Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 514.7+517.3+519.2

О ПОВЕРХНОСТНЫХ ИНТЕГРАЛАХ, СВЯЗАННЫХ С РАСПРЕДЕЛЕНИЯМИ СЛУЧАЙНЫХ МАТРИЦ

А. С. Шведов

Аннотация. Рассматривается поверхность, состоящая из положительно полуопределенных $(m \times m)$-матриц ранга r с r различными положительными собственными числами. Строятся первая квадратичная форма и элемент объема этой поверхности. Приводится функция плотности сингулярного гамма-распределения.

Ключевые слова: первая квадратичная форма поверхности, элемент объема поверхности, сингулярное гамма-распределение случайной матрицы.

1. Введение

Будем обозначать через m порядок матрицы и через r — ранг матрицы. Во всей работе m — произвольное натуральное число, r — натуральное число, удовлетворяющее условию $1 \le r \le m$.

Матрицы с действительными элементами $x = \|x_{ij}\|_{i,j=1}^{m}$ можно рассматривать как точки пространства $\mathbb{R}^{m^2}$. Пусть множество $S_{m,r} \subseteq \mathbb{R}^{m^2}$ состоит из точек, отвечающих положительно полуопределенным матрицам x ранга r, имеющим r различных положительных собственных чисел. Разумеется, множество $S_{m,r}$ лежит в $\frac{1}{2}m(m+1)$-мерной плоскости $x_{ij} = x_{ji}$ (при различных i и j).

Когда рассматриваются положительно полуопределенные случайные матрицы, $S_{m,r}$ — это множество, на котором задается функция плотности распределения вероятностей.

Положительно определенные случайные матрицы ($r = m$), имеющие гамма-распределение, играют первостепенную роль во многих приложениях (см., например, [1, 2]). Обзор результатов, относящихся к распределениям невырожденных случайных матриц, дается в книге [3].

В последние два десятилетия значительное внимание исследователей уделяется случаю $r < m$, т. е. распределениям вырожденных случайных матриц (см., например, [4, 5]). Множество $S_{m,r}$, разумеется, играет существенную роль в этих исследованиях.

Один из основных результатов настоящей работы — это утверждение о том, что множество $S_{m,r}$ является $\left(mr - \frac{r(r-1)}{2}\right)$-мерной поверхностью в пространстве $\mathbb{R}^{m^2}$. В разд. 2 дается явное параметрическое задание этой поверхности. В разд. 3 работы строятся первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ и элемент объема этой поверхности и дается сравнение полученного выражения для элемента объема с выражением из [4].

Напомним, что одномерная функция плотности гамма-распределения имеет вид $\frac{\sigma}{\Gamma(a)}(\sigma x)^{a-(m+1)/2}e^{-\sigma x}$, $x > 0$. Здесь σ и a — положительные действительные числа, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция; $m = 1$, когда мы говорим об *одномерной* *функции плотности.* Для несингулярного случая (т. е. для случая $r = m$) хорошо известны матричные аналоги гамма-распределений (см., например, [3]).

Для объяснения результата, содержащегося в данной работе, используем приведенную формулу для одномерной функции плотности. Точные формулировки для случая, когда x — матрица, даются в тексте. И в [4, 5], и в других работах, где рассматриваются сингулярные гамма-распределения случайных матриц, берется лишь значение $a = \frac{r}{2}$. Это существенно связано с применяемым методом. Распределения, изучаемые в этих работах, относятся к классу сингулярных распределений Уишарта. Как известно, распределения Уишарта — это частный случай матричных гамма-распределений.

В разд. 4 настоящей работы строится функция плотности сингулярного гамма-распределения случайной матрицы при произвольном действительном $a > r - \frac{m+1}{2}$. Но наше выражение для функции плотности не является обобщением соответствующей формулы из [4, 5], поскольку в них σ — матрица, положительно определенная или более общего вида, а у нас σ — положительное число.

2. Параметризация поверхности $S_{m,r}$

Пусть X — положительно полуопределенная матрица порядка m ранга r, $1 \le r \le m$; $\lambda_1, \dots, \lambda_r$ — собственные числа матрицы X, удовлетворяющие условию $\lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0$, $L = \mathrm{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r)$ — диагональная матрица порядка r. Тогда существует $(m \times r)$-матрица H, столбцы которой $h_1, \dots, h_r$ представляют собой ортонормированную систему m-мерных векторов, такая, что

$$X = HLH'.$$

Этот результат является несложным следствием того факта, что любая симметричная матрица A представима в виде $A = T\Lambda T'$, где T — ортогональная матрица, Λ — диагональная матрица, на главной диагонали которой стоят собственные числа матрицы A.

Нетрудно увидеть, что если у любого из столбцов матрицы H заменить знаки всех элементов противоположными, то матрица X не изменится.

Оказывается, что этим произвол в выборе матрицы H и ограничивается. Действительно, пусть J — некоторая $(m \times r)$-матрица, столбцы которой представляют собой ортонормированную систему m-мерных векторов, и

$$HLH' = JLJ'. \tag{1}$$

Умножив последнее равенство на H' слева и на J справа, получаем

$$LC = CL, \tag{2}$$

где $C = H'J$ — матрица порядка r с элементами c_{ij}. Из (2) следует, что при любых i и j

$$\lambda_i c_{ij} = c_{ij} \lambda_j.$$

Отсюда вытекает, что $c_{ij} = 0$ при $i \ne j$, поскольку $\lambda_i \ne \lambda_j$ при $i \ne j$, т. е. матрица C диагональная.

