Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 517.938

УПРАВЛЯЕМОСТЬ И БЫСТРОДЕЙСТВИЕ ПРОЦЕССА, ОПИСЫВАЕМОГО ПАРАБОЛИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЕМ С ОГРАНИЧЕННЫМ УПРАВЛЕНИЕМ

С. А. Айсагалиев, А. П. Белогуров

Аннотация. Рассматриваются вопросы управляемости и быстродействия процессов, описываемых параболическим уравнением с распределенным управлением из заданного множества. Предлагаются методы решения указанных задач путем построения минимизирующих последовательностей.

Ключевые слова: управляемость, быстродействие, интегральное уравнение, градиент функционала, проекция точки на множество, выпуклый функционал, минимизирующие последовательности, слабо предельная точка, управление с минимальной нормой, оптимальное быстродействие.

Постановка задачи. Рассмотрим управляемый процесс, описываемый внутри области $Q = \{0 \le x \le 1,\ 0 \le t \le T\}$ следующим уравнением:

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + \mu(x,t) + v(x,t), \tag{1}$$

удовлетворяющий на границе Q начальному и граничному условиям

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(0,t)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u(1,t)}{\partial x} + \alpha u(1,t) = 0. \tag{2}$$

Здесь $\mu(x,t) \in L_2(Q)$, $u(x,t) = u(x,t,v) \in H^{1,0}(Q) = \{u(x,t) \in L_2(Q), u_x(x,t) \in L_2(Q)\}$, следы $u(x,\cdot) \in L_2(I_2)$ непрерывны в метрике $L_2(I_2)$, $I_2 = \{t \in R^1 \mid 0 \le t \le T\}$ при всех $x \in I_1 = \{x \in R^1 \mid 0 \le x \le 1\}$; следы $u(\cdot,t) \in L_2(I_1)$ непрерывны в метрике $L_2(I_1)$ при всех $t \in [0,T]$; след $u(\cdot,t)$ при $t = 0$ совпадает с заданной функцией $\varphi(x) \in L_2(I_1)$, а при $t = T$ совпадает с функцией $\psi(x) \in L_2(I_1)$; α — заданное число; $v(x,t)$ — управление, причем

$$v(x,t) \in V = \left\{ v(x,t) \in L_2(Q) \mid \iint_Q |v(x,t)|^2\, dxdt \le r^2 \right\}. \tag{3}$$

Ставятся следующие задачи.

Задача 1 (задача управляемости). *Найти управление $v(x,t) \in V$, которое переводит систему (1), (2) из начального состояния $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in I_1$, в заданное конечное состояние $u(x,T) = \psi(x)$, $x \in I_1$, в момент времени T, где $\psi(x) \in L_2(I_1)$ — заданная функция.*

Задача 2 (задача управляемости с минимальной нормой). *Найти управление $v(x,t) \in L_2(Q)$ с минимальной нормой, которое переводит систему* (1), (2) *из начального состояния $u(x,0) = \varphi(x)$ в состояние $u(x,T) = \psi(x)$.*

Задача 3 (задача быстродействия). *Пусть $v(x,t) \in V$, $u(x,T) = \psi(x)$, момент времени T не фиксирован. Найти управление $v(x,t) \in V$, которое за кратчайшее время T переводит систему* (1), (2) *из начального состояния $u(x,0) = \varphi(x)$, $x \in I_1$, в желаемое конечное состояние $u(x,T) = \psi(x)$, $x \in I_1$.*

Задача управляемости с учетом ограниченности ресурсов управления (3) является основной задачей. Решения задач 2, 3 могут быть получены из метода решения задачи 1. Задачи управляемости для процессов, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, исследованы в [1–3], задача управляемости с минимальной нормой на основе проблемы моментов решена в [4, 5]. Задача 1 не может быть решена методами, предложенными в [4, 5]. В отличие от задачи управляемости с минимальной нормой указанная задача не всегда имеет решения. В настоящей статье предлагается метод решения задач 1–3 на основе построения общего решения одного класса интегрального уравнения Фредгольма первого рода с последующим сведением исходной задачи к некоторой оптимизационной задаче. Такой подход позволяет получить решения указанных задач путем построения минимизирующих последовательностей без привлечения спектральной теории, как в [4, 5].

Интегральное уравнение. Решение уравнения (1) с условиями (2) через функцию источника можно представить в виде

$$u(x,t) = \int_0^1 G(x,\xi,t)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^t \int_0^1 G(x,\xi,t-\tau)[\mu(\xi,\tau) + v(\xi,\tau)]\,d\xi d\tau, \quad (4)$$

где

$$G(x,\xi,t) = \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda_n^2 a^2 t} \cdot \frac{\cos\lambda_n x \cos\lambda_n \xi}{\omega_n^2},$$

λ_n — положительные корни уравнения $\lambda tg\lambda = \alpha$,

$$\omega_n^2 = \int_0^1 \cos^2 \lambda_n x\,dx = \frac{\lambda_n^2 + \alpha^2 + \alpha}{2\left(\lambda_n^2 + \alpha^2\right)}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Из (4) при $t = T$ имеем

$$u(x,T) = \psi(x) = \int_0^1 G(x,\xi,T)\varphi(\xi)\,d\xi + \int_0^T \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\mu(\xi,\tau)\,d\xi d\tau + \int_0^T \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi d\tau.$$

Отсюда следует, что искомое управление $v(\xi,\tau) \in L_2(Q)$ является решением интегрального уравнения

$$\int_0^T \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi d\tau = \psi_1(x), \quad x \in I_1, \quad (5)$$

где

$$\psi_1(x) = \psi(x) - \int\limits_0^1 G(x,\xi,T)\varphi(\xi)\,d\xi - \int\limits_0^T\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\mu(\xi,\tau)\,d\xi d\tau, \quad x \in I_1,$$

— известная функция.

Теперь решение задачи управляемости сводится к поиску решения интегрального уравнения (5), удовлетворяющего условию (3).

Общее решение интегрального уравнения. Пусть

$$f(x,\tau) = \int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi, \quad (x,\tau) \in Q. \tag{6}$$

Из (5) следует, что

$$\int\limits_0^T f(x,\tau)\,d\tau = \psi_1(x), \quad x \in I. \tag{7}$$

Следующая теорема позволяет найти общее решение интегрального уравнения (7) относительно неизвестной функции $f(x,\tau)$, $(x,\tau) \in Q$.

Теорема 1. *Общее решение интегрального уравнения* (7) *определяется по формуле*

$$f(x,\tau) = \frac{1}{T}\psi_1(x) + p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T p(x,\tau)\,d\tau, \quad (x,\tau) \in Q, \tag{8}$$

где $p(x,\tau) \in L_2(Q)$ *— произвольная функция.*

Доказательство. Введем следующие множества:

$$P = \left\{ f(x,\tau) \in L_2(Q) \mid \int\limits_0^T f(x,\tau)\,d\tau = \psi_1,\ x \in I_1 \right\}, \tag{9}$$

$$R = \left\{ f(x,\tau) \in L_2(Q) \mid f(x,\tau) = \frac{1}{T}\psi_1(x) + p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T p(x,\tau)\,d\tau, p(x,\tau) \in L_2(Q) \right\}, \tag{10}$$

где множество P содержит все решения интегрального уравнения (7). Теорема утверждает, что функция $f(x,\tau) \in L_2(Q)$ принадлежит P тогда и только тогда, когда она принадлежит R, т. е. $P = R$. Докажем, что $P = R$.

Покажем, что $R \subset P$. В самом деле, если $f(x,\tau) \in R$, то, как следует из (10), верно равенство

$$\int\limits_0^T f(x,\tau)\,d\tau = \int\limits_0^T \left[\frac{1}{T}\psi_1(x) + p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T p(x,\tau_1)\,d\tau_1 \right] d\tau = \frac{1}{T}\psi_1(x)\cdot\tau|_0^T$$
$$+ \int\limits_0^T p(x,\tau)\,d\tau - \frac{1}{T}\left(\int\limits_0^T p(x,\tau)d\tau \right)\cdot\tau|_0^T = \psi_1(x), \quad x \in I_1.$$

Отсюда вытекает, что любой элемент $f(x,\tau) \in R$ принадлежит P, т. е. $R \subset P$.

