. Заметим, что в предположениях леммы 13 либо $\alpha_s \to 0$, $\beta_s \to 0$, либо $\alpha_s + \beta_s \to 0$.

Теорема 15. *Пусть X — вещественное евклидово бесконечномерное пространство. Тогда для каждой счетной ортонормированной системы $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$, содержащейся в X, существует липшицево отображение $f : \mathbb{R} \to X$ такое, что*

$$\mathrm{T}_f(0) \cap S^+ = F := \{(1/\sqrt{2}, e_n/\sqrt{2}) : n \in \mathbb{N}\}. \tag{19}$$

Доказательство. Очевидно, что множество F, определенное в (19), замкнуто, но не компактно. Построим липшицево отображение $f : [0, \infty) \to X$ таким же способом, как и в доказательстве теоремы 11, полагая $y_k = e_k$, т. е. $Y_0 = \{(1, e_n) : n \in \mathbb{N}\}$. Сохраним обозначения и рассуждения теоремы 11. В частности, получим следующие аналоги соотношений (8), (9), где y_k заменены на e_k при $2m \in A_k$:

$$f(t) = \frac{ct - c^{-2m}}{c-1} e_k + \frac{c^{-2m} - t}{c-1} e_{m+1}, \quad \text{если } t \in [c^{-2m-1}, c^{-2m}],$$

$$f(t) = \frac{c^{-2m+1} - t}{c-1} e_k + \frac{ct - c^{-2m+1}}{c-1} e_m, \quad \text{если } t \in [c^{-2m}, c^{-2m+1}].$$

Элементарными вычислениями получим липшицеву постоянную $L = \frac{2c}{c-1}$.

Рассмотрим вектор $(\tau, w) \in \mathrm{T}_f(0)$ и $\tau \geq 0$. В силу определения 1 существуют последовательности $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n > 0$, $t_n \to 0$, и $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $\lambda_n > 0$, такие, что

$$\lim_{n\to\infty} (\lambda_n t_n, \lambda_n f(t_n)) = (\tau, w). \tag{20}$$

Как и при доказательстве теоремы 11, без потери общности можем предположить, что t_n принадлежит отрезкам типа $[c^{-2m-1}, c^{-2m}]$ для всех $n \in \mathbb{N}$, т. е.

$$\forall n \in \mathbb{N}\, \exists m_n \in \mathbb{N} \quad t_n \in [c^{-2m_n-1}, c^{-2m_n}]. \tag{21}$$

Надо рассмотреть два случая, совпадающих со случаями (i), (ii) из доказательства теоремы 11.

(j) Существуют последовательности $(n_s)_{s\in\mathbb{N}}$ и $(k_s)_{s\in\mathbb{N}}$ из $\mathbb{N}$ такие, что $2n_s \in A_{k_s}$ для всех $s \in \mathbb{N}$.

(jj) Существуют натуральное число k_0 и последовательность $(n_s)_{s\in\mathbb{N}}$ такие, что $n_s \in N_{k_0}$ для любого $s \in \mathbb{N}$.

Поскольку $t_n \to 0$, из (21) следует, что найдется возрастающая последовательность $(m_{n_s})_{s\in\mathbb{N}}$ такая, что $t_{n_s} \in [c^{-2m_{n_s}-1}, c^{-2m_{n_s}}]$ для всех $s \in \mathbb{N}$.

Сначала рассмотрим случай (j). В силу (20) имеем $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda_{n_s} t_{n_s} = \tau$ и

$$\lim_{s\to\infty} \lambda_{n_s} f(t_{n_s}) = \lim_{s\to\infty} \left(\lambda_{n_s} \frac{ct_{n_s} - c^{-2m_{n_s}}}{c-1} e_{k_s} + \lambda_{n_s} \frac{c^{-2m_{n_s}} - t_{n_s}}{c-1} e_{m_{n_s}+1} \right) = w. \tag{22}$$

Применяя лемму 13, получаем $w = 0_X$. Из (22) и замечания 14 имеем

$$\lim_{s\to\infty} \left(\lambda_{n_s} \frac{ct_{n_s} - c^{-2m_{n_s}}}{c-1} + \lambda_{n_s} \frac{c^{-2m_{n_s}} - t_{n_s}}{c-1} \right) = 0.$$

Элементарными вычислениями получим $\lim\limits_{s\to\infty} \lambda_{n_s} t_{n_s} = 0$, откуда $\tau = 0$. Тем самым $(\tau, w) = (0, 0_X) \in \mathrm{T}_f(0)$ (ср. со случаем (i), соответствующим случаю (j), из доказательства теоремы 11).

Рассмотрим случай (jj). Заменим (14) на

$$\lambda_{n_s} f(t_{n_s}) = \lambda_{n_s} \frac{ct_{n_s} - c^{-2m_{n_s}}}{c-1} e_{k_0} + \lambda_{n_s} \frac{c^{-2m_{n_s}} - t_{n_s}}{c-1} e_{m_{n_s}+1} \to w.$$

Применяя лемму 9, получаем $\lambda_{n_s} \frac{c^{-2m_{n_s}} - t_{n_s}}{c-1} \to 0$. Стало быть, $\lambda_{n_s} c^{-2m_{n_s}} \to \tau$, откуда

$$\lambda_{n_s} \frac{ct_{n_s} - c^{-2m_{n_s}}}{c-1} \to \frac{c\tau - \tau}{c-1} = \tau,$$