Равенство (1) можно переписать в виде

$$HL^{1/2}(HL^{1/2})' = JL^{1/2}(JL^{1/2})'.$$

Тогда существует ортогональная матрица T порядка r такая, что

$$HL^{1/2}T = JL^{1/2}$$

(см., например, [6, с. 589]). Умножив последнее равенство на H' слева и на $L^{-1/2}$ справа, получаем
$$L^{1/2}TL^{-1/2} = C.$$
Отсюда следует, что матрица T диагональная. Поскольку эта матрица ортогональная, на ее диагонали стоят либо $+1$, либо -1. Стало быть, и на диагонали матрицы C стоят либо $+1$, либо -1, т. е. матрица H по матрице X выбирается единственным способом с точностью до замены каждого из векторов h_j на $-h_j$.

Отметим, наконец, что любая матрица HLH', где матрицы H и L имеют указанный выше вид, является положительно полуопределенной матрицей ранга r. В [7] матрицы L и H называются полярными координатами матрицы X.

Основная трудность при параметризации поверхности $S_{m,r}$ состоит в параметризации матрицы H. Рассмотрим сначала случай $r = m$.

Пусть $V_0 = \{v_0^1, \dots, v_0^m\}$ — ортонормированный базис пространства $\mathbb{R}^m$; h_1 — m-мерный вектор единичной длины; $\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,m-1}$ — сферические координаты вектора h_1, т. е.
$$h_1 = \sum_{j=1}^{m} \left(\cos\theta_{1,j} \prod_{k=1}^{j-1} \sin\theta_{1,k} \right) v_0^j, \tag{3}$$
где $\theta_{1,m} = 0$.

Как и везде в дальнейшем, считается, что произведение равно 1, если нижний индекс больше верхнего, в данном случае $1 > j-1$.

Построим ортонормированный базис $h_1, v_1^2, \dots, v_1^m$ пространства $\mathbb{R}^m$. При $j = 2, \dots, m$ вектор v_1^j строится из вектора h_1 при помощи следующего алгоритма. Во-первых, компоненты вектора h_1 в базисе V_0 с номерами, меньшими $j-1$, заменяются нулями. Затем в произведениях, составляющих остальные компоненты вектора h_1, делаются следующие изменения:

1) $\sin\theta_{1,i}$ при любом $i < j-1$ заменяется на 1;
2) $\sin\theta_{1,j-1}$ заменяется на $\cos\theta_{1,j-1}$;
3) $\cos\theta_{1,j-1}$ заменяется на $(-\sin\theta_{1,j-1})$.

Например, при $m = 4$
$$h_1 = \begin{pmatrix} \cos\theta_{1,1} \\ \sin\theta_{1,1}\cos\theta_{1,2} \\ \sin\theta_{1,1}\sin\theta_{1,2}\cos\theta_{1,3} \\ \sin\theta_{1,1}\sin\theta_{1,2}\sin\theta_{1,3} \end{pmatrix}, \quad v_1^2 = \begin{pmatrix} -\sin\theta_{1,1} \\ \cos\theta_{1,1}\cos\theta_{1,2} \\ \cos\theta_{1,1}\sin\theta_{1,2}\cos\theta_{1,3} \\ \cos\theta_{1,1}\sin\theta_{1,2}\sin\theta_{1,3} \end{pmatrix},$$
$$v_1^3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\theta_{1,2} \\ \cos\theta_{1,2}\cos\theta_{1,3} \\ \cos\theta_{1,2}\sin\theta_{1,3} \end{pmatrix}, \quad v_1^4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -\sin\theta_{1,3} \\ \cos\theta_{1,3} \end{pmatrix}.$$

Ортонормированный базис $\{v_1^2, \dots, v_1^m\}$ пространства $\mathbb{R}^{m-1}$ обозначим через V_1. Пусть h_2 — вектор единичной длины из этого пространства; $\theta_{2,2}, \dots, \theta_{2,m-1}$ — сферические координаты вектора h_2, т. е.
$$h_2 = \sum_{j=2}^{m} \left(\cos\theta_{2,j} \prod_{k=2}^{j-1} \sin\theta_{2,k} \right) v_1^j,$$
где $\theta_{2,m} = 0$.

Ортонормированный базис $h_2, v_2^3, \ldots, v_2^m$ пространства $\mathbb{R}^{m-1}$ строится при помощи того же алгоритма, что и ортонормированный базис $h_1, v_1^2, \ldots, v_1^m$ пространства $\mathbb{R}^m$, как это описано выше. Ортонормированный базис $\left\{v_2^3, \ldots, v_2^m\right\}$ пространства $\mathbb{R}^{m-2}$ обозначим через V_2.

