Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2012. Том 53, № 1

УДК 517.518

КРИТЕРИЙ ОГРАНИЧЕННОСТИ ВАРИАЦИИ САМОПОДОБНЫХ ФУНКЦИЙ

Н. В. Гаганов, И. А. Шейпак

Аннотация. Рассматриваются самоподобные функции в пространстве ограниченных функций $B[0,1]$. Доказывается критерий ограниченности вариации таких функций, сформулированный в терминах параметров самоподобия.

Ключевые слова: самоподобная функция, функция ограниченной вариации.

§ 1. Введение

Исследование свойств самоподобных функций в различных функциональных пространствах представляет не только самостоятельный интерес, но и имеет множество приложений в различных областях математики и прикладных дисциплинах. Понятие самоподобия, изначально возникшее при описании некоторого класса фрактальных множеств (см., например, [1]), было развито в [2], где были изучены некоторые свойства самоподобных множеств и самоподобных мер.

Дальнейшее развитие теории самоподобных множеств связано с компьютерными приложениями (сжатие изображений, см., например, [3]) и математической статистикой (статистически самоподобные множества и кривые). Изучение таких свойств самоподобных функций, как ограниченность вариации, абсолютная непрерывность, гладкость, естественным образом связанных с самоподобными мерами, возникает в теории фрактальных кривых (см., например, [4–6]). Отметим также работы [7, 8], в которых, в частности, получены результаты о показателях гёльдеровости и гладкости фрактальных кривых.

Однако конструкция самоподобных функций (см. [9]) не сводится к конструкции фрактальных кривых. Можно сказать, что они находятся в «общем положении».

Интересное приложение самоподобные функции получили в спектральной теории операторов. Известно, что считающая функция $N(\lambda)$ собственных значений краевой задачи

$$-y'' - \lambda\rho y = 0, \tag{1.1}$$

$$y(0) = y(1) = 0 \tag{1.2}$$

при $|\lambda| \to \infty$ удовлетворяет асимптотическим формулам $N(\lambda) \asymp \lambda^{\delta}$, где $\delta \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ в случае когда ρ — плотность сингулярной самоподобной вероятностной меры (см. [10]).

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 10–01–00423–а, 11–01–12115–офи–м–2011).

Если же $\rho = P'$ (производная понимается в обобщенном смысле), P — самоподобная функция из пространства $L_2[0,1]$ положительного спектрального порядка (см. [11, 12]), то имеются, вообще говоря, две считающие функции $N_\pm(\lambda)$ для последовательностей собственных значений, стремящихся к $+\infty$ и $-\infty$ соответственно, и в этом случае $N_\pm(\lambda) \asymp |\lambda|^\delta$, где $\delta \in (0,1)$. Число δ вычисляется по параметрам самоподобия функции P. При этом оказывается, что если функция P имеет неограниченную вариацию, то показатель δ обязательно больше $1/2$ (см. § 5).

В этой ситуации представляет интерес вопрос: можно ли по параметрам самоподобия определить, когда самоподобная функция P имеет ограниченную вариацию? Оказалось, что для непрерывных функций критерий ограниченности вариации (§ 4) самоподобной функции существенно сложнее, нежели для разрывных функций (§ 3).

Кроме того, критерий принадлежности самоподобной функции пространству $L_p[0,1]$ или пространству непрерывных функций несложно формулируется в терминах параметров самоподобия (см. [9]). Однако в пространстве функций ограниченной вариации $BV[0,1]$ такой критерий получить непосредственно через параметры самоподобия достаточно сложно. Поскольку любая функция ограниченной вариации заведомо ограничена, мы строим самоподобную функцию в пространстве вещественнозначных ограниченных функций $B[0,1]$, снабженном нормой

$$\|f\|_{B[0,1]} := \sup_{x\in[0,1]} |f(x)|,$$

и уже в этом пространстве находим критерий ограниченности вариации.

Статья имеет следующую структуру. В § 2 дается определение аффинно-самоподобной функции в пространстве ограниченных функций $B[0,1]$. В § 3 установлен критерий ограниченности разрывных самоподобных функций, в § 4 — критерий ограниченности вариации непрерывных самоподобных функций. В § 5 полученные результаты применяются к задаче (1.1), (1.2). А именно, доказывается, что в случае ограниченности вариации функции P число δ, определяющее степенной порядок роста считающих функций задачи (1.1), (1.2), всегда удовлетворяет неравенству $\delta \le \frac{1}{2}$.

§ 2. Самоподобные функции в пространстве $B[0,1]$

2.1. Операторы подобия в пространстве $B[0,1]$**.** Пусть фиксировано натуральное число $n > 1$, и пусть вещественные числа $a_k \neq 0$, где $k = 1, 2, \dots, n$, таковы, что $\sum\limits_{k=1}^{n} |a_k| = 1$. По данному набору чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$ определим числа $\alpha_1 := 0$, $\alpha_k := \sum\limits_{j=1}^{k-1} |a_j|$, $k = 2, \dots, n+1$. Таким образом, $\alpha_{n+1} = 1$. Для произвольного $x \in [0,1]$ определим аффинные преобразования отрезка $[0,1]$:

$$S_k(x) = \begin{cases} a_k x + \alpha_k, & \text{если } a_k > 0, \\ a_k x + \alpha_{k+1}, & \text{если } a_k < 0. \end{cases}$$

Легко видеть, что функция S_k отображает отрезок $[0,1]$ на отрезок $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, переворачивая его, если $a_k < 0$.