Покажем, что $P \subset R$. Пусть $f_*(x,\tau) \in P$, т. е. для функции $f_*(x,\tau) \in P$ выполнено равенство (см. (9))

$$\int\limits_0^T f_*(x,\tau)\,d\tau = \psi_1(x), \quad x \in I_1.$$

В соотношении (10) функция $p(x,\tau) \in L_2(Q)$ произвольная. В частности, можно выбрать $p(x,\tau) = f_*(x,\tau)$, $(x,\tau) \in Q$. Теперь функция $f(x,\tau) \in R$ запишется в виде

$$f(x,\tau) = \frac{1}{T}\psi_1(x) + f_*(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f_*(x,\tau)\,d\tau = f_*(x,\tau) \in R.$$

Таким образом, любой элемент $f_*(x,\tau) \in P$ является элементом множества R, т. е. $P \subset R$. Теорема доказана.

Как следует из теоремы 1, интегральное уравнение (5) в силу соотношений (6), (7) может быть представлено в виде

$$\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi = \frac{1}{T}\psi_1(x) + p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T p(x,\tau)\,d\tau, \quad (x,\tau) \in Q, \tag{11}$$

где $p(x,\tau) \in L_2(Q)$ — произвольная функция. Задача управляемости сводится к такой: найти решение интегрального уравнения (11) при условиях (3).

Оптимизационная задача. Пусть

$$w(x,\tau) = p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T p(x,\tau)\,d\tau, \quad p(x,\tau) \in L_2(Q).$$

Введем множество

$$W = \left\{ w(x,\tau) \in L_2(Q) \mid w(x,\tau) = p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T p(x,\tau)\,d\tau, \quad p(x,\tau) \in L_2(Q) \right\}.$$

Тогда интегральное уравнение (11) запишется в виде

$$\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi = \frac{1}{T}\psi_1(x) + w(x,\tau), \quad (x,\tau) \in Q, \tag{12}$$

$$v(\xi,\tau) \in V, \quad w(x,\tau) \in W. \tag{13}$$

Рассмотрим оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$J(v,w) = \int\limits_0^T \int\limits_0^1 \left[\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x,\tau) \right]^2 dx d\tau \to \inf \tag{14}$$

при условиях

$$(v(\xi,\tau), w(x,\tau)) \in V \times W, \tag{15}$$

где $v = v(\xi,\tau)$, $w = w(\xi,\tau)$.

Лемма 1. *Для того чтобы пара* $(v_*(x,\tau), w_*(x,\tau)) \in V\times W$ *была решением интегрального уравнения* (12) *при условии* (13), *необходимо и достаточно, чтобы* $J(v_*, w_*) = 0$, *где* $(v_*(\xi,\tau), w_*(\xi,\tau)) \in V\times W$ — *решение оптимизационной задачи* (14), (15).

Доказательство. Заметим, что $J(v,w) \geq 0$ $\forall v, v \in V$, $\forall w, w \in W$. Как следует из (14), (15), $J(v_*, w_*) = 0$ тогда и только тогда, когда

$$\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v_*(\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{T}\psi_1(x) - w_*(x,\tau) = 0, \quad (x,\tau)\in Q.$$

Отсюда вытекает, что пара $(v_*(\xi,\tau), w_*(x,\tau)) \in V\times W$ удовлетворяет интегральному условию (12). Лемма доказана.

Таким образом, для решения задачи управляемости необходимо найти решение оптимизационной задачи (14), (15).

Градиент функционала. Оптимизационная задача (14), (15) может быть решена путем построения минимизирующей последовательности $\{v_n(\xi,\tau), w_n(x,\tau)\} \subset V \times W$, которая сходится к элементу $(v_*(\xi,\tau), w_*(x,\tau)) \in V\times W$ при $n\to\infty$. Для этого требуется вычисление градиента функционала (14) в любой точке $(v(\xi,\tau), w(x,\tau)) \in V\times W$.

Теорема 2. *Функционал* (14) *при условиях* (15) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$J'(v,w) = (J_1'(v,w), J_2'(v,w)) \in L_2(Q)\times L_2(Q) \tag{16}$$

в любой точке $(v,w)\in V\times W$ *равен*

$$\begin{aligned} J_1'(v,w) = 2\int\limits_0^1\int\limits_0^1 & G(x,\xi,T-\tau)G(x,\sigma,T-\tau)v(\sigma,\tau)\,d\sigma d\tau \\ & + 2\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\left[-\frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x,\tau)\right]dx = J_1'(\xi,\tau)\in L_2(Q), \end{aligned} \tag{17}$$

$$J_2'(v,w) = -2\left[\int\limits_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x,\tau)\right] = J_2'(x,\tau)\in L_2(Q). \tag{18}$$

Доказательство. Пусть $(v(\xi,\tau), w(x,\tau))\in V\times W$,

$$(v(\xi,\tau)+\Delta v(\xi,\tau), w(x,\tau)+\Delta w(x,\tau)) \in V\times W,$$

где

$$\Delta w(x,\tau) = \Delta p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T \Delta p(x,\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$\Delta J = J(v+\Delta v, w+\Delta w) - J(v,w) = \Delta J_1 + \Delta J_2,$$

где

$$\Delta J_1 = 2\int_0^T\int_0^1\left\{\int_0^1\left[G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x,\tau)\right]\right.$$
$$\left.\times\left[\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\Delta v(\xi,\tau)\,d\xi - \Delta w(x,\tau)\right]\right\}dxd\tau, \quad (19)$$

$$\Delta J_2 = \int_0^T\int_0^1\left\{\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\Delta v(\xi,\tau)\,d\xi - \Delta w(x,\tau)\right\}^2 dxd\tau. \quad (20)$$

Приращение ΔJ_1 представим в виде суммы $\Delta J_1 = \Delta J_{11} + \Delta J_{12}$, где

$$\Delta J_{11} = 2\int_0^T\int_0^1\left\{\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)G(x,\sigma,T-\tau)v(\sigma,\tau)\,d\sigma + 2\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\right.$$
$$\left.\times\left[-\frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x,\tau)\right]\right\}\Delta v(\xi,\tau)\,d\xi dxd\tau = \langle J_1'(v,w),\Delta v\rangle_{L_2}, \quad (21)$$

$$\Delta J_{12} = -2\int_0^T\int_0^1\left\{\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi - \frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x,\tau)\right\}\Delta w(x,\tau)\,dxd\tau$$
$$= \langle J_2'(v,w),\Delta w\rangle_{L_2}. \quad (22)$$

Рассмотрим слагаемое ΔJ_2, определяемое по формуле (19). Так как

$$\left|\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\Delta v(\xi,\tau)\,d\xi - \Delta w(x,\tau)\right| \le c_0\int_0^1 |\Delta v(\xi,\tau)|\,d\xi + |\Delta w(x,\tau)|,$$

$$c_0 = \max|G(x,\xi,T-\tau)|, \quad 0\le x,\xi\le 1, \quad 0\le\tau\le T,$$

применяя неравенство Коши — Буняковского, получим

$$\left|\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\Delta v(\xi,\tau)\,d\xi - \Delta w(x,\tau)\right|^2 \le \left\{c_0\left(\int_0^1 |\Delta v(\xi,\tau)|^2\,d\xi\right)^{1/2}\right.$$
$$\left. + |\Delta w(x,\tau)|\right\}^2 \le 2c_0^2\left(\int_0^1 |\Delta v(\xi,\tau)|^2\,d\xi\right) + 2|\Delta w(x,\tau)|^2 \quad (23)$$

в силу того, что

$$(a+b)^2 \le 2a^2 + 2b^2, \quad a = c_0\left(\int_0^1 |\Delta v(\xi,\tau)|^2\,d\xi\right)^{\frac12}, \quad b = |\Delta w(x,\tau)|.$$

Из (20) с учетом (23) имеем

$$\Delta J_2 = |\Delta J_2| \le 2c_0^2\|\Delta v\|^2_{L_2} + 2\|\Delta w\|^2 \le c\big(\|\Delta v\|^2_{L_2} + \|\Delta w\|^2\big),$$

где $c = \max\bigl(2c_0^2, 2\bigr)$. Заметим, что

$$\frac{|\Delta J_2|}{\sqrt{\|\Delta v\|_{L_2}^2 + \|\Delta w\|_{L_2}^2}} \le \frac{c\bigl(\|\Delta v\|_{L_2}^2 + \|\Delta w\|_{L_2}^2\bigr)}{\sqrt{\|\Delta v\|_{L_2}^2 + \|\Delta w\|_{L_2}^2}} = c\bigl(\|\Delta v\|_{L_2}^2 + \|\Delta w\|_{L_2}^2\bigr) \to 0$$

при $\|(\Delta v, \Delta w)\| = \sqrt{\|\Delta v\|_{L_2}^2 + \|\Delta w\|_{L_2}^2} \to 0$.