Продолжая таким же образом, приходим к ортонормированному базису $h_{m-2}, v_{m-2}^{m-1}, v_{m-2}^m$ пространства $\mathbb{R}^3$. Пусть h_{m-1} — вектор единичной длины из пространства $\mathbb{R}^2$ с базисом $V_{m-2} = \left\{v_{m-2}^{m-1}, v_{m-2}^m\right\}$; $\theta_{m-1,m-1}$ — сферическая координата вектора h_{m-1}, т. е.

$$h_{m-1} = \cos\theta_{m-1,m-1} v_{m-2}^{m-1} + \sin\theta_{m-1,m-1} v_{m-2}^m. \tag{4}$$

Последний вектор будем строить по формуле

$$h_m = -\sin\theta_{m-1,m-1} v_{m-2}^{m-1} + \cos\theta_{m-1,m-1} v_{m-2}^m. \tag{5}$$

Пренебрегая многообразием меньшей размерности (так как нашей целью является подсчет интегралов), будем считать, что при любом $q = 1, \ldots, m-1$

$$0 < \theta_{q,j} < \pi \quad \text{при } q \le j < m-1, \quad -\pi < \theta_{q,m-1} < \pi. \tag{6}$$

Остается исключить векторы h_q, которые имеют противоположные направления, точнее, выбрать из любых двух таких векторов один. Для этого заметим, что

$$h_q = \sum_{j=q}^{m} \left(\cos\theta_{q,j} \prod_{k=q}^{j-1} \sin\theta_{q,k} \right) v_{q-1}^j, \tag{7}$$

где $\theta_{q,m} = 0$. Компонента, соответствующая вектору v_{q-1}^q, равна $\cos\theta_{q,q}$. Будем считать данную компоненту при любом $q = 1, \ldots, m-1$ положительной. Это накладывает более жесткие ограничения на некоторые из углов:

$$0 < \theta_{q,q} < \frac{\pi}{2} \quad \text{при } 1 \le q < m-1, \quad -\frac{\pi}{2} < \theta_{m-1,m-1} < \frac{\pi}{2}.$$

Выбор одного из двух возможных направлений вектора h_m определяется тем, что в базисе V_{m-2} этот вектор получается из вектора h_{m-1} поворотом против часовой стрелки, а не по часовой стрелке.

Параметризация матрицы H при $r = m$ проведена. В случае $r < m$ нужны лишь векторы $h_1, \ldots, h_r$. Поэтому при параметризации используются только углы $\theta_{q,j}$ с $q \le r$.

При $r < m$ размерность поверхности $S_{m,r}$ равна числу параметров

$$\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m-1}, \ldots, \theta_{r,r}, \ldots, \theta_{r,m-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_r,$$

т. е. равна

$$mr - \frac{r(r-1)}{2}. \tag{8}$$

При $r = m$ размерность поверхности $S_{m,r}$ равна числу параметров

$$\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m-1}, \ldots, \theta_{m-1,m-1}, \lambda_1, \ldots, \lambda_m.$$

Нетрудно увидеть, что и в этом случае размерность выражается формулой (8).

Для дальнейшего нам удобно рассмотреть два прямоугольных параллелепипеда Θ_{mr} и Θ_{mr}^0 в пространстве $\mathbb{R}^{mr-r(r+1)/2}$. Пусть $s = \min(r, m-1)$. Точки каждого из рассматриваемых параллелепипедов имеют координаты

$$(\theta_{1,1}, \ldots, \theta_{1,m-1}, \ldots, \theta_{s,s}, \ldots, \theta_{s,m-1}).$$

Границы изменения координат для параллелепипеда Θ_{mr} при $q = 1, \dots, s$ определяются соотношениями (6). Границы изменения координат для параллелепипеда Θ^0_{mr} следующие:

$$0 < \theta_{q,q} < \pi/2 \text{ при } q < m-1, \quad 0 < \theta_{q,j} < \pi \text{ при } q < j < m-1,$$

$$-\pi < \theta_{q,m-1} < \pi \text{ при } q < m-1, \quad -\pi/2 < \theta_{m-1,m-1} < \pi/2.$$

Условие на $\theta_{m-1,m-1}$, очевидно, должно включаться лишь при $s = m-1$. Из приведенных соотношений следует, что $\Theta^0_{mr} \subset \Theta_{mr}$.

Кроме того, рассмотрим область $\Lambda_r = \{(\lambda_1, \dots, \lambda_r) : \lambda_1 > \dots > \lambda_r > 0\}$ в пространстве $\mathbb{R}^r$. Для согласования с обозначениями из [8] положим $U' = \Theta^0_{mr} \times \Lambda_r$. Отображение $\varphi : U' \to \mathbb{R}^{m^2}$ задается формулой HLH'.

Использование сферических координат в связи с ротационной инвариантностью задачи при изучении распределений случайных матриц обсуждается в [9]. Однако подход из работы [9] нельзя назвать близким к нашему. Ключевым у нас является указание явных формул для векторов из базисов V_q, $q = 1, \dots, m-2$, что позволяет задать поверхность $S_{m,r}$ аналитически.

3. Первая квадратичная форма и элемент объема поверхности $S_{m,r}$

Положим $M = mr - \frac{r(r-1)}{2}$, $N = m^2$. Координаты точки в пространстве $\mathbb{R}^M$ будем обозначать через $y^1, \dots, y^M$, координаты точки в пространстве $\mathbb{R}^N$ — через $x^1, \dots, x^N$.

Как и в [8], при целом неотрицательном p через $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ обозначим пространство p-линейных отображений $(\mathbb{R}^N)^p \to \mathbb{R}$. Через $\mathscr{A}_p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ обозначим подпространство пространства $\mathscr{L}_p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, состоящее из кососимметричных отображений.