Для произвольных наборов чисел $\{c_k\}_{k=1}^n$, $\{d_k\}_{k=1}^n$ и $\{\beta_k\}_{k=1}^n$, $k = 1, 2, \dots, n$, определим *оператор подобия*

$$\mathscr{S}(f)(t)=\sum_{k=1}^{n}\Big(d_k f\big(S_k^{-1}(t)\big)+\beta_k+c_k S_k^{-1}(t)\Big)\chi_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})}, \tag{2.1}$$

где $t\in[0,1]$. Таким образом, график функции $\mathscr{S}(f)$ на промежутке (α_k,α_{k+1}) есть сумма сдвинутой, уменьшенной и, может быть, перевернутой копии графика функции f и линейной функции $c_k t$. Числа $\{a_k\}_{k=1}^n$ отвечают за сжатие графика функции f по горизонтали, числа $\{d_k\}_{k=1}^n$ отвечают за сжатие графика функции f по вертикали.

Укажем условия, при которых оператор подобия является сжимающим в $B[0,1]$. При этом норма в пространстве $B[0,1]$ определяется соотношением $\|f\|_{B[0,1]}=\sup\limits_{x\in[0,1]}|f(x)|$.

Лемма 2.1. *Оператор $\mathscr{S}$ является сжимающим в пространстве $B[0,1]$ тогда и только тогда, когда*

$$\max_{1\le k\le n}|d_k|<1. \tag{2.2}$$

Доказательство. Очевидны следующие соотношения:

$$\|\mathscr{S}(f)-\mathscr{S}(g)\|=\max_{1\le k\le n}\sup_{[\alpha_k,\alpha_{k+1}]}|\mathscr{S}(f)(x)-\mathscr{S}(g)(x)|$$
$$=\big(\max_{1\le k\le n}|d_k|\big)\sup_{[0,1]}|f(x)-g(x)|=\big(\max_{1\le k\le n}|d_k|\big)\|f-g\|.$$

Из леммы 2.1 и принципа сжимающих отображений немедленно следует

Теорема 2.1. *Если $\max\limits_{1\le k\le n}|d_k|<1$, то существует и единственна функция $f\in B[0,1]$, удовлетворяющая условию $\mathscr{S}(f)=f$.*

Такие функции будем называть *самоподобными*. Наборы чисел $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$ и $\{\beta_k\}$, $k=1,2,\dots,n$, будем называть *параметрами самоподобия.*

В дальнейшем всегда предполагается, что условие (2.2) выполнено.

2.2. Непрерывные самоподобные функции. В [9, теорема 3.1] получены условия, обеспечивающие непрерывность самоподобной функции в пространстве $B[0,1]$ при условии $a_k>0$, $k=1,2,\dots,n$. Получим аналогичные условия в предположении произвольности знаков a_k.

Лемма 2.2. *Значения самоподобной функции в концах отрезка определяются в соответствии с таблицей*

	$a_1>0$		$a_1<0$	
	$a_n<0$	$a_n>0$	$a_n<0$	$a_n>0$
$f(0)$	$\frac{\beta_1}{1-d_1}$	$\frac{\beta_1}{1-d_1}$	$\frac{d_1\beta_n+\beta_1+c_1}{1-d_1d_n}$	$\frac{d_1(\beta_n+c_n)}{1-d_n}+\beta_1+c_1$
$f(1)$	$\frac{d_n\beta_1}{1-d_1}+\beta_n$	$\frac{\beta_n+c_n}{1-d_n}$	$\frac{d_n(\beta_1+c_1)+\beta_n}{1-d_1d_n}$	$\frac{\beta_n+c_n}{1-d_n}$

Доказательство. Эти значения получаются из соотношений самоподобия. Рассмотрим, например, случай $a_1>0$. Тогда $0=a_1\cdot 0+\alpha_1$. Следовательно, $f(0)=d_1f(0)+\beta_1+c_1\cdot 0=d_1f(0)+\beta_1$.

Если же $a_1<0$, то $0=a_1\cdot 1+\alpha_2$. В этом случае получаем, что $f(0)=d_1f(1)+\beta_1+c_1$. Теперь необходимо получить значения функции f в точке $x=1$.

Если $a_n > 0$, то $1 = a_n \cdot 1 + \alpha_n$. Тогда $f(1) = d_n f(1) + \beta_n + c_n$, т. е. $f(1) = \frac{\beta_n + c_n}{1-d_n}$, и в случае $a_1 < 0$, $a_n > 0$ получаем, что $f(0) = \frac{d_1(\beta_n + c_n)}{1-d_n} + \beta_1 + c_1$. Случай $a_1 > 0$, $a_n < 0$ рассматривается аналогично.

Используя полученные в лемме 2.2 значения $f(0)$ и $f(1)$, несложно найти значения самоподобной функции в точках α_k, $k = 2, \dots, n$.

Лемма 2.3. *Значения $f(\alpha_k + 0)$ и $f(\alpha_k - 0)$ определяются следующим образом.*

I. $a_k > 0$, $a_{k-1} > 0$

$$f(\alpha_k + 0) = d_k f(0) + \beta_k; \quad f(\alpha_k - 0) = d_{k-1} f(1) + \beta_{k-1} + c_{k-1}.$$

II. $a_k > 0$, $a_{k-1} < 0$

$$f(\alpha_k + 0) = d_k f(0) + \beta_k; \quad f(\alpha_k - 0) = d_{k-1} f(0) + \beta_{k-1}.$$

III. $a_k < 0$, $a_{k-1} < 0$

$$f(\alpha_k + 0) = d_k f(1) + \beta_k + c_k; \quad f(\alpha_k - 0) = d_{k-1} f(0) + \beta_{k-1}.$$

IV. $a_k < 0$, $a_{k-1} > 0$

$$f(\alpha_k + 0) = d_k f(1) + \beta_k + c_k; \quad f(\alpha_k - 0) = d_{k-1} f(1) + \beta_{k-1} + c_{k-1}.$$

Доказательство. Эти формулы получаются непосредственным вычислением с использованием свойства самоподобия функции f.