Из представления (см. (19)–(22))

$$\Delta J = \langle J_1'(v,w), \Delta v\rangle_{L_2} + \langle J_2'(v,w), \Delta w\rangle_{L_2} + \Delta J_2, \qquad \frac{|\Delta J_2|}{\|(\Delta v, \Delta w)\|} \to 0$$

при $\|(\Delta v, \Delta w)\| \to 0$ следует, что градиент $J'(v,w)$ определяется соотношениями (16)–(19). Теорема доказана.

Теорема 3. *Градиент функционала $J'(v,w) \in L_2(Q) \times L_2(Q)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е.*

$$\begin{gathered} \|J'(v_1,w_1) - J'(v_2,w_2)\| \le L(\|v_1 - v_2\|_{L_2} + \|w_1 - w_2\|_{L_2}), \\ \forall (v_1,w_1), (v_2,w_2) \in V \times W, \quad L = \mathrm{const} > 0. \end{gathered} \tag{24}$$

Доказательство. Так как $J'(v,w) = (J_1'(v,w), J_2'(v,w))$, имеем

$$\|J'(v_1,w_1) - J'(v_2,w_2)\|^2 = \|J_1'(v_1,w_1) - J_1'(v_2,w_2)\|^2 + \|J_2'(v_1,w_1) - J_2'(v_2,w_2)\|^2.$$

Как следует из (17),

$$\begin{aligned} J_1'(v_1,w_1) - J_1'(v_2,w_2) = 2\int_0^1\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)G(x,\sigma,T-\tau)[v_1(\sigma,\tau) - v_2(\sigma,\tau)]\, d\sigma dx \\ + 2\int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)[-w_1(x,\tau) + w_2(x,\tau)]\, dx. \end{aligned}$$

Далее,

$$\begin{aligned} \|J_1'(v_1,w_1) - J_1'(v_2,w_2)\|^2 = \int_0^T\int_0^1 |J_1'(v_1,w_1) - J_1'(v_2,w_2)|^2\, d\xi d\tau \\ \le c_1\bigl(\|v_1 - v_2\|_{L_2}^2 + \|w_1 - w_2\|_{L_2}^2\bigr), \end{aligned} \tag{25}$$

где $c_1 = \max\bigl(4c_0^4, 4c_0^2\bigr)$.

Аналогично из (18) вытекает, что

$$\begin{aligned} \|J_2'(v_1,w_1) - J_2'(v_2,w_2)\|^2 = \int_0^T\int_0^1 |J_2'(v_1,w_1) - J_2'(v_2,w_2)|^2\, dx d\tau \\ = 4c_0^2\|v_1 - v_2\|_{L_2}^2 + 4\|w_1 - w_2\|_{L_2}^2 \le c_2\bigl(\|v_1 - v_2\|_{L_2}^2 + \|w_1 - w_2\|_{L_2}^2\bigr), \end{aligned} \tag{26}$$

где $c_2 = \max\bigl(4c_0^2, 4\bigr)$. Из (25), (26) следует, что

$$\begin{aligned} \|J'(v_1,w_1) - J'(v_2,w_2)\|^2 = \|J_1'(v_1,w_1) - J_1'(v_2,w_2)\|^2 + \|J_2'(v_1,w_1) - J_2'(v_2,w_2)\|^2 \\ \le L^2(\|v_1 - v_2\|^2 + \|w_1 - w_2\|^2)^2, \quad L^2 = \max(c_1, c_2). \end{aligned}$$

Заметим, что если

$$\|J'(v_1,w_1)-J'(v_2,w_2)\|^2 \le L^2(\|v_1-v_2\|^2+\|w_1-w_2\|^2) \le L^2(\|v_1-v_2\|+\|w_1-w_2\|)^2,$$

то

$$\|J'(v_1,w_1) - J'(v_2,w_2)\| \le L(\|v_1 - v_2\| + \|w_1 - w_2\|).$$

Теорема доказана.

Проекция точки на множество. Сделаем два замечания.

1. Если $w_1(x,\tau) \in W$, $w_2(x,\tau) \in W$, то для любых чисел α и β точка $\alpha w_1(x,\tau)+\beta w_2(x,\tau)$ принадлежит W. В самом деле, из $w_1(x,\tau) \in W$, $w_2(x,\tau) \in W$ выводим, что

$$w_1(x,\tau) = p_1(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T p_1(x,\tau)\,d\tau, \quad w_2(x,\tau) = p_2(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T p_2(x,\tau)\,d\tau.$$

Тогда

$$\alpha w_1(x,\tau)+\beta w_2(x,\tau) = [\alpha p_1(x,\tau)+\beta p_2(x,\tau)] - \frac{1}{T}\int\limits_0^T [\alpha p_1(x,\tau)+\beta p_2(x,\tau)]\,d\tau \in W.$$

Отсюда следует, что W — линейное многообразие в $L_2(Q)$.

2. Если $p(x,\tau) \equiv 0$, $(x,\tau) \in Q$ то $w(x,\tau) \in W$. Следовательно, линейное многообразие W — подпространство, т. е. выпуклое замкнутое множество.

Теорема 4. *Любой элемент $f(x,\tau) \in L_2(Q)$ имеет единственную проекцию на множество W, причем*

$$P_W[f(x,\tau)] = f(x,\tau) - \frac{1}{T}\int\limits_0^T f(x,\tau)\,d\tau, \quad (x,\tau) \in Q, \tag{27}$$

где $P_W[f(x,\tau)]$ — проекция точки $f(x,\tau)$ на W.

Доказательство. Проекция точки $f(x,\tau) \in L_2(Q)$ на множество W определяется из решения оптимизационной задачи

$$J_1(w) = \|w(x,\tau) - f(x,\tau)\|^2 \to \inf, \quad w(x,\tau) \in W.$$

Так как W — выпуклое замкнутое множество, $J_1(w)$ — сильно выпуклый функционал, то $f(x,\tau) \in L_2(Q)$ имеет единственную проекцию на W. Для того чтобы точка $w_*(x,\tau) = P_W[f(x,\tau)]$ была проекцией точки $f(x,\tau)$ на W, необходимо и достаточно, чтобы

$$\langle J_1'(w_*, w - w_*)\rangle_{L_2} \ge 0 \quad \forall w, w \in W.$$

Поскольку $J_1'(w_*) = 2[w_* - f(x,t)]$, точка $w_*(x,t) = P_W[f(x,\tau)] \in W$ будет проекцией точки $f(x,\tau) \in L_2(Q)$ тогда и только тогда, когда

$$\langle w_*(x,\tau) - f(x,\tau), w(x,\tau) - w_*(x,\tau\rangle_{L_2} \ge 0 \quad \forall w(x,\tau) \in W. \tag{28}$$

Из (28) следует, что

$$\int\limits_0^T\int\limits_0^1 [P_W[f(x,\tau)] - f(x,\tau)]\cdot[w(x,\tau) - P_W[f(x,\tau)]]\,dxd\tau \ge 0 \quad \forall w, w \in W.$$

Так как W — подпространство, из $w(x,\tau) \in W$ вытекает, что $2w(x,\tau) \in W$. Следовательно, $2w_*(x,\tau) - w(x,\tau) \in W$, где $\alpha = 2$, $\beta = -1$. Тогда неравенство (28) запишется в виде

$$\langle w_* - f(x,\tau), [2w_* - w] - w_* \rangle_{L_2} = \langle w_* - f(x,\tau), w_* - w \rangle \geq 0 \quad \forall w, w \in W. \quad (29)$$