Ограничимся рассмотрением дифференциальных p-форм, определенных на всем N-мерном пространстве $\omega : \mathbb{R}^N \to \mathscr{A}_p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Пусть U' — открытое подмножество в $\mathbb{R}^M$. Гладкое отображение $\varphi : U' \to \mathbb{R}^N$ и дифференциальная p-форма ω порождают дифференциальную p-форму $\varphi^*\omega : U' \to \mathscr{A}_p(\mathbb{R}^M; \mathbb{R})$. Нам понадобятся не только дифференциальные p-формы ω, но и несколько более общие формы (гладкие отображения) $\mathbb{R}^N \to \mathscr{L}_p(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$, а также применение отображения φ^* к таким формам. Свойства отображения φ^*, которые в [8, гл. 3, § 2.9] устанавливаются для случая дифференциальных p-форм, остаются верными и для этого более общего случая.

Отображение φ задает M-мерную поверхность в $\mathbb{R}^N$: $x^k = x^k(y^1, \dots, y^M)$, $k = 1, \dots, N$. Если рассматривать x^k как функцию из U' в $\mathbb{R}$, то

$$dx^k = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\, dy^i. \tag{9}$$

Если рассматривать x^k как дифференциальную 0-форму в $\mathbb{R}^N$, то

$$\varphi^*(dx^k) = \sum_{i=1}^{M} \frac{\partial x^k}{\partial y^i}\, dy^i. \tag{10}$$

Через d в (9) и (10) обозначается операция внешнего дифференцирования.

Пусть α и β — элементы пространства $\mathscr{L}_1(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$. Через $\alpha \otimes \beta$ будем обозначать их прямое произведение, то есть билинейное отображение, значение которого на паре элементов $\xi_1 \in \mathbb{R}^N$, $\xi_2 \in \mathbb{R}^N$ определяется по формуле

$(\alpha \otimes \beta)(\xi_1, \xi_2) = \alpha(\xi_1) \cdot \beta(\xi_2)$. Через $\alpha \odot \beta$ будем обозначать симметризованное прямое произведение:

$$\alpha \odot \beta = \frac{1}{2}(\alpha \otimes \beta + \beta \otimes \alpha).$$

Под первой квадратичной формой пространства $\mathbb{R}^N$ будем понимать отображение $\mathbb{R}^N \to \mathscr{L}_2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ вида

$$\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k.$$

Введем обозначение

$$g_{ij} = \sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j}, \quad i = 1, \ldots, M, \ j = 1, \ldots, M.$$

Тогда

$$\varphi^* \left(\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k \right) = \sum_{k=1}^{N} \varphi^*(dx^k) \odot \varphi^*(dx^k)$$
$$= \sum_{k=1}^{N} \left(\sum_{i=1}^{M} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \, dy^i \right) \odot \left(\sum_{j=1}^{M} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \, dy^j \right) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \left(\sum_{k=1}^{N} \frac{\partial x^k}{\partial y^i} \frac{\partial x^k}{\partial y^j} \right) dy^i \odot dy^j,$$

т. е.

$$\varphi^* \left(\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k \right) = \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} g_{ij} \, dy^i \odot dy^j. \tag{11}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (11), это первая квадратичная форма поверхности $\varphi(U')$ (см. [10, гл. II, § 7]).

Рассмотрим матрицу $G = \|g_{ij}\|_{i,j=1}^{M}$. *Элементом объема поверхности* $\varphi(U')$ называется дифференциальная M-форма $\sqrt{\det(G)} \, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^M$ в U' ($\wedge$ — знак внешнего умножения дифференциальных форм). Иногда элементом объема называют дифференциальную M-форму ω в U, для которой $\varphi^* \omega = \sqrt{\det(G)} \, dy^1 \wedge \cdots \wedge dy^M$. Но мы будем придерживаться терминологии, принятой, например, в [7], и называть *элементом объема* форму в U'.

В [7] используется следующий способ для нахождения элемента объема поверхности. Предположим, что удается найти дифференциальные 1-формы $\omega^l = \sum\limits_{j=1}^{M} a_j^l \, dy^j$, $l = 1, \ldots, M$, в U' такие, что

$$\varphi^* \left(\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k \right) = \sum_{l=1}^{M} \omega^l \odot \omega^l \tag{12}$$

(a_j^l — гладкие функции, определенные в U' и принимающие действительные значения). Тогда

$$\varphi^* \left(\sum_{k=1}^{N} dx^k \odot dx^k \right) = \sum_{l=1}^{M} \left(\sum_{i=1}^{M} a_i^l dy^i \right) \odot \left(\sum_{j=1}^{M} a_j^l dy^j \right)$$
$$= \sum_{i=1}^{M} \sum_{j=1}^{M} \left(\sum_{l=1}^{M} a_i^l a_j^l \right) dy^i \odot dy^j.$$

Тем самым для матрицы $A = \left\|a_i^l\right\|_{i,l=1}^M$ имеет место соотношение $G = AA'$. Поэтому $|\det(A)| = \sqrt{\det(G)}$. С другой стороны, из выражения $\omega^1, \dots, \omega^M$ через $dy^1, \dots, dy^M$ следует, что

$$\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^M = \det(A) dy^1 \wedge \dots \wedge dy^M. \tag{13}$$

Если функция $\det(A)$ не меняет знака в U', то этим знаком можно пренебречь и считать элементом объема поверхности $\varphi(U')$ дифференциальную M-форму $\omega^1 \wedge \dots \wedge \omega^M$.

Отметим также способ представления первой квадратичной формы пространства $\mathbb{R}^{m^2}$ в виде следа некоторой матрицы (см. [7]). Наряду с матрицей $X = \|x_{ij}\|_{i,j=1}^m$ рассмотрим матрицу $dX = \|dx_{ij}\|_{i,j=1}^m$, элементами которой являются дифференциальные 1-формы. Умножение матриц, элементами которых являются дифференциальные формы, производится по обычным правилам, но при умножении элементов матриц друг на друга используется соответствующее произведение дифференциальных форм.