На основании леммы 2.3 определим числа

$$h_k := f(\alpha_k + 0) - f(\alpha_k - 0) = d_k f\left(\frac{1 - \operatorname{sgn} a_k}{2}\right) - d_{k-1} f\left(\frac{1 + \operatorname{sgn} a_{k-1}}{2}\right) + \beta_k - \beta_{k-1} + c_k \frac{1 - \operatorname{sgn} a_k}{2} - c_{k-1} \frac{1 + \operatorname{sgn} a_{k-1}}{2}.$$

Теорема 2.2. *Самоподобная функция f непрерывна в $B[0,1]$ тогда и только тогда, когда $h_k = 0$, $k = 2, \dots, n$.*

Доказательство. Условия $h_k = 0$, $k = 2, \dots, n$, являются необходимыми, чтобы самоподобная функция f являлась непрерывной в точках α_k, $k = 2, \dots, n$. С другой стороны, для произвольной самоподобной функции f определим последовательность непрерывных функций $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$, равномерно сходящихся к функции f:

$$f_0(x) := (f(1) - f(0))x + f(0), \quad f_j := \mathscr{S}(f_{j-1}),\ j = 1, 2, \dots. \tag{2.3}$$

Очевидно, что f_j сходятся к f равномерно на отрезке $[0,1]$ при $j \to \infty$. Для каждого $j = 1, 2, \dots$ при выполнении условий $h_k = 0$, $k = 2, \dots, n$, все функции f_j непрерывны. Следовательно, f — непрерывная функция.

§ 3. Ограниченность вариации разрывных самоподобных функций

Условие $\sum\limits_{k=1}^{n} |d_k| < 1$ достаточно, но не необходимо для того, чтобы функция, являющаяся неподвижной точкой отображения $\mathscr{S}$, имела ограниченную вариацию. Например, если есть только один индекс m, для которого $d_m = 1$, а

$d_k = 0$ при $k \neq m$, то, подобрав коэффициенты β_k соответствующим образом, можно добиться того, чтобы функция $f = \mathscr{S}(f)$ имела всего лишь конечное число точек разрыва. В частности, при выборе следующих параметров самоподобия:

$$\beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_{m-1} = \beta_{m+1} = \cdots = \beta_n = d_m\beta_1 + \beta_m,$$

получим функцию, тождественно равную β_1 на отрезке $[0,1]$ (см. также [13]). Заметим также, что в рассмотренном случае отображение $\mathscr{S}$ не сжимающее, но функция $f \equiv \beta_1$ — его неподвижная точка. В этом параграфе будем рассматривать разрывные ограниченные самоподобные функции, имеющие счетное множество точек разрыва.

Введем в рассмотрение числа

$$D := \sum_{k=1}^{n} |d_k|, \quad C := \sum_{k=1}^{n} |c_k|.$$

Теорема 3.1. *Если $D \geq 1$, то самоподобная разрывная функция f имеет неограниченную вариацию.*

Доказательство. В силу теоремы 2.2 существует по крайней мере одна точка α_{k_0} $(1 < k_0 < n+1)$, для которой выполнено $h_{k_0} \neq 0$. Определим индуктивно множества точек, получающиеся из точки α_{k_0}, применением отображений S_k: $\Lambda_0 := \{\alpha_{k_0}\}$, $\Lambda_j := \{S_k(x),\ x \in \Lambda_{j-1},\ k = 1,\ldots,n\}$, $j = 1,2,\ldots$. В силу самоподобия функции ее вариация только в точках множества $\bigcup_{i=0}^{j} \Lambda_i$ равна $|h_{k_0}| \cdot (1 + D + \cdots + D^j) \to \infty$, $j \to \infty$.

Теорема 3.2. *Если $D < 1$, то самоподобная функция имеет ограниченную вариацию.*

Доказательство. Зафиксируем какое-нибудь разбиение $T = \{x_i\}_{i=1}^{m}$ отрезка $[0,1]$, состоящее из m точек: $0 = x_1 < x_2 < \cdots < x_{m-1} < x_m = 1$. Для любой пары точек x_i, x_{i+1}, принадлежащих одному отрезку $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, справедливо соотношение

$$\begin{aligned} |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &= |d_k \cdot f(t_{i+1}) + \beta_k + c_k \cdot t_{i+1} - (d_k \cdot f(t_i) + \beta_k + c_k \cdot t_i)| \\ &\leq |d_k||f(t_{i+1}) - f(t_i)| + |c_k|(t_{i+1} - t_i), \end{aligned} \tag{3.1}$$

где $t_i = S_k(x_i)$.