Из (28), (29) вытекает, что для того чтобы точка $w_*(x,\tau) \in W$ была проекцией точки $f(x,\tau) \in L_2(Q)$, необходимо и достаточно, чтобы для любой $w(x,\tau) \in W$ было

$$\langle w_* - f(x,\tau), w - w_* \rangle_{L_2} = \int_0^T \int_0^1 \{P_W[f(x,\tau)] - f(x,\tau)\}\{w(x,\tau) - P_W[f(x,\tau)]\}\, dxd\tau = 0. \quad (30)$$

Пусть $P_W[f(x,\tau)] = f(x,\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(x,\tau)\, d\tau$. Тогда

$$\int_0^T \int_0^1 \{P_W[f(x,\tau)] - f(x,\tau)\}\{w(x,\tau) - P_W[f(x,\tau)]\}\, dxd\tau$$
$$= \int_0^T \int_0^1 \left\{ f(x,\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T f(x,\tau)\, d\tau - f(x,\tau) \right\} \left\{ p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)\, d\tau - f(x,\tau) + \frac{1}{T}\int_0^T f(x,\tau)\, d\tau \right\} dxd\tau = 0$$

для любых $w(x,\tau) = p(x,\tau) - \frac{1}{T}\int_0^T p(x,\tau)\, d\tau \in W$. Отсюда и из равенства (30) следует, что проекция точки $f(x,\tau) \in L_2(Q)$ на W определяется по формуле (27). Теорема доказана.

Проекция точки $f_1(\xi,\tau) \in L_2(Q)$ на V определяется так:

$$P_V[f_1(\xi,\tau)] = \begin{cases} r \cdot \dfrac{f_1(\xi,\tau)}{[\iint\limits_Q f_1^2(\xi,\tau)\, d\xi d\tau]^{\frac{1}{2}}}, & \text{если } \|f_1\|^2_{L_2} > r^2, \\ f_1(\xi,\tau), & \text{если } \|f_1\|^2_{L_2} = \iint\limits_Q f_1^2(\xi,\tau)\, d\xi d\tau \leq r^2. \end{cases} \quad (31)$$

Выпуклый функционал. Рассмотрим функционал (14) при условиях (15). Как показано выше, множество W выпукло, множество V является выпуклым замкнутым шаром. Следовательно, множество $V \times W$ выпукло и замкнуто.

Лемма 2. *Функционал $J(v,w)$ на множестве $V \times W$ дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и является выпуклым.*

Доказательство. Как следует из (20),

$$\Delta J_2 = \int_0^T \int_0^1 \left\{ \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\Delta v(\xi,\tau)\, d\xi - \Delta w(x,\tau) \right\}^2 dxd\tau$$

$$= \int_0^T \int_0^1 \left\{ \int_0^1 G(x,\xi,T-\tau)\Delta v(\xi,\tau)\,d\xi - \Delta w(x,\tau) \right\}$$

$$\times \left\{ \int_0^1 G(x,\sigma,T-\tau)\Delta v(\sigma,\tau)\,d\sigma - \Delta w(x,\tau) \right\} dxd\tau$$

$$= \frac{1}{2}\left\langle J''(v,w)\begin{pmatrix}\Delta v\\ \Delta w\end{pmatrix}, (\Delta v, \Delta w)\right\rangle_{L_2} \geq 0 \quad \forall (v,w)\in V\times W.$$

Отсюда следует, что функционал $J(v,w), (v,w)\in V\times W$ дважды дифференцируем, и из неотрицательности ΔJ_2 вытекает выпуклость функционала $J(v,w)$ на $V\times W$. Лемма доказана.

Минимизирующие последовательности. Рассмотрим оптимизационную задачу (14), (15). Строим последовательность $\{v_n(\xi,\tau), w_n(x,\tau)\}\subset V\times W$ по следующему правилу:

$$v_{n+1}(\xi,\tau) = P_V[v_n(\xi,\tau) - \alpha_n J_1'(v_n,w_n)], \quad n=0,1,2,\dots, \tag{32}$$

$$w_{n+1}(x,\tau) = P_W[w_n(x,\tau) - \alpha_n J_2'(v_n,w_n)], \quad n=0,1,2,\dots, \tag{33}$$

где $0<\varepsilon_0\leq\alpha_n\leq\frac{2}{L+2\varepsilon_1}$, $\varepsilon_1>0$. В частности, $\varepsilon_1=\frac{L}{2}$, $\alpha_n=\frac{1}{L}$, $\varepsilon_0=\frac{1}{L}$.

Градиент $J'(v,w)=(J_1'(v,w), J_2'(v,w))$ определяется формулами (16)–(18), $L>0$ — постоянная Липшица из (24), причем $P_V[\cdot]$, $P_W[\cdot]$ определяются соотношениями (27), (31) соответственно.

Теорема 5. *Пусть последовательность $\{v_n(\xi,\tau), w_n(x,\tau)\}\subset V\times W$ определяется соотношениями (32), (33). Тогда*

1) *нижняя грань функционала $J(v,w)$ достигается на множестве $V\times W$ и $J_*=\inf\limits_{(v,w)\in V\times W} J(v,w)=J(v_*,w_*)$;*

2) *последовательность $\{v_n(\xi,\tau), w_n(x,\tau)\}\subset V\times W$ минимизирующая, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} J(v_n,w_n)=J_*=\inf J(v,w)$, $(v,w)\in V\times W$;*

3) *последовательность $\{v_n(\xi,\tau), w_n(\xi,\tau)\}\subset V\times W$ слабо сходится к точке $(v_*=v_*(\xi,\tau), w_*=w_*(x,\tau))$ при $n\to\infty$;*

4) *справедлива следующая оценка скорости сходимости:*

$$0\leq J(v_n,w_n)-J_*\leq\frac{c}{n}, \quad n=1,2,\dots,\ c=\text{const}>0; \tag{34}$$

5) *если $\inf\limits_{(v,w)\in V\times W} J(v,w)=J_*=0$, то управление $v_*(\xi,\tau)\in V$ переводит систему (1), (2) из начального состояния $u(0,x)=\varphi(x)$, $x\in I_1$, в заданное конечное состояние $u(x,T)=\psi(x)$; если $J_*>0$, то управление $v_*(\xi,\tau)\in V$ минимизирует норму $\|u(x,T)-\psi(x)\|$, т. е. управление $v_*(\xi,\tau)\in V$ обеспечивает наилучшее приближение $u(x,T)$ к $\psi(x)$.*

Доказательство. Так как $v_{n+1}(\xi,\tau)$, $w_{n+1}(x,\tau)$ являются проекциями точек $v_n(\xi,\tau)-\alpha_n J_1'(\xi,\tau)$, $w_n(x,\tau)-\alpha_n J_2'(x,\tau)$ на V и W соответственно, верны соотношения

$$\langle v_{n+1}-v_n+\alpha_n J_1'(v_n,w_n), v-v_{n+1}\rangle_{L_2}\geq 0 \quad \forall v, v\in V, \tag{35}$$

$$\langle w_{n+1}-w_n+\alpha_n J_2'(v_n,w_n), w-w_{n+1}\rangle_{L_2}= 0 \quad \forall w, w\in W. \tag{36}$$

Из (35), (36) имеем

$$\langle J_1'(v_n, w_n), v - v_{n+1}\rangle_{L_2} \geq \frac{1}{\alpha_n}\langle v_n - v_{n+1}, v - v_{n+1}\rangle_{L_2} \quad \forall v, v \in V, \tag{37}$$

$$\langle J_2'(v_n, w_n), w - w_{n+1}\rangle_{L_2} = \frac{1}{\alpha_n}\langle w_n - w_{n+1}, w - w_{n+1}\rangle_{L_2} \quad \forall w, w \in W. \tag{38}$$