Элемент (i,k) матрицы $dX \odot dX'$ — это $\sum\limits_{j=1}^m dx_{ij} \odot dx_{kj}$. Поэтому

$$\operatorname{tr}(dX \odot dX') = \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^m dx_{ij} \odot dx_{ij}. \tag{14}$$

Выражение, стоящее в правой части равенства (14), является первой квадратичной формой пространства $\mathbb{R}^{m^2}$.

Несколько изменим обозначения, использовавшиеся в разд. 2. Будем считать, что в разложении

$$X = HLH' \tag{15}$$

H — $(m \times m)$-матрица со столбцами $h_1, \dots, h_m$, $L = \operatorname{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_r, 0, \dots, 0)$ — диагональная $(m \times m)$-матрица.

Все элементы матрицы X должны быть функциями аргументов

$$\theta_{1,1}, \dots, \theta_{1,m-1}, \dots, \theta_{s,s}, \dots, \theta_{s,m-1}, \lambda_1, \dots, \lambda_r. \tag{16}$$

Поэтому для $q > r$ при построении векторов h_q углы $\theta_{q,j}$ должны быть каким-то образом зафиксированы в пределах границ, указанных в разд. 2 для параллелепипеда Θ_{mm}^0. Таким образом, и при $q > r$ компоненты векторов h_q являются функциями лишь аргументов (16). Нетрудно увидеть, что при первом и втором определениях матриц H и L матрица X остается одной и той же.

Согласно (11) и (14) первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ записывается в виде $\varphi^*(\operatorname{tr}(dX \odot dX'))$ или в виде $\operatorname{tr}(dX \odot dX')$ в зависимости от того, в каком смысле понимается обозначение x_{ij} (ср. (9), (10)). Учитывая симметричность матрицы X, приходим к тому, что первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ имеет вид $\operatorname{tr}(dX \odot dX)$.

При умножении на 0-форму будем использовать знак произведения $\cdot$ или вообще опускать знак произведения. Из соотношения $HH' = I$, где I — единичная $(m \times m)$-матрица, получаем $d(HH') = 0$, откуда следует, что

$$dH' \cdot H + H' dH = 0. \tag{17}$$

Из соотношения $(H'dH)' = dH' \cdot H$ и (17) вытекает $H'dH = -(H'dH)'$. Это означает, что матрица $H'dH$ кососимметричная, т. е.

$$h_i' dh_j = -h_j' dh_i \tag{18}$$

при любых $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, m$.

Из (15) следует, что

$$dX = dH \cdot L \cdot H' + H \cdot dL \cdot H' + H \cdot L \cdot dH'.$$

Чтобы преобразовать последнее слагаемое, воспользуемся (17). Имеем

$$dH' = dH' \cdot H \cdot H' = -H' dH \cdot H'.$$

Поэтому

$$dX = (dH \cdot L + H \cdot dL - H \cdot L \cdot H' dH) H'. \tag{19}$$

Используя то, что след произведения двух матриц не зависит от порядка сомножителей, получаем выражение для первой квадратичной формы поверхности $S_{m,r}$:

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(dX \odot dX) &= \operatorname{tr}(HH'dX \odot HH'dX) \\ &= \operatorname{tr}(H'dX \odot HH'dX \cdot H) = \operatorname{tr}(H'dX \cdot H \odot H'dX \cdot H).\end{aligned}$$

С учетом (19) первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ имеет вид $\operatorname{tr}(\Omega \odot \Omega)$, где введено обозначение

$$\Omega = H'dH \cdot L + dL - LH'dH.$$

Будем считать, что $\lambda_{r+1} = \dots = \lambda_m = 0$. При умножении матрицы $H'dH$ на диагональную матрицу L справа на λ_j умножается j-й столбец матрицы $H'dH$. При умножении матрицы $H'dH$ на диагональную матрицу L слева на λ_i умножается i-я строка матрицы $H'dH$. Поэтому (i, j)-й элемент матрицы $H'dH \cdot L - LH'dH$ равен $\lambda_j h_i' dh_j - \lambda_i h_i' dh_j$. Соответственно для элемента ω_{ij} матрицы Ω получаем следующие выражения:

$$\omega_{ij} = \begin{cases} (\lambda_j - \lambda_i) h_i' dh_j + \delta_{ij} d\lambda_i & \text{при } 1 \le i \le r,\ 1 \le j \le r; \\ -\lambda_i h_i' dh_j & \text{при } 1 \le i \le r,\ j > r; \\ \lambda_j h_i' dh_j & \text{при } i > r,\ 1 \le j \le r; \\ 0 & \text{при } i > r,\ j > r, \end{cases}$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \ne j$.

Элемент матрицы $\Omega \odot \Omega$, стоящий на месте (i, k), — это $\sum\limits_{j=1}^{m} \omega_{ij} \odot \omega_{jk}$. При нахождении $\operatorname{tr}(\Omega \odot \Omega)$ используются лишь элементы матрицы с $i = k$.

В дальнейшем считаем, что сумма равна 0, если нижняя граница суммирования больше верхней границы.