Через $T_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})}$ обозначим те точки разбиения T, которые попадают в промежуток (α_k, α_{k+1}). Также введем следующие обозначения:

$$x_k^* := \max\{x_i \in T : x_i \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]\}, \quad x_{k*} := \min\{x_i \in T : x_i \in [\alpha_k, \alpha_{k+1}]\}.$$

В соответствии с формулой (3.1) вариацию функции f по разбиению T можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_T f &= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}_{T_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})}} f + \sum_{k=1}^{n-1} |f(x_{k+1*}) - f(x_k^*)| \\ &\leq \sum_{k=1}^{n} |d_k| \operatorname{Var}_{S_k^{-1}(T_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})})} f + C + 2(n-1)\|f\| \\ &\leq D \max_{1\leq k\leq n} \operatorname{Var}_{S_k^{-1}(T_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})})} f + C + 2(n-1)\|f\|. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Каждое из разбиений $S_k^{-1}(T_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})}) = \left\{t_i = \frac{x_i-\alpha_i}{a_i} : x_i \in T_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})}\right\}$ $(k = 1, 2, \dots, n)$ заведомо содержит не более m точек, и для вариации по этому разбиению также справедлива оценка (3.2). Применяя оценку (3.2) последовательно N раз $(N = 1, 2 \dots)$ и оценивая вариацию по m точкам величиной $2m\|f\|$ на N-м шаге, получим, что для произвольного натурального N справедливо неравенство

$$\operatorname{Var}_T f \le 2m\|f\|D^N + (C + 2(n-1)\|f\|)\frac{1-D^N}{1-D}.$$

В силу произвольности N и условия $0 \le D < 1$ получаем оценку

$$\operatorname{Var}_T f \le \frac{C + 2(n-1)\|f\|}{1-D},$$

что влечет такое же неравенство для полной вариации функции f.

Следствие 3.1. *Вариация разрывной самоподобной функции f допускает более точную оценку:*

$$\operatorname{Var}_0^1 f \le \frac{C+h}{1-D}, \tag{3.3}$$

где $h := \sum\limits_{k=2}^{n} |h_k|$.

Доказательство. Вариация функции f складывается из вариации на промежутках (α_k, α_{k+1}), $k = 1, 2, \dots, n$, и скачков функции в точках α_k, $k = 2, 3, \dots, n$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}_0^1 f = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}_{(\alpha_k,\alpha_{k+1})} f + \sum_{k=2}^{n} |f(\alpha_k+0) - f(\alpha_k-0)|\\ \le \sum_{k=1}^{n}\big(|d_k| \operatorname{Var}_0^1 f + |c_k|\big) + h = D \operatorname{Var}_0^1 f + C + h.\end{aligned}$$

Следствие 3.2. *Разрывная самоподобная функция f имеет ограниченную вариацию тогда и только тогда, когда $D < 1$.*

Замечание 3.1. Непрерывные самоподобные функции могут иметь ограниченную вариацию и при $D = 1$, но оценка (3.3) в этом случае может быть или тривиальной (правая часть неравенства обращается в бесконечность), или неопределенной. Например, лестница Кантора ($n = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = \frac{1}{3}$, $d_1 = d_3 = \frac{1}{2}$, $d_2 = 0$, $c_1 = c_2 = c_3 = 0$, $\beta_1 = 0$, $\beta_2 = \beta_3 = \frac{1}{2}$) непрерывна, имеет ограниченную вариацию, равную 1, но для нее $C = 0$, $h = 0$, $D = 1$.

§ 4. Ограниченность вариации непрерывных самоподобных функций

4.1. Случай, когда $c_k = 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Теорема 4.1. *Пусть при $k = 1, 2, \dots, n$ выполнены условия $c_k = 0$. Тогда непрерывная самоподобная функция имеет ограниченную вариацию в том и только том случае, когда $D \le 1$.*

Замечание 4.1. Если $D = 1$, то будем подразумевать, что функция f не является постоянной.

Доказательство. Из теоремы 3.2 следует, что осталось рассмотреть случай, когда $D = 1$. В [9, теорема 4.2] это утверждение доказано для самоподобных функций, нормированных условиями $f(0) = 0$, $f(1) = 1$, а также при условиях $a_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. В этом случае из непрерывности функции f следует, что $D = 1$ (см. [9, теорема 3.1]) и $\operatorname{Var}_0^1 f = D = 1$. С небольшими модификациями это доказательство переносится и на случай, когда числа a_k имеют разные знаки.

А именно, рассмотрим следующие разбиения отрезка $[0, 1]$:

$$T_0 := \{0, 1\}, \quad T_1 := \{\alpha_k\}_{k=1}^{n+1},$$

$$T_j := \{t = S_k(x),\ x \in T_{j-1},\ k = 1, 2, \ldots, n\}, \quad j = 2, 3, \ldots.$$

Для последовательности функций $\{f_j\}_{j=0}^{\infty}$, введенной при доказательстве теоремы 2.2, справедливо соотношение $f_j(x) = f(x)\ \forall x \in T_j$, $j = 0, 1, \ldots$. Поскольку между соседними точками разбиения T_j функция f_j линейна, ее вариация удовлетворяет соотношению $\operatorname{Var}_0^1 f_j = \operatorname{Var}_{T_j} f_j$, $j = 0, 1, \ldots$. Следовательно, $\operatorname{Var}_0^1 f_j = \operatorname{Var}_{T_j} f_j = \operatorname{Var}_{T_j} f$, $j = 0, 1, \ldots$. Из определения функций f_j и разбиений T_j следует, что $\operatorname{Var}_{T_j} f_j = D^j |f(1) - f(0)|$. С другой стороны, из [14, теорема 2] вытекает, что $\operatorname{Var}_{T_j} \to \operatorname{Var}_0^1 f$ при $j \to \infty$, т. е. $\operatorname{Var}_0^1 f = |f(1) - f(0)|$.