Как следует из теорем 2, 3 и леммы 2, функционал $J(v, w)$ выпуклый и градиент удовлетворяет условию Липшица, т. е. $J(v, w) \in C^{1,1}(V \times W)$, поэтому справедливо неравенство

$$J(v_n, w_n) - J(v_{n+1}, w_{n+1}) \geq \langle J_1'(v_n, w_n), v_n - v_{n+1}\rangle_{L_2} \\ + \langle J_2'(v_n, w_n), w_n - w_{n+1}\rangle_{L_2} - \frac{1}{2}L(\|v_n - v_{n+1}\|^2 + \|w_n - w_{n+1}\|^2). \tag{39}$$

Из (37), (38) при $v = v_n \in V$, $w = w_n \in W$ вытекает, что

$$\langle J_1'(v_n, w_n), v_n - v_{n+1}\rangle_{L_2} \geq \frac{1}{\alpha_n}\|v_n - v_{n+1}\|^2_{L_2}, \tag{40}$$

$$\langle J_2'(v_n, w_n), w_n - w_{n+1}\rangle_{L_2} = \frac{1}{\alpha_n}\|w_n - w_{n+1}\|^2_{L_2}. \tag{41}$$

Стало быть (см. (39)–(41)),

$$J(v_n, w_n) - J(v_{n+1}, w_{n+1}) \geq \left(\frac{1}{\alpha_n} - \frac{L}{2}\right)(\|v_n - v_{n+1}\|^2 + \|w_n - w_{n+1}\|^2),$$

где $\frac{1}{\alpha_n} \geq \frac{L+2\varepsilon_1}{2}$, $\frac{1}{\alpha_n} - \frac{L}{2} \geq \varepsilon_1 > 0$. Тогда

$$J(v_n, w_n) - J(v_{n+1}, w_{n+1}) \geq \varepsilon_1(\|v_n - v_{n+1}\|^2 + \|w_n - w_{n+1}\|^2). \tag{42}$$

Из (42) получаем, что последовательность $\{J(v_n, w_n)\}$ строго убывает. Так как $J(v_n, w_n) \geq 0$, то $\{J(v_n, w_n)\}$ сходится. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty}[J(v_n, w_n) - J(v_{n+1}, w_{n+1})] = 0$, откуда

$$\lim_{n\to\infty}\|v_n - v_{n+1}\| = 0, \quad \lim_{n\to\infty}\|w_n - w_{n+1}\| = 0. \tag{43}$$

Пусть $(v_0(\xi, \tau), w_0(x, \tau)) \in V \times W$ — начальная точка последовательности $\{v_n, w_n\} \subset V \times W$. Введем множество

$$M(v_0, w_0) = \{(v, w) \in V \times W \mid J(v, w) \leq J(v_0, w_0)\}. \tag{44}$$

Можно показать, что $M(v_0, w_0)$ — ограниченное выпуклое множество в рефлексивном банаховом пространстве $L_2(Q) \times L_2(Q)$. Так как числовая последовательность $\{J(v_n, w_n)\}$ строго убывает, то $\{v_n, w_n\} \subset M(v_0, w_0)$, $n = 1, 2, \ldots$. Функционал $J(v, w)$ достигает нижней грани на множестве $M(v_0, w_0)$ в силу того, что $M(v_0, w_0)$ — слабо бикомпактное множество и функционал $J(v, w)$ слабо полунепрерывен снизу на $M(v_0, w_0)$. Следовательно,

$$J_* = \inf_{(v,w)\in V\times W} J(v, w) = J(v_*, w_*), \quad (v_*, w_*) \in M(v_0, w_0).$$

Покажем, что последовательность $\{v_n, w_n\} \subset M(v_0, w_0)$ минимизирующая. Поскольку $J(v, w) \in C^1(M(v_0, w_0))$ — выпуклый функционал, имеем

$$J(v, w) - J(\bar{v}, \overline{w}) \leq \langle J'(v, w), (v - \bar{v}, w - \overline{w})\rangle_{L_2} \quad \forall (v, w), (\bar{v}, \overline{w}) \in M(v_0, w_0).$$

Отсюда при $v = v_n$, $w = w_n$, $\bar{v} = v_*$, $\overline{w} = w_*$, $J(v_*, w_*) = J_*$, $(v_*, w_*) \in M(v_0, w_0)$ получим

$$0 \le a_n = J(v_n, w_n) - J(v_*, w_*) \le \langle J'(v_n, w_n), (v_n - v_{n+1}, w_n - w_{n+1})\rangle_{L_2} \\ + \langle J'(v_n, w_n), (v_{n+1} - v_*, w_{n+1} - w_*)\rangle_{L_2}. \quad (45)$$

Как следует из формул (37), (38), верны соотношения

$$\begin{gathered} \langle J_1'(v_n, w_n), (v_* - v_{n+1})\rangle_{L_2} \ge \frac{1}{\alpha_n}\langle v_n - v_{n+1}, v_* - v_{n+1}\rangle_{L_2}, \\ \langle J_2'(v_n, w_n), (w_* - w_{n+1})\rangle_{L_2} = \frac{1}{\alpha_n}\langle w_n - w_{n+1}, w_* - w_{n+1}\rangle_{L_2}. \end{gathered} \quad (46)$$

Из (45), (46) имеем

$$0 \le a_n \le \left\| J'(v_n, w_n) - \frac{1}{\alpha_n}(v_* - v_{n+1}, w_* - w_{n+1}) \right\| \|(v_n - v_{n+1}, w_n - w_{n+1})\|. \quad (47)$$

Так как

$$\left\| J'(v_n, w_n) - \frac{1}{\alpha_n}(v_* - v_{n+1}, w_* - w_{n+1}) \right\| \le \|J'(v_n, w_n)\| \\ + \frac{1}{\alpha_n}\|v_* - v_{n+1}, w_* - w_{n+1}\| \le \sup_{(v_n, w_n) \in M(v_0, w_0)} \|J'(v_n, w_n)\| + \frac{D}{\alpha_n},$$

$$\frac{D}{\alpha_n} \le \frac{D}{\varepsilon_0}, \quad \|(v_* - v_{n+1}, w_* - w_{n+1})\| \le D,$$

где D — диаметр множества $M(v_0, w_0)$, из (47) получим

$$0 \le a_n = J(v_n, w_n) - J(v_*, w_*) \le m_0 \|(v_n - v_{n+1}, w_n - w_{n+1})\|, \quad (48)$$

где $m_0 = \sup\limits_{(v_n, w_n) \in M(v_0, w_0)} \|J'(v_n, w_n)\| + \frac{D}{\varepsilon_0} = \mathrm{const} > 0$. Как следует из соотношения (43), $\|(v_n - v_{n+1}, w_n - w_{n+1})\| \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда из (46) имеем

$$\lim_{n \to \infty} J(v_n, w_n) = J_* = \inf_{(v_n, w_n) \in M(v_0, w_0)} J(v, w) = J(v_*, w_*).$$

Это означает, что последовательность $\{v_n, w_n\} \subset M(v_0, w_0)$ минимизирующая. Так как множество $M(v_0, w_0)$ слабо бикомпактно, последовательность $\{v_n, w_n\}$ минимизирующая, то $v_n \xrightarrow{c} v_*$, $w_n \xrightarrow{c} w_*$ при $n \to \infty$.

Из неравенств (42), (48), где

$$a_n - a_{n+1} \ge \varepsilon_1(\|v_n - v_{n+1}\|^2 + \|w_n - w_{n+1}\|^2),$$

$$0 \le a_n = J(v_n, w_n) - J_* \le m_0 \|(v_n - v_{n+1}, w_n - w_{n+1})\|,$$

$J(v_n, w_n) - J(v_{n+1}, w_{n+1}) = a_n - a_{n+1}$, следует, что

$$a_n \ge 0, \quad a_n - a_{n+1} \ge \varepsilon_1 \frac{a_n^2}{m_0^2}.$$

Тогда

$$a_n = J(v_n, w_n) - J_* \le \frac{m_0^2}{\varepsilon_1}\frac{1}{n} = \frac{c}{n}, \quad c = \frac{m_0^2}{\varepsilon_1}, \quad n = 1, 2, \ldots .$$

Отсюда вытекает оценка (34).