Элемент матрицы $\Omega \odot \Omega$, находящийся на месте (i, k), при $1 \le i \le r$, $1 \le k \le r$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{r} ((\lambda_j - \lambda_i) h_i' dh_j + \delta_{ij} d\lambda_i) \odot ((\lambda_k - \lambda_j) h_j' dh_k + \delta_{jk} d\lambda_j) \\ + \sum_{j=r+1}^{m} (-\lambda_i h_i'\, dh_j) \odot (\lambda_k h_j'\, dh_k),$$

а при $i > r$, $k > r$ — вид

$$\sum_{j=1}^{r} (\lambda_j h_i'\, dh_j) \odot (-\lambda_j h_j'\, dh_k).$$

Тогда первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ представляется в виде

$$\operatorname{tr}(\Omega \odot \Omega) = A_1 + A_2 + A_3,$$

где (выражения для A_2 и A_3 преобразуются с учетом (18))

$$A_1 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=1}^{r} ((\lambda_j - \lambda_i) h_i' \, dh_j + \delta_{ij} \, d\lambda_i) \odot ((\lambda_i - \lambda_j) h_j' dh_i + \delta_{ji} \, d\lambda_j),$$

$$A_2 = \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{m} (\lambda_i h_i' \, dh_j) \odot (\lambda_i h_i' \, dh_j),$$

$$A_3 = \sum_{i=r+1}^{m} \sum_{j=1}^{r} (\lambda_j h_j' \, dh_i) \odot (\lambda_j h_j' \, dh_i).$$

Вновь используя (18), получаем

$$A_1 = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=i+1}^{r} ((\lambda_i - \lambda_j) h_j' \, dh_i) \odot ((\lambda_i - \lambda_j) h_j' \, dh_i) + \sum_{i=1}^{r} d\lambda_i \odot d\lambda_i.$$

Поменяв в выражении для A_3 местами i и j, имеем

$$A_2 + A_3 = 2 \sum_{i=1}^{r} \sum_{j=r+1}^{m} (\lambda_i h_j' \, dh_i) \odot (\lambda_i h_j' \, dh_i).$$

Коэффициент 2, возникающий перед суммами, можно внести в выражения для сомножителей в степени 1/2. Также $\lambda_j = 0$ при $j > r$. Таким образом, доказана следующая

Теорема 1. *Первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ имеет вид*

$$\sum_{i=1}^{r} \sum_{j=i+1}^{m} \psi_{ij} \odot \psi_{ij} + \sum_{i=1}^{r} d\lambda_i \odot d\lambda_i,$$

где $\psi_{ij} = 2^{1/2} (\lambda_i - \lambda_j) h_j' \, dh_i$.

Из теоремы 1 следует, что первая квадратичная форма поверхности $S_{m,r}$ представима в виде (12), дифференциальная M-форма из левой части равенства (13) — в виде

$$2^{(mr - r(r+1)/2)/2} \prod_{i=1}^{r} \lambda_i^{m-r} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{r} (\lambda_i - \lambda_j) \bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j' dh_i) \bigwedge_{i=1}^{r} d\lambda_i. \tag{20}$$

Будет ли знак коэффициента дифференциальной M-формы, стоящей в правой части равенства (13), постоянным в области U'? Если да, то дифференциальная M-форма (20) является элементом объема поверхности $S_{m,r}$. Положительный ответ на вопрос о постоянстве знака данного коэффициента в области U' дает теорема 2.

Похожее на (20) выражение для элемента объема поверхности $S_{m,r}$ содержит теорема 2 из работы [4]. Единственное отличие заключается в том, что вместо коэффициента $2^{(mr - r(r+1)/2)/2}$ в работе [4] стоит коэффициент 2^{-r} (в наших обозначениях). Поскольку явно область изменения параметров и функция, задающая поверхность $S_{m,r}$, в работе [4] не указываются, нельзя однозначно ответить на вопрос о правильности результата из работы [4]. Отметим все же, что основной переход в доказательстве теоремы 2 в работе [4] делается «апелляцией к аналогии» со случаем $r = m$.

Теорема 2. *Имеет место равенство*

$$\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=i+1}^{m}(h_j'\,dh_i)=\Phi(\theta)\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=i}^{m-1}d\theta_{i,j},$$

где

$$|\Phi(\theta)|=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=i}^{m-2}(\sin\theta_{i,j})^{m-j-1},$$

через θ обозначается вектор с координатами $\theta_{i,j}$, $i=1,\ldots,s$; $j=i,\ldots,m-1$.

Доказательство. Рассмотрим дифференциальную форму

$$\bigwedge_{j=2}^{m}(h_j'\,dh_1).$$

Применяя формулу (9) к каждой из компонент вектора h_1, из разложения (3) нетрудно увидеть, что

$$dh_1=\sum_{p=2}^{m}v_1^p\omega_{1,p-1},$$

где

$$\omega_{1,p-1}=\left(\prod_{k=1}^{p-2}\sin\theta_{1,k}\right)\,d\theta_{1,p-1}.$$

Пусть

$$h_j=\sum_{p=2}^{m}h_j^p v_1^p,\quad j=2,\ldots,m.$$

В силу ортонормированности базиса V_1

$$h_j'dh_1=\sum_{p=2}^{m}h_j^p\omega_{1,p-1}.$$

Следовательно,

$$\bigwedge_{j=2}^{m}(h_j'\,dh_1)=\det\left(\left\|h_j^p\right\|_{j,p=2}^{m}\right)\bigwedge_{p=2}^{m}\omega_{1,p-1}=\varepsilon\bigwedge_{p=2}^{m}\omega_{1,p-1},$$

где $\varepsilon=+1$ или -1.