Следствие 4.1. *Все непрерывные самоподобные функции с ограниченной вариацией, у которых параметры самоподобия удовлетворяют условиям $c_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$, обязательно монотонны.*

Случай непрерывных функций, у которых хотя бы одно из чисел c_k отлично от нуля, значительно сложнее.

4.2. Случай, когда среди чисел $\{c_k\}_{k=1}^n$ есть числа, отличные от нуля.

Теорема 4.2. *Если $D > 1$, то непрерывная самоподобная функция, не равная линейной функции, имеет неограниченную вариацию.*

Доказательству теоремы предпошлем следующие леммы.

Лемма 4.1. *Если $\mathscr{S}$ — сжимающий оператор подобия с коэффициентами вертикального сжатия $\{d_k\}_{k=1}^n$ и функция f — его неподвижная точка, то для любого натурального числа N оператор $\widetilde{\mathscr{S}} := \mathscr{S}^N$ также будет сжимающим оператором подобия с той же неподвижной точкой. Параметры самоподобия $\tilde{d}_i$, $i = 1, 2, \ldots, n^N$, оператора $\widetilde{\mathscr{S}}$ определяются формулами*

$$\tilde{d}_i = d_{i_1} \cdot d_{i_2} \cdot \ldots \cdot d_{i_N}, \tag{4.1}$$

где каждый индекс i_j ($j = 1, 2, \ldots, N$) пробегает значения от 1 до n, а индекс i соответственно меняется от 1 до n^N.

Доказательство. Равенства (4.1) проверяются непосредственным вычислением с использованием определения (2.1) оператора подобия $\mathscr{S}$.

Заметим, что новые точки разбиения $\{\tilde{\alpha}_i\}_{i=1}^{n^N+1}$ отрезка $[0, 1]$ — это в точности точки разбиения T_N.

Лемма 4.2. *Если для оператора подобия $\mathscr{S}$ выполнено неравенство $D > 1$, то найдется такое натуральное число N, что для оператора $\widetilde{\mathscr{S}} = \mathscr{S}^N$ будет выполнено по крайней мере одно из неравенств* $\bigl|\sum\limits_{\tilde{d}_i>0} \tilde{d}_i\bigr| > 1$, $\bigl|\sum\limits_{\tilde{d}_i<0} \tilde{d}_i\bigr| > 1$.

Доказательство. Из формулы (4.1) следует, что

$$\sum_{i=1}^{n^N} |\tilde{d}_i| = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_N=1}^{n} |d_{i_1} d_{i_2} \dots d_{i_N}| = D^N.$$

Выберем такое число N, чтобы выполнялось неравенство $D^N > 2$. Тогда

$$\sum_{i=1}^{n^N} |\tilde{d}_i| = \sum_{\tilde{d}_i>0} |\tilde{d}_i| + \sum_{\tilde{d}_i<0} |\tilde{d}_i| = \Bigl|\sum_{\tilde{d}_i>0} \tilde{d}_i\Bigr| + \Bigl|\sum_{\tilde{d}_i<0} \tilde{d}_i\Bigr| > 2.$$

Следовательно, по крайней мере одна из двух сумм по модулю больше 1.

Введем в рассмотрение функции

$$\theta_k(t) := \frac{d_k t + c_k}{a_k}, \quad k = 1, 2, \dots, n. \tag{4.2}$$

Далее через $\theta_i(\theta_j)$ будем обозначать проитерированную функцию $(\theta_i(\theta_j))(t) := \frac{d_i \theta_j(t) + c_i}{a_i}$.

Лемма 4.3. *Для самоподобной функции f и любого $j \geq 0$ выполнено*

$$\mathrm{Var}_{T_j} f_j = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_j=1}^{n} |\theta_{i_1}(\theta_{i_2}(\dots \theta_{i_j}((f(1) - f(0))) \dots))| \cdot |a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}|.$$

Доказательство. Заметим, что точки разбиения T_{j-1} делят отрезок $[0,1]$ на n^{j-1} отрезков $I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1}} := S_{i_1} S_{i_2} \dots S_{i_{j-1}}([0,1])$. На каждом отрезке $I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1}}$ функция f_{j-1} линейна и имеет вид $f_{j-1}(t) = \gamma t + \delta$, где константы γ и δ зависят от индексов $i_1, i_2, \dots, i_{j-1}$. Длина отрезка $I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1}}$ равна $|a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{j-1}}|$. Следовательно, вариация функции f_{j-1} равна

$$\mathrm{Var}_{T_{j-1} f_{j-1}} = \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{j-1}=1}^{n} |\gamma| \cdot |a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{j-1}}|$$
$$= \sum_{i_1=1}^{n} \cdots \sum_{i_{j-1}}^{n} |f'_{j-1}|_{I_{i_1 i_2 \cdots i_{j-1}}}| \cdot |a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_{j-1}}|,$$

где $f'_{j-1}|_{I_{i_1 i_2 \cdots i_{j-1}}}$ — ограничение производной функции f_{j-1} на отрезок $I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1}}$.