Если $J_* = J(v_*, w_*) = 0$, то, как следует из теоремы 1, интегральное уравнение (12) имеет решение, управление $v_*(\xi,\tau) \in V$ переводит систему (1) из начального состояния $u(0,x) = \varphi(x)$, $x \in I_1$, в заданное конечное состояние $u(x,T) = \psi(x)$. Если $J_* > 0$, то управление $v_*(\xi,\tau)$ минимизирует норму $\|u(x,T) - \psi(x)\|$. Теорема доказана.

Отметим, что функционал $J(u)$, определенный на выпуклом множестве U гильбертова пространства H, называется *сильно выпуклым*, если существует число $\kappa > 0$ такое, что

$$J(\alpha u+(1-\alpha)v) \le \alpha J(u)+(1-\alpha)J(v)-\kappa\alpha(1-\alpha)\|u-v\|_H^2 \quad \forall u,v \in U, \forall\alpha,\ \alpha \in [0,1].$$

Теорема 6. *Пусть приращение функционала $\Delta J = \Delta J_1 + \Delta J_2$ такое, что*

$$\Delta J_2 = \frac{1}{2}\left\langle J''(v,w)\begin{pmatrix}\Delta v\\ \Delta w\end{pmatrix}, (\Delta v, \Delta w)\right\rangle_{L_2} \ge \mu\|(\Delta v,\Delta w)\|^2, \tag{49}$$

$$(v,w) \in V \times W, \quad \Delta v = \Delta v(\xi,\tau) \in L_2(Q), \quad \Delta w = \Delta w(x,\tau) \in L_2(Q),$$

где $\mu_0 = \mathrm{const} > 0$. Тогда

1) *функционал $J(v,w)$ сильно выпуклый на $V \times W$;*

2) *последовательность $\{v_n, w_n\} \subset V \times W$ из (32), (33) сильно сходится к единственной точке $(v_*, w_*) \in V \times W$, т. е. $v_n \to v_*, w_n \to w_*$ при $n \to \infty$,*

$$J_* = \inf_{(v,w)\in V\times W} J(v,w) = J(v_*,w_*) = \min_{(v,w)\in V\times W} J(v,w);$$

3) *управление $v_* = v_*(\xi,\tau) \in V$ переводит траекторию системы (1) из начального состояния $u(0,x) = \varphi(x)$, $x \in I_1$, в заданное конечное состояние $u(x,T) = \psi(x)$, $x \in I_1$, тогда и только тогда, когда $J(v_*,w_*) = 0$;*

4) *справедлива оценка*

$$\|(v_n,w_n) - (v_*,w_*)\|^2 \le \frac{2}{\mu}[J(v_n,w_n) - J(v_*,w_*)] \le \frac{2c}{\mu n}, \quad n = 1,2,\ldots. \tag{50}$$

Доказательство. Так как $J(v,w) \in C^2(V\times W)$, из (49) следует, что функционал $J(v,w)$, $(v,w) \in V\times W$, сильно выпуклый. Любой сильно выпуклый функционал является строго выпуклым, стало быть, $J(v,w)$ достигает нижней грани на выпуклом множестве $V\times W$ в единственной точке.

Множество $M(v_0,w_0)$ ограничено, выпукло и замкнуто. Так как функционал $J(v,w)$ сильно выпуклый на $M(v_0,w_0)$, то

$$\begin{aligned}&J(\alpha v + (1-\alpha)\bar v, \alpha w + (1-\alpha)\overline{w}) \le \alpha J(v,w) + (1-\alpha)J(\bar v,\overline{w})\\ &\qquad - \alpha(1-\alpha)\kappa\|(v-\bar v, w-\overline{w})\|^2 \quad \forall (v,w),(\bar v,\overline{w}) \in M(v_0,w_0),\ \kappa = \mathrm{const} > 0.\end{aligned}$$

Отсюда, в частности, когда $\bar v = v_*$, $\overline{w} = w_*$, $J(v_*,w_*) = J_* = \inf\limits_{(v,w)\in V\times W} J(v,w)$, имеем

$$\begin{aligned}0 \le J(\alpha v + (1-\alpha)v_*, \alpha w + (1-\alpha)w_*) - J(v_*,w_*) \le \alpha[J(v,w) - J(v_*,w_*)]\\ - \alpha(1-\alpha)\kappa\|(v-v_*, w-w_*)\|^2 \quad \forall (v,w),(v_*,w_*) \in M(v_0,w_0),\end{aligned}$$

где $\kappa > 0$ — коэффициент сильной выпуклости, $\mu = 2\kappa$. Следовательно,

$$\alpha(1-\alpha)\kappa\|(v-v_*, w-w_*)\|^2 \le \alpha[J(v,w) - J(v_*,w_*)] \quad \forall (v,w),(v_*,w_*) \in M(v_0,w_0).$$

Отсюда после деления на $\alpha > 0$, $\alpha \to +0$, получим

$$\kappa\|(v - v_*, w - w_*)\|^2 \leq J(v, w) - J(v_*, w_*) \quad \forall (v, w), (v_*, w_*) \in M(v_0, w_0).$$

Тогда при $v = v_n, w = w_n$ имеем

$$\kappa\|(v_n - v_*, w_n - w_*)\|^2 \leq J(v_n, w_n) - J(v_*, w_*) \leq \frac{c}{n}, \quad n = 1, 2, \dots,$$

в силу оценки (34). Так как $\mu = 2\kappa$, то

$$\|(v_n - v_*, w_n - w_*)\|^2 \leq \frac{2}{\mu}[J(v_n, w_n) - J(v_*, w_*)] \leq \frac{2c}{\mu n}, \quad n = 1, 2, \dots .$$

Отсюда вытекает, что $v_n \to v_*, w_n \to w_*$ при $n \to \infty$ и верна оценка (50). Теорема доказана.

Построение слабо предельной точки. Рассмотрим случай, когда функционал $J(v, w)$, $(v, w) \in V \times W$, не является сильно выпуклым.

Как следует из теоремы 5, в указанном случае минимизирующая последовательность $\{v_n, w_n\} \subset V \times W$ слабо сходится к точке $(v_*, w_*) \in V \times W$ $(v_* = v_*(\xi, \tau),\ w_* = w_*(x, \tau))$, т. е. $\{v_n, w_n\} \xrightarrow{w} (v_*, w_*)$ при $n \to \infty$. Для определения управления $(v_*(\xi, \tau), w_*(x, \tau))$ необходимо найти слабо предельную точку минимизирующей последовательности $\{v_n, w_n\} \subset V \times W$.

Рассмотрим следующую задачу оптимального управления: минимизировать функционал

$$J_k(v, w) = \int_0^T \int_0^1 \left[\int_0^1 G(x, \xi, T - \tau)\, d\xi - \frac{1}{T}\psi_1(x) - w(x, \tau) \right]^2 dx d\tau$$
$$+ \varepsilon_k \left[\int_0^T \int_0^1 v^2(\xi, \tau)\, d\xi d\tau + \int_0^T \int_0^1 w^2(x, \tau)\, dx d\tau \right] \to \inf \tag{51}$$

при условиях

$$(v(\xi, \tau), w(x, \tau)) \in V \times W, \tag{52}$$

где $\varepsilon_k > 0$, $k = 1, 2, \dots$, $\lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$.

Теорема 7. *Функционал* (51) *при условиях* (52) *непрерывно дифференцируем по Фреше, градиент функционала*

$$J_k'(v, w) = (J_{1k}'(v, w), J_{2k}'(v, w)) \in L_2(Q) \times L_2(Q)$$

в любой точке $(v, w) \in V \times W$ *равен*

$$J_{1k}'(v, w) = J_1'(v, w) + 2\varepsilon_k v(\xi, \tau), \quad \varepsilon_k > 0,\ k = 1, 2, \dots,\ \lim_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0, \tag{53}$$

$$J_{2k}'(v, w) = J_2'(v, w) + 2\varepsilon_k w(x, \tau), \quad \varepsilon_k > 0,\ k = 1, 2, \dots,\ \lim_{k\to\infty} \varepsilon_K = 0, \tag{54}$$

где $J_1'(v, w)$, $J_2'(v, w)$ *определяются соотношениями* (17), (18) *соответственно.*

Доказательство аналогично доказательству теоремы 2. Приращение функционала ΔJ_k имеет вид $\Delta J_{1k} + \Delta J_{2k}$, где

$$\Delta J_{1k} = \Delta J_1 + 2\varepsilon_k \int_0^T \int_0^1 v(\xi, \tau)\Delta v(\xi, \tau)\, d\xi d\tau + 2\varepsilon_k \int_0^T \int_0^1 w(x, \tau)\Delta w(x, \tau)\, dx d\tau, \tag{55}$$

$$\Delta J_{2k} = \Delta J_2 + 2\varepsilon_k \int_0^T \int_0^1 \Delta v^2(\xi, \tau)\, d\xi d\tau + 2\varepsilon_k \int_0^T \int_0^1 \Delta w^2(x, \tau)\, dx d\tau, \tag{56}$$

а ΔJ_1, ΔJ_2 определяются формулами (19), (20) соответственно. Из (55), (56) следует, что $J_{1k}'(v, w)$, $J_{2k}'(v, w)$ определяются формулами (53), (54).