Из разложения (7) следует, что при $1<q<m-1$

$$dh_q=\sum_{p=q+1}^{m}v_q^p\left(\prod_{k=q}^{p-2}\sin\theta_{q,k}\right)\,d\theta_{q,p-1}+\ldots.$$

Многоточие означает члены, содержащие дифференциальные 1-формы $\theta_{i,k}$ с $i<q$. Эти члены не влияют на вид дифференциальной формы $\bigwedge_{i=1}^{r}\bigwedge_{j=i+1}^{m}(h_j'dh_i)$ из-за условия кососимметричности. Введя в рассмотрение дифференциальные 1-формы

$$\omega_{q,p-1}=\left(\prod_{k=q}^{p-2}\sin\theta_{q,k}\right)\,d\theta_{q,p-1},\quad p=q+1,\ldots,m,$$

получаем более короткую запись

$$dh_q = \sum_{p=q+1}^{m} v_q^p \omega_{q,p-1} + \dots .$$

Пусть

$$h_j = \sum_{p=q+1}^{m} h_j^p v_q^p, \quad j = q+1, \dots, m.$$

В силу ортонормированности базиса V_q

$$h_j' dh_q = \sum_{p=q+1}^{m} h_j^p \omega_{q,p-1} + \dots .$$

Следовательно,

$$\bigwedge_{j=q+1}^{m} (h_j'\, dh_q) = \det\left(\left\|h_j^p\right\|_{j,p=q+1}^{m}\right) \bigwedge_{p=q+1}^{m} \omega_{q,p-1} = \varepsilon \bigwedge_{p=q+1}^{m} \omega_{q,p-1},$$

где $\varepsilon = +1$ или -1.

Наконец, при $q = m-1$ (этот случай возможен при $r = m-1$ или $r = m$) из (4) следует, что

$$dh_{m-1} = v_{m-2}^{m-1}(-\sin\theta_{m-1,m-1})\, d\theta_{m-1,m-1} + v_{m-2}^{m} \cos\theta_{m-1,m-1}\, d\theta_{m-1,m-1} + \dots .$$

Воспользовавшись (5), получаем $h_m' dh_{m-1} = d\theta_{m-1,m-1} + \dots$. Теорема 2 доказана.

При $r = 1$ теорема 2 доказана в [11, с. 58]. Также в [11] получены результаты, показывающие, какую структуру имеет функция $\Phi(\theta)$ при произвольном r.

Как уже сказано выше, при $q > r$ углы $\theta_{q,j}$ должны быть каким-то образом зафиксированы в пределах границ, указанных в разд. 2 для параллелепипеда Θ_{mm}^0. Из доказанного следует, что дифференциальная форма $\bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j'\, dh_i)$ не зависит от того, как именно эти углы выбраны. Этот же факт устанавливается и в [11].

В заключительной части данного раздела вычисляются интегралы от дифференциальной формы $\bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j'\, dh_i)$ по параллелепипедам Θ_{mr} и Θ_{mr}^0.

Лемма 1. *При целом неотрицательном p*

$$\int_0^{\pi} \sin^p x\, dx = \sqrt{\pi} \frac{\Gamma\left(\frac{p}{2} + \frac{1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{p}{2} + 1\right)}.$$

Доказательство леммы 1 при $p > 0$ основано на формуле

$$\left(\frac{\sin^{p-1} x \cos x}{p}\right)' = \frac{p-1}{p} \sin^{p-2} x - \sin^p x.$$

Дальнейшие выкладки проводятся несколько по-разному при четных и нечетных p, но в итоге получается один и тот же результат.

Пусть k — натуральное число. Рассмотрим функцию

$$\Gamma_k(x) = \pi^{k(k-1)/4} \prod_{j=1}^{k} \Gamma\left(x + \frac{1}{2} - \frac{j}{2}\right), \quad x > \frac{k-1}{2}.$$

Лемма 2. *Имеет место равенство*

$$\left|\int\limits_{\Theta_{mr}} \bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j' \, dh_i)\right| = \frac{2^s \pi^{mr/2}}{\Gamma_r\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Доказательство леммы 2 проводится путем прямых выкладок с использованием теоремы 2 и леммы 1.

Теорема 3. *Имеет место равенство*

$$\left|\int\limits_{\Theta_{mr}^0} \bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} \left(h_j' \, dh_i\right)\right| = \frac{\pi^{mr/2}}{\Gamma_r\left(\frac{m}{2}\right)}.$$

Результат следует из соотношения

$$\int\limits_0^{\pi/2} \sin^p x dx = \frac{1}{2} \int\limits_0^{\pi} \sin^p x dx,$$

теоремы 2 и леммы 2.

Из известных результатов результат теоремы 3 наиболее близок, по-видимому, к теореме 2.1.15 из книги [6].

4. Сингулярное гамма-распределение случайной матрицы

Пусть σ и b — действительные числа, $\sigma > 0$, $b > \frac{r-1}{2}$.