Исследуем, как определяются производные функции f_j через производные функции f_{j-1}. Зафиксируем индексы $i_1, i_2, \dots, i_{j-1}$. При переходе от разбиения T_{j-1} к разбиению T_j каждый отрезок $I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1}}$ переходит в n отрезков $I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1} i_j} := S_{i_j}(I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1}})$, $i_j = 1, 2, \dots, n$. На каждом отрезке $I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1} i_j}$ функция f_j также линейна и определяется через функцию f_{j-1} в соответствии с формулой (2.3): $f_j|_{I_{i_1 i_2 \cdots i_{j-1} i_j}}(x) = d_{i_j} f_{j-1}(t) + c_{i_j} t + \beta_{i_j}$, $x = S_{i_j}(t)$. Следовательно,

$$f'_j|_{I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1} i_j}} = \frac{d_{i_j} \cdot (f'_{j-1}|_{I_{i_1 i_2 \cdots j-1}}) + c_{i_j}}{a_{i_j}} = \theta_{i_j}(f'_{j-1}|_{I_{i_1 i_2 \dots i_{j-1}}}).$$

Осталось воспользоваться тем очевидным фактом, что $\mathrm{Var}_{T_0} f_0 = |f(1) - f(0)|$.

Аналогичным рассуждением можно получить

Следствие 4.2. *Вариация функции f_j по разбиению T_j связана с функцией f_k $(0 \le k \le j)$ следующим образом:*

$$\mathrm{Var}_{T_j} f_j = \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_j=1}^{n} |\theta_{i_j}(\theta_{i_{j-1}}(\ldots \theta_{i_{k+1}}(f_k'|_{I_{i_1 i_2 \ldots i_{k-1} i_k}}) \ldots))| \cdot |a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_j}|.$$

Лемма 4.4. *Функции θ_k обладают «групповым свойством»:*

$$a_i\theta_i + a_j\theta_j = a\theta, \tag{4.3}$$

где $\theta(t) = \frac{dt+c}{a}$, $a = a_i + a_j$, $d = d_i + d_j$, $c = c_i + c_j$.

Доказательство. Результат проверяется непосредственным вычислением.

Доказательство теоремы 4.2. Поскольку в силу леммы 4.2 можно всегда перейти от оператора подобия $\mathscr{S}$ к оператору $\widetilde{\mathscr{S}} = \mathscr{S}^N$, то, чтобы не вводить лишние обозначения, будем считать, что сразу для параметров самоподобия оператора $\mathscr{S}$ выполнено одно из двух неравенств:

$$\Big|\sum_{d_i>0} d_i\Big| > 1, \quad \Big|\sum_{d_i<0} d_i\Big| > 1.$$

Не ограничивая общности, будем считать, что выполнено первое из этих неравенств: $\big|\sum\limits_{d_i>0} d_i\big| > 1$. Используя следствие 4.2, для вариации функции f_j получим следующие оценки:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_{T_j} f_j &= \sum_{i_1=1}^{n} \sum_{i_2=1}^{n} \cdots \sum_{i_j=1}^{n} |\theta_{i_j}(\theta_{i_{j-1}}(\ldots \theta_{i_2}(f_1'|_{I_{i_1}}) \ldots))| \cdot |a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_j}| \\
&\ge \sum_{i_1:d_{i_1}>0} \sum_{i_2:d_{i_2}>0} \cdots \sum_{i_j:d_{i_j}>0} |\theta_{i_j}(\theta_{i_{j-1}}(\ldots \theta_{i_2}(f_1'|_{I_{i_1}}) \ldots))| \cdot |a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_j}| \\
&\ge |\sum_{i_1:d_{i_1}>0} \sum_{i_2:d_{i_2}>0} \cdots \sum_{i_j:d_{i_j}>0} \theta_{i_j}(\theta_{i_{j-1}}(\ldots \theta_{i_2}(f_1'|_{I_{i_1}}) \ldots)) \cdot a_{i_1} a_{i_2} \ldots a_{i_j}|.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

Введем функцию $\theta(t) := \frac{dt+c}{a}$, где $a := \sum\limits_{i:d_i>0} |a_i|$, $d := \sum\limits_{i:d_i>0} d_i$, $c := \sum\limits_{i:d_i>0} c_i$. Используя лемму 4.4, оценку (4.4) можно переписать следующим образом:

$$\mathrm{Var}_{T_j} f_j \ge \Big|\sum_{i:d_i>0} \underbrace{\theta(\theta(\ldots\theta}_{j-1 \text{ раз}}(f_1'|_{I_i}) \ldots))\Big| |a^{j-1} a_i|.$$

Так как по предположению $d > 1$, а $|a| \ge 1$, существует точка t_0, неподвижная для функции θ: $\theta(t_0) = t_0$. Поскольку функция f не является линейной, найдется такой отрезок I_{i_1}, на котором производная функции f_1 отлична от t_0 (f_0 — линейная функция на всем отрезке $[0,1]$, f_1 — кусочно-линейная функция, но если ее производная на всех отрезках равна t_0, то f_1 — линейная функция на всем отрезке $[0,1]$, а тогда и функция f линейна, что противоречит условиям теоремы 4.2). Тогда справедливо неравенство

$$\mathrm{Var}_{T_j} f_j|_{I_{i_1}} \ge |\underbrace{\theta(\theta(\ldots\theta}_{j-1 \text{ раз}}(f_1'|_{I_{i_1}}) \ldots))|a|^{j-1} a_{i_1}|.$$

Поскольку t_0 — неподвижная точка функции θ и для любых x и y выполнено $\theta(x)-\theta(y)=\frac{d(x-y)}{a}$, справедлива следующая оценка:

$$|\underbrace{\theta(\theta(\ldots\theta}_{j-1\text{ раз}}(f_1'|_{I_{i_1}})\ldots))|a^{j-1}a_{i_1}|-t_0|a^{j-1}a_{i_1}||=|d|^{j-1}|f_1'|_{I_{i_1}}-t_0||a_{i_1}|\to\infty,\quad j\to\infty.$$

Так как $|a^{j-1}a_{i_1}|t_0\to 0$ при $j\to\infty$, то $\mathrm{Var}_{T_j} f_j\to\infty$. Поскольку $\mathrm{Var}_{T_j} f=\mathrm{Var}_{T_j} f_j$, то и $\mathrm{Var}_{T_j} f\to\infty$.