что влечет $w = \tau e_{k_0}$. Таким образом, можем заключить, что если $(\tau, w) \in \mathrm{T}_f(0)$, $\tau \geq 0$, то $(\tau, w) = \tau(1, e_{k_0})$. Следовательно,

$$\mathrm{T}_f(0) \subset \bigcup_{(1,e_k)\in Y_0} \{\tau(1, e_k) : \tau \in [0, \infty)\}.$$

Чтобы доказать обратное включение, возьмем произвольно $(1, e_k) \in Y_0$. Рассмотрим только индексы $2m \in A_k$. Положим $t_m = c^{-2m}$ и $\lambda_m = c^{2m}$ для $2m \in A_k$. Согласно определению f имеем $f(t_m) = c^{-2m} e_k$, что влечет

$$\lambda_m t_m = 1 \quad \text{и} \quad \lambda_m f(t_m) = c^{2m} c^{-2m} e_k = e_k$$

для всех $m \in N_k$. Отсюда $\lambda_m(t_m, f(t_m)) \to (1, e_k)$, где $(1, e_k) \in \mathrm{T}_f(0)$. Следовательно,

$$\bigcup_{(1,e_k)\in Y_0} \{\tau(1, e_k) : \tau \in [0, \infty)\} \subset \mathrm{T}_f(0).$$

Это означает, что $\mathrm{T}_f(0) \cap S^+ = F$. $\square$

5. Случай card $F > \mathfrak{c}$

Этот короткий раздел можно рассматривать как простое дополнение к предыдущим результатам. Здесь через $\mathfrak{c}$ обозначим мощность континуума. В разд. 4 доказано соотношение (4) для некоторого специального замкнутого некомпактного F. В этом разделе покажем, что для произвольного замкнутого некомпактного F соотношение (4) в общем случае неверно.

Теорема 16. *Пусть X — нормированное пространство. Тогда для каждого замкнутого множества $F \subset S^+$,* card $F > \mathfrak{c}$, *соотношение*

$$\mathrm{T}_f(0) \cap S^+ = F \tag{23}$$

не выполнено для любого липшицева $f : \mathbb{R} \to X$.

Доказательство. Сразу заметим, что ввиду предположения $\operatorname{card} F > \mathfrak{c}$ множество F не компактно.

Пусть $f : \mathbb{R} \to X$ — липшицева функция, $f(0) = 0_X$ и $\mathrm{T}_f(0) \neq \{(0, 0_X)\}$, т. е. контингенция нетривиальна (если $\mathrm{T}_f(0) = \{(0, 0_X)\}$, то, очевидно, (23) не выполнено, поскольку левая часть — пустое множество). Пусть $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность положительных чисел, $t_n \to 0$, такая, что существует предел

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n)}{t_n} \in X.$$

Применяя определение 1, можем записать $(1, v) \in \mathrm{T}_f(0) \cap X_0$ (напомним, что $X_0 = \{1\} \times X$), если и только если существуют последовательности положительных чисел $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $t_n \to 0$, и $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ такие, что $\lambda_n t_n \to 1$ и $\lambda_n f(t_n) \to v$. Отсюда сразу следует, что если $(1, v) \in \mathrm{T}_f(0) \cap X_0$, то

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(t_n)}{t_n} = v. \tag{24}$$

Можно назвать всякий предел вида (24) производным значением f в 0. Обозначим через Δ множество всех таких значений. Следует заметить, что Δ может быть пустым, поскольку в общем случае пределы (24) могут не существовать даже для липшицевых отображений (в то же время контингенция $\mathrm{T}_f(0)$ всегда существует, хотя может быть тривиальна).

Поскольку $\operatorname{card} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \mathfrak{c}$, нетрудно получить, что $\operatorname{card} \Delta \leq \mathfrak{c}$, откуда $\operatorname{card}(\mathrm{T}_f(0) \cap X_0) \leq \mathfrak{c}$. Следовательно,

$$\mathrm{T}_f(0) \cap S^+ = H^{-1}(\mathrm{T}_f(0) \cap X_0) \text{ имеет мощность } \leq \mathfrak{c}, \tag{25}$$

где отображение H определено в разд. 3.

Поскольку по предположению $\operatorname{card} F > \mathfrak{c}$, в силу (25) заключаем, что (23) не выполнено. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Schwartz L.* Analyse mathématique. Paris: Hermann, 1967. V. 1.
2. *Bouligand G.* Introduction à la géométrie infinitésimale directe. Paris: Librairie Vuibert, 1932.
3. *Saks S.* Theory of the integral. Warszawa; Lwów; New York: Stechert, 1937.
4. *Federer H.* Geometric measure theory. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1969.
5. *Turowska M.* A geometric condition for differentiability // Tatra Mt. Math. Publ. 2004. V. 28, N 2. P. 179–186.
6. *Пономарев С. П., Туровска М.* Липшицевы отображения, контингенции и дифференцируемость // Сиб. мат. журн. 2007. Т. 48, № 4. С. 837–847.

Статья поступила 18 ноября 2010 г.

Пономарев Станислав Петрович (Stanislav Ponomarev),
Туровска Малгожата (Małgorzata Turowska)
Institute of Mathematics, Pomeranian Academy in Słupsk
Arciszewskiego 22b, 76-200 Słupsk, Poland
stapon@apsl.edu.pl, p35st9@poczta.onet.pl, turowska@apsl.edu.pl