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\int\limits_{\Lambda_r} \exp(-\sigma(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)) \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^{b-(r+1)/2} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{r} (\lambda_i - \lambda_j) \, d\lambda_1 \dots d\lambda_r$$
$$= \frac{\Gamma_r(b) \cdot \Gamma_r\left(\frac{r}{2}\right)}{\pi^{r^2/2} \cdot \sigma^{rb}}.$$

Доказательство. Обозначим через D область в пространстве $\mathbb{R}^{r(r+1)/2}$, состоящую из точек $(x_{11}, \dots, x_{1r}, x_{22}, \dots, x_{2r}, \dots, x_{rr})$ таких, что матрица $x = \|x_{ij}\|_{i,j=1}^{r}$ положительно определенная. Тогда

$$\int\limits_D \operatorname{etr}(-\sigma x)(\det x)^{b-(r+1)/2} \, dx_{11} \dots dx_{1r} \, dx_{22} \dots dx_{2r} \dots dx_{rr} = \frac{\Gamma_r(b)}{\sigma^{rb}}$$

(см., например, [3, с. 122]), где etr означает exp(tr). Из геометрических соображений и этой формулы следует, что

$$\int\limits_{S_{r,r}} \operatorname{etr}(-\sigma X)(\det X)^{b-(r+1)/2} \, dS = 2^{r(r-1)/4} \cdot \frac{\Gamma_r(b)}{\sigma^{rb}},$$

где dS означает, что интегрирование ведется по $\frac{1}{2}r(r+1)$-мерной площади поверхности $S_{r,r}$. Воспользовавшись введенной параметризацией поверхности $S_{r,r}$

и выражением (20) для элемента объема, находим

$$2^{r(r-1)/4} \int\limits_{\Theta^0_{rr} \times \Lambda_r} \exp\left(-\sigma\left(\lambda_1 + \dots + \lambda_r\right)\right)$$

$$\times \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^{b-(r+1)/2} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{r} (\lambda_i - \lambda_j) \bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{r} (h_j' \, dh_i) \bigwedge_{i=1}^{r} d\lambda_i = 2^{r(r-1)/4} \cdot \frac{\Gamma_r(b)}{\sigma^{rb}}.$$

Применение теоремы 3 завершает доказательство. Лемма 3 доказана.

Результат леммы 3 не является новым. Фактически он совпадает с формулой (11) в [12, § 13.3]. Но при помощи ранее доказанного в настоящей работе этот результат получается достаточно легко, поэтому лемма 3 приводится с доказательством.

При $a > r - \frac{m+1}{2}$ положим

$$c_{mr}(a, \sigma) = 2^{-(mr - r(r+1)/2)/2} \cdot \frac{\sigma^{r(a+(m-r)/2)}}{\pi^{r(m-r)/2}} \cdot \frac{\Gamma_r\left(\frac{m}{2}\right)}{\Gamma_r\left(a + \frac{m-r}{2}\right) \Gamma_r\left(\frac{r}{2}\right)}.$$

Набор переменных (16) обозначим через (θ, λ) и на поверхности $S_{m,r}$ определим функцию

$$f_{mr}(\theta, \lambda; a, \sigma) = c_{mr}(a, \sigma) \exp(-\sigma(\lambda_1 + \dots + \lambda_r)) \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^{a-(m+1)/2}.$$

Теорема 4. *Интеграл от функции $f_{mr}(\theta, \lambda; a, \sigma)$ по поверхности $S_{m,r}$ равен* 1.

Доказательство. Используя выражение (20) для элемента объема поверхности $S_{m,r}$, получаем для данного интеграла выражение

$$c_{mr}(a, \sigma) 2^{(mr - r(r+1)/2)/2} \int\limits_{\Theta^0_{mr} \times \Lambda_r} \exp(-\sigma(\lambda_1 + \dots + \lambda_r))$$

$$\times \left(\prod_{i=1}^{r} \lambda_i\right)^{m-r+a-(m+1)/2} \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=i+1}^{r} (\lambda_i - \lambda_j) \cdot \bigwedge_{i=1}^{r} \bigwedge_{j=i+1}^{m} (h_j' \, dh_i) \bigwedge_{i=1}^{r} d\lambda_i.$$

Применение теоремы 3 и леммы 3 дает нужный результат. Теорема 4 доказана.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Де Гроот М.* Оптимальные статистические решения. М.: Мир, 1974.
2. *Зельнер А.* Байесовские методы в эконометрии. М.: Статистика, 1977.
3. *Gupta A. K., Nagar D. K.* Matrix variate distributions. New York: Chapman & Hall, 1999.
4. *Uhlig H.* On singular Wishart and singular multivariate beta distribution // Ann. Stat. 1994. V. 22. P. 395–405.
5. *Srivastava M. S.* Singular Wishart and multivariate beta distributions // Ann. Stat. 2003. V. 31. P. 1537–1560.
6. *Muirhead R. J.* Aspects of multivariate statistical theory. Hoboken, NJ: Wiley-Intersci., 2005.
7. *Хуа Ло-кен.* Гармонический анализ функций многих комплексных переменных в классических областях. М.: Изд-во иностр. лит., 1959.
8. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. М.: Мир, 1971.
9. *Cadet A.* Polar coordinates in R^{np}: application to the computation of Wishart and beta laws // Sankhyā, Ser. A. 1996. V. 58. P. 101–114.

10. *Стернберг С.* Лекции по дифференциальной геометрии. М.: Мир, 1970.
11. *James A. T.* Normal multivariate analysis and the orthogonal group // Ann. Math. Stat. 1954. V. 25. P. 40–75.
12. *Андерсон Т.* Введение в многомерный статистический анализ. М.: Физматгиз, 1963.

Статья поступила 14 апреля 2010 г.

Шведов Алексей Сергеевич
Национальный исследовательский университет Высшая школа экономики,
ул. Мясницкая, 20, Москва 101000
`ashvedov@hse.ru`