Перейдем к «пограничному случаю» $D=1$.

Теорема 4.3. *Пусть $D=1$ и существует такое число $s\in\mathbb{R}$, для которого справедливы соотношения $\theta_k(s)=s$, $k=1,2,\ldots,n$, т. е. s является неподвижной точкой всех отображений θ_k.*

Тогда непрерывная самоподобная функция f имеет ограниченную вариацию.

Доказательство. Будем рассматривать вариации функции $f-sx$ на последовательности разбиений $\{T_j\}_{j=0}^{\infty}$ (см. доказательство теоремы 4.1). Очевидно, что функции f и $f-sx$ имеют ограниченную или неограниченную вариации одновременно:

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_{T_0}(f-sx)&=\sum_{k=1}^{n}|f(\alpha_{k+1})-f(\alpha_k)-s(\alpha_{k+1}-\alpha_k)|\\&=\sum_{k=1}^{n}|d_k(f(1)-f(0))+c_ka_k-sa_k|=\sum_{k=1}^{n}|d_k||\theta_k(f(1)-f(0))-\theta_k(s)||a_k|\\&=\sum_{k=1}^{n}|d_k|=D|f(1)-f(0)-s|.\end{aligned}$$

Аналогичные рассуждения (проводимые по индукции) для разбиения T_j приводят к формуле

$$\mathrm{Var}_{T_j}(f-sx)=D^j|f(1)-f(0)-s|.$$

Применение [14, теорема 2] завершает доказательство теоремы.

Линейную функцию $f(x)=sx+b$ можно задать параметрами $\beta_k=s\alpha_k+b$, $\beta_k=s\alpha_k+b$.

На самом деле, условия теоремы 4.3 являются и необходимыми. Покажем, что если отображения θ_k не имеют общей неподвижной точки, то вариация самоподобной функции f не ограничена. Сначала докажем это утверждение в том случае, когда все числа d_k положительны, потом, когда числа d_k неотрицательны. Случай, когда среди чисел d_k есть как положительные, так и отрицательные, сведем к случаю неотрицательных чисел d_k.

4.2.1. Все параметры d_k положительны. Дальнейшие рассуждения проведем при следующих допущениях:

(1) $a_k>0$, $d_k>0$ $\forall k=1,2,\ldots,n$;

(2) самоподобная функция f удовлетворяет условиям $f(0)\neq f(1)$; не ограничивая общности, в этом случае считаем, что $f(0)=0$, $f(1)=1$.

Из [9, теорема 3.1] следует, что в этом случае $\sum\limits_{k=1}^{n}(d_k+c_k)=1$. В силу того, что $\sum\limits_{k=1}^{n}|d_k|=\sum\limits_{k=1}^{n}d_k=1$, имеем $\sum\limits_{k=1}^{n}c_k=0$.

Для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ определим числа

$$t_\alpha^- := \min_{1\le k\le n} \theta_k^{-1}(\alpha), \quad t_\alpha^+ := \max_{1\le k\le n} \theta_k^{-1}(\alpha).$$

Лемма 4.5. *Если существуют числа $\alpha \in \mathbb{R}$, $\delta > 0$ такие, что*

$$\mu\{x : f_j'(x) \in [t_\alpha^- + \delta, t_\alpha^+ - \delta]\} \not\to 0, \quad j \to \infty,$$

то вариации функций $f_n - \alpha x$ не ограничены в совокупности.

Доказательство. Так как функции f_j непрерывны и кусочно-линейны, имеем

$$\operatorname{Var}_0^1 f_j = \sum_t |t| \cdot \mu\{x : f_j' = t\}.$$

При этом f_j' принимает не более n^j значений.

По условию леммы существуют число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность натуральных чисел $j_k \to \infty$ таких, что

$$\mu\{x : f_{j_k}'(x) \in [t_\alpha^- + \delta, t_\alpha^+ - \delta]\} \ge \varepsilon,$$

где μ — мера Лебега.

Пусть $t_{i_1 i_2 \dots i_j}$ — значения производных функции f_j на отрезках $I_{i_1 i_2 \dots i_j}$: $f_j'|_{I_{i_1 i_2 \dots i_j}} = t_{i_1 i_2 \dots i_j}$. Из рассуждений доказательства леммы 4.3 следует, что вариации функций f_j и f_{j+1} определяется по формулам

$$\operatorname{Var}_0^1 f_j = \sum_{i_1 i_2 \dots i_j} |t_{i_1 i_2 \dots i_j}| a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}, \tag{4.5}$$

$$\operatorname{Var}_0^1 f_{j+1} = \sum_{i_1 i_2 \dots i_j} \sum_{k=1}^n |\theta_k(t_{i_1 i_2 \dots i_j})| a_k a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}. \tag{4.6}$$