Теорема 8. *Градиент функционала $J'_k(v,w) \in L_2(Q)\times L_2(Q)$ удовлетворяет условию Липшица, т. е.*

$$\|J'_k(v_1,w_1) - J'_k(v_2,w_2)\| \le L_k(\|v_1-v_2\| + \|w_1-w_2\|) \tag{57}$$

$$\forall (v_1,w_1),(v_2,w_2)\in V\times W, \quad L_k = \mathrm{const} > 0,\ \varepsilon_k > 0,\ k = 1,2,\dots .$$

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.

Лемма 3. *Функционал (51) при условиях (52) дважды непрерывно дифференцируем по Фреше и является сильно выпуклым для любого $\varepsilon_k > 0$, $k = 1,2,\dots$.*

Доказательство аналогично доказательству леммы 2. Как следует из (56),

$$\Delta J_{2k} = \frac{1}{2}\left\langle J''(v,w)\begin{pmatrix}\Delta v\\ \Delta w\end{pmatrix}, (\Delta v,\Delta w)\right\rangle_{L_2} + \varepsilon_k\|(\Delta v,\Delta w)\|^2 \ge \varepsilon_k\|(\Delta v,\Delta w)\|^2,$$

$$\varepsilon_k > 0, \quad k = 1,2,\dots .$$

Отсюда вытекает утверждение леммы.

На основе соотношений (53), (54), (57) строим последовательность $\{v_n^k, w_n^k\} \subset V\times W$, полагая

$$v_{n+1}^k = P_V\big[v_n^k - \alpha_{nk}J'_{1k}\big(v_n^k,w_n^k\big)\big], \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{58}$$

$$w_{n+1}^k = P_W\big[w_n^k - \alpha_{nk}J'_{2k}\big(v_n^k,w_n^k\big)\big], \quad n = 0,1,2,\dots, \tag{59}$$

где $0 \le \varepsilon_{0k} \le \alpha_{nk} \le \frac{2}{L_k+2\varepsilon}$, $\varepsilon > 0$, $L_k > 0$ — постоянная Липшица из (57), $\varepsilon_k > 0$, $k = 1,2,\dots$, $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$.

Теорема 9. *Для любого $\varepsilon_k > 0$, $k = 1,2,\dots$, верны утверждения:*

1) последовательность $\{v_n^k,w_n^k\}\subset V\times W$ является минимизирующей, т. е. $\lim\limits_{n\to\infty} J_k\big(v_n^k,w_n^k\big) = J_k^* = \inf\limits_{(v,w)\in V\times W} J_k(v,w)$;

2) последовательность $\{v_n^k,w_n^k\}$ сходится к единственной точке $\big(v_*^k,w_*^k\big)$ при $n\to\infty$, т. е. $v_n^k\to v_*^k$, $w_n^k\to w_*^k$ при $n\to\infty$, где

$$J_k\big(v_*^k,w_*^k\big) = J_k^* = \inf_{(v,w)\in V\times W} J_k(v,w) = \min_{(v,w)\in V\times W} J_k(v,w);$$

3) справедливы следующие оценки:

$$0 \le J_k\big(v_n^k,w_n^k\big) - J_k\big(v_*^k,w_*^k\big) \le \frac{m_{0k}}{n}, \quad m_{0k} = \mathrm{const} > 0,\ n = 1,2,\dots;$$

$$\big\|\big(v_n^k - v_*^k, w_n^k - w_*^k\big)\big\| \le \frac{c_{0k}}{n}, \quad c_{0k} = \mathrm{const} > 0,\ n = 1,2,\dots;$$

4) последовательность $\{v_*^k,w_*^k\}\subset V\times W$, соответствующая $\varepsilon_k > 0$, $k = 1,2,\dots$, при $\lim\limits_{k\to\infty}\varepsilon_k = 0$ сходится к элементу $(v_*(\xi,\tau), w_*(x,\tau)) \in V\times W$, где (v_*,w_*) — оптимальное управление в задаче (14), (15).

Доказательство. Поскольку для любого $\varepsilon_k > 0$ функционал (51) является сильно выпуклым на $V\times W$, утверждения 1–3 следуют из теоремы 6. Заметим, что

$$J_* = \inf_{(v,w)\in V\times W} J(v,w) = J(v_*,w_*) \le J\big(v_*^k,w_*^k\big)$$
$$\le J\big(v_*^k,w_*^k\big) + \varepsilon_k T\big(v_*^k,w_*^k\big) = J_k\big(v_*^k,w_*^k\big), \tag{60}$$

$$J_k\big(v_*^k, w_*^k\big) \le J(v_*, w_*) + \varepsilon_k T(v_*, w_*) = J_k(v_*, w_*) \le J\big(v_*^k, w_*^k\big) + \varepsilon_k T(v_*, w_*), \quad (61)$$

где

$$T(v,w) = \int\limits_0^T \int\limits_0^1 v^2(\xi,\tau)\, d\xi d\tau + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 w^2(x,\tau)\, dx d\tau, \quad J_k(v,w) = J(v,w) + \varepsilon_k T(v,w).$$

Из неравенств (60), (61) вытекает, что

$$J_* = J(v_*, w_*) \le J\big(v_*^k, w_*^k\big) \le J(v_*, w_*) + \varepsilon_k T(v_*, w_*), \quad (62)$$

$$J\big(v_*^k, w_*^k\big) + \varepsilon_k T\big(v_*^k, w_*^k\big) \le J\big(v_*^k, w_*^k\big) + \varepsilon_k T(v_*, w_*), \quad (63)$$

где $\varepsilon_k > 0$, $\lim\limits_{k\to\infty} \varepsilon_k = 0$. Из (62) при $\varepsilon_k \to +0$ имеем

$$\lim_{k\to\infty} J\big(v_*^k, w_*^k\big) = J(v_*, w_*) = J_* = \inf_{v\in V, w\in W} J(v,w). \quad (64)$$

Отсюда вытекает, что последовательность $\big\{v_*^k, w_*^k\big\} \subset V \times W$ является минимизирующей для задачи (14), (15).

Из неравенства (63) имеем

$$T\big(v_*^k, w_*^k\big) \le T(v_*, w_*). \quad (65)$$

Пусть $T(v_*, w_*) = \beta$, $\beta > 0$. Тогда $T\big(v_*^k, w_*^k\big) \le \beta$, $k = 1, 2, \ldots$. Стало быть, последовательность $\big\{v_*^k, w_*^k\big\}$ принадлежит множеству

$$M(\beta) = \{(v,w) \in V \times W \mid T(v,w) \le \beta\}.$$

Рассмотрим оптимизационную задачу: минимизировать функционал

$$T(v_*, w_*) = \int\limits_0^T \int\limits_0^1 v^2(\xi,\tau)\, d\xi d\tau + \int\limits_0^T \int\limits_0^1 w^2(x,\tau)\, dx d\tau \to \inf \quad (66)$$

при условиях

$$(v(\xi,\tau), w(x,\tau)) \in V \times W. \quad (67)$$

Функционал (66) при условиях (67) является сильно выпуклым, следовательно множество $M(\beta)$ бикомпактно. Так как $\big\{v_*^k, w_*^k\big\} \subset M(\beta)$, из $\big\{v_*^k, w_*^k\big\}$ можно выделить подпоследовательность $\big\{v_*^{k_m}, w_*^{k_m}\big\}$, которая сильно сходится к точке $(\bar v_*, \overline{w}_*) \in M(\beta) \subset V \times W$.

Пусть

$$V_* \times W_* = \{(v_*, w_*) \in V \times W / J(v_*, w_*) = J_* = \inf_{(v,w)\in V\times W} J(v,w)\}.$$

Покажем, что $(\bar v_*, \overline{w}_*) \in V_* \times W_*$. Действительно, для подпоследовательности $\big\{v_*^{k_m}, w_*^{k_m}\big\}$ неравенство (62) запишется в виде

$$J_* = J(v_*, w_*) \le J\big(v_*^{k_m}, w_*^{k_m}\big) \le J(v_*, w_*) + \varepsilon_{k_m} T(v_*, w_*). \quad (68)$$

Так как функционал $J(v,w)$ слабо полунепрерывен снизу на множестве $V \times W$ и из сильной сходимости $\big(v_*^{k_m}, w_*^{k_m}\big) \xrightarrow{w} (\bar v_*, \overline{w}_*)$ при $m \to \infty$ следует слабая сходимость $\big(v_*^{k_m}, w_*^{k_m}\big) \xrightarrow{w} (\bar v_*, \overline{w}_*)$ при $m \to \infty$, из (68) имеем

$$J_* = J(v_*, w_*) \le J(\bar v_*, \overline{w}_*) \le \varliminf_{m\to\infty} J\big(v_*^{k_m}, w_*^{k_m}\big) \le J(v_*, w_*) + \lim_{m\to\infty} \varepsilon_{k_m} T(v_*, w_*) = J(v_*, w_*).$$

Отсюда вытекает, что $J(\bar{v}_*, \overline{w}_*) = J_* = J(v_*, w_*)$. Тем самым $(\bar{v}_*, \overline{w}_*) \in V_* \times W_*$, т. е. последовательность $\{v_*^k, w_*^k\}$ сходится в $V \times W$.

Покажем, что $(v_*^k, w_*^k) \to (v_*, w_*)$ при $k \to \infty$. Как следует из (63), верно неравенство $T(v_*^k, w_*^k) \le T(v_*, w_*)$ $\forall (v_*, w_*) \in V_* \times W_*$. Так как функционал $T(v, w)$ полунепрерывен снизу на $V \times W$, при $k = k_m \to \infty$ получим

$$T(\bar{v}_*, \overline{w}_*) \le \lim_{m\to\infty} T\big(v_*^{k_m}, w_*^{k_m}\big) \le \lim_{k\to\infty} T\big(v_*^k, w_*^k\big) \le T(v_*, w_*) \quad \forall (v_*, w_*) \in V_* \times W_*.$$

По доказанному выше $(\bar{v}_*, \overline{w}_*) \in V_* \times W_*$. Отсюда следует, что

$$T(\bar{v}_*, \overline{w}_*) = \inf_{(v_*, w_*) \in V_* \times W_*} T(v_*, w_*).$$

Заметим, что $T(v, w)$ — сильно выпуклый функционал, множество $V_* \times W_*$ выпукло, поэтому нижняя грань $T(v, w)$ на $V_* \times W_*$ достигается в единственной точке (v_*, w_*). Тогда $(v_*^k, w_*^k) \to (v_*, w_*)$ при $k \to \infty$. Теорема доказана.

Управление с минимальной нормой. В отличие от результатов из [4] в предложенном выше методе решения задачи управляемости можно найти управления с минимальной нормой.

Кратко сформулируем шаги решения указанной задачи.

1. Находим решение интегрального уравнения (14), (15) путем построения минимизирующей последовательности $\{v_n, w_n\} \subset L_2(Q) \times W$ по алгоритму

$$v_{n+1} = v_n - \alpha_n J_1'(v_n, w_n), \quad w_{n+1} = P_W[w_n - \alpha_n J_2'(v_n, w_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $V = L_2(Q)$. В результате находим $v_* = v_*(\xi, \tau)$, $w_* = w_*(x, \tau)$, $J(v_*, w_*) = 0$.

2. Определим величину

$$r_*^2 = \iint\limits_Q v_*^2(\xi, \tau)\, d\xi d\tau.$$

3. Выберем значение $r = \dfrac{r_*}{2}$. Находим решение задачи (14), (15) путем построения минимизирующей последовательности

$$v_{n+1} = P_V[v_n - \alpha_n J_1'(v_n, w_n)], \quad w_{n+1} = P_W[w_n - \alpha_n J_2'(v_n, w_n)], \quad n = 0, 1, 2, \dots,$$

где $V = \big\{v \in L_2(Q) / \|v\|^2 \le r^2 = \frac{r_*^2}{4}\big\}$. В результате находим $v_{**} = v_{**}(\xi, \tau)$, $w_{**} = w_{**}(x, \tau)$ и $J(v_{**}, w_{**}) = J_{**}$. Здесь возможны случаи: (а) $J_{**} = 0$; (б) $J_{**} > 0$. В случае (а) выбираем новое значение $r = \frac{1}{2}\big(\frac{r_*}{2}\big) = \frac{r_*}{4}$ и решаем задачу (14), (15) с новым значением $r = \frac{r_*}{4}$. В случае (б) выбираем значение $r = \frac{1}{2}\big(r_* + \frac{r_*}{2}\big) = \frac{3r_*}{4}$ и решаем задачу (14), (15), и т. д. Применяя данную процедуру, находим минимальное значение $r > 0$.

Оптимальное быстродействие. Задача оптимального быстродействия может быть решена по следующему алгоритму.

1. Выбирается значение $T = T_0$, где T_0 — заданная величина. Строится последовательность $\{v_n, w_n\} \subset V \times W$ по правилу (32), (33), где

$$V = \left\{ v(\xi, \tau) \in L_2(Q) \mid \int_0^T \int_0^1 v^2(\xi, \tau)\, d\xi d\tau \le r^2 \right\},$$

r — заданное число. Определим $v_* = v_*(\xi, \tau), w* = w_*(x, \tau)$, где $J(v_*, w_*) = J_* = \inf\limits_{(v,w) \in V \times W} J(v, w)$.

2. Если $J_* > 0$, то в качестве нового значения берем $T = 2T_0$, а в случае $J_* = 0$ полагаем $T = T_0/2$.

3. Для новых значений $T = \begin{cases} 2T_0, & \text{если} J_* > 0, \\ T_0/2, & \text{если} J_* = 0, \end{cases}$ строятся последовательности $\{v_n, w_n\}$ и определяются $v_{**} = v_{**}(\xi, \tau)$, $w_{**} = w_{**}(x, \tau)$ и значение $J(v_{**}, w_{**}) = \inf\limits_{(v,w) \in V \times W} J(v, w) = J_{**}(v, w)$. Здесь возможны случаи: (а) $J_{**} > 0$; (б) $J_{**} = 0$. Определяется значение $T = \begin{cases} 3T_0, & \text{если} J_* > 0, \\ T_0/4, & \text{если} J_* = 0. \end{cases}$ Последовательно применяя данную схему вычисления T, находим минимальное значение $T = T_*$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Айсагалиев С. А.* Управляемость некоторой системы дифференциальных уравнений // Дифференц. уравнения. 1991. Т. 27, № 9. С. 1476–1486.
2. *Айсагалиев С. А.* Общее решение одного класса интегральных уравнений // Мат. журн. / Ин-т математики МОиН республики Казахстан. 2005. Т. 5, № 4. С. 7–13.
3. *Айсагалиев С. А. Айсагалиев Т. С.* Методы решения краевых задач. Алматы: Казак. университетi, 2002.
4. *Егоров А. И.* Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. М.: Наука, 1978.
5. *Бутковский А. Г.* Методы управления системами с распределенными параметрами. М.: Наука, 1975.

Статья поступила 18 февраля 2010 г., окончательный вариант — 11 июля 2011 г.

Айсагалиев Серикбай Абдигалиевич, Белогуров Андрей Петрович
Институт математики и механики КазНУ им. аль-Фараби,
пр. аль-Фараби, корп. 13, Алматы 050040, Казахстан
Serikbai.Aisagaliev@kaznu.kz