Приращение вариации при переходе от функции f_j к функции f_{j+1}, следовательно, равно

$$\operatorname{Var}_0^1 f_{j+1} - \operatorname{Var}_0^1 f_j = \sum_{i_1 i_2 \dots i_j} \left(\sum_{k=1}^n |\theta_k(t_{i_1 i_2 \dots i_j})||a_k| - |t_{i_1 i_2 \dots i_j}| \right) a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}.$$

Для последовательности функций $\{f_j - \alpha x\}$ получаем, что

$$\begin{aligned} &\operatorname{Var}_0^1(f_{j+1} - \alpha x) - \operatorname{Var}_0^1(f_j - \alpha x) \\ &\qquad = \sum_{i_1 i_2 \dots i_j} \left(\sum_{k=1}^n |\theta_k(t_{i_1 i_2 \dots i_j}) - \alpha| a_k - |t_{i_1 i_2 \dots i_j} - \alpha| \right) a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

Коэффициент при $a_{i_1} a_{i_2} \dots a_{i_j}$ в формуле (4.7) неотрицателен, так как справедлива оценка

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n |\theta_k(t_{i_1 i_2 \dots i_j}) - \alpha| a_k &\ge \left| \sum_{k=1}^n \theta_k(t_{i_1 i_2 \dots i_j}) - \alpha \right| a_k \\ &= \left| \sum_{k=1}^n (d_k t_{i_1 i_2 \dots i_j} + c_k) - \alpha \sum_{k=1}^n a_k \right| = |t_{i_1 i_2 \dots i_j} - \alpha|. \end{aligned} \tag{4.8}$$

Пусть k_+ и k_- — индексы, для которых выполнено соответственно $\alpha = \theta_{k_+}(t_\alpha^+) = \theta_{k_-}(t_\alpha^-)$. Тогда $|\theta_{k_\pm}(t) - \alpha| = |\theta_{k_\pm}(t) - \theta_{k_\pm}(t_\alpha^\pm)| = \frac{d_{k_\pm}|t-t_\alpha^\pm|}{a_{k_\pm}}$.

Если $t_{i_1 i_2 \dots i_j} \in [t_\alpha^- + \delta, t_\alpha^+ - \delta]$, то

$$\sum_{k=1}^{n} |\theta_k(t_{i_1 i_2 \dots i_j}) - \alpha| a_k \geq |t_{i_1 i_2 \dots i_j} - \alpha| + 2\delta \min_{1 \leq k \leq n} d_k.$$

Это неравенство вытекает из следующих неравенств:

1) если $x_1 > d$, $x_2 < -d$, то $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| + 2d \leq |x_1| + |x_2| + \dots + |x_n|$,
2) $\theta_{k-}(t_{i_1 i_2 \dots i_j}) - \alpha \geq \delta d_{k-}$,
3) $\theta_{k+}(t_{i_1 i_2 \dots i_j}) - \alpha \leq -\delta d_{k+}$.

Окончательно получаем

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Var}_0^1(f_{j_k+1} - \alpha x) - \mathrm{Var}_0^1(f_{j_k} - \alpha x) \\
&\qquad = \sum_t \left(\sum_{k=1}^{n} |\theta_k(t) - \alpha| a_k - |t - \alpha| \right) \mu\{x : f'_{j_k}(x) = t\} \\
&\qquad \geq \sum_{t \in [t_\alpha^- + \delta, t_\alpha^+ - \delta]} \left(\sum_{k=1}^{n} |\theta_k(t) - \alpha| a_k - |t - \alpha| \right) \mu\{x : f'_{j_k}(x) = t\} \\
&\qquad \geq \sum_{t \in [t_\alpha^- + \delta, t_\alpha^+ - \delta]} 2\delta \min_{1 \leq k \leq n} d_k \cdot \mu\{x : f'_{j_k}(x) = t\} \geq 2\delta\varepsilon \min_{1 \leq k \leq n} d_k. \qquad (4.9)
\end{aligned}$$

Теорема 4.4. *Если преобразования θ_k не имеют общей неподвижной точки, а все числа d_1, d_2, ..., d_n положительны, то вариация самоподобной функции f не ограничена.*

Доказательство. Предположим противоположное. Пусть вариация функции f конечна и тем самым вариации функций f_j ограничены в совокупности. Из того, что функции θ_k не имеют общей неподвижной точки и непрерывности функции f, следует, что для произвольного α выполнено включение $\alpha \in (t_\alpha^-, t_\alpha^+)$. Действительно, для произвольного $\alpha \in \mathbb{R}$ существует такой номер $k \in [1, n]$, что выполнено одно из двух неравенств: $\theta_k(\alpha) > \alpha$ или $\theta_k(\alpha) < \alpha$. Если для всех номеров $k = 1, 2, \dots, n$ выполнено неравенство одного типа (например, $\theta_k(\alpha) \geq \alpha$), то, просуммировав все эти неравенства, получим, что $\left(\sum\limits_{k=1}^{n} d_k\right)\alpha + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} c_k\right) > \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right)\alpha$, т. е. неверное неравенство $\alpha > \alpha$.

Для произвольного числа $\alpha \in \mathbb{R}$ и числа $\delta > 0$ рассмотрим окрестность $U_\alpha \subset [t_\alpha^- + \delta, t_\alpha^+ - \delta]$. В силу предположения ограниченности вариации функции f и леммы 4.5 получаем, что $\mu\{x : f'_j(x) \in U_\alpha\} \to 0$, $j \to \infty$.

Любой отрезок $[-C, C]$ можно покрыть такими окрестностями: $[-C, C] \subset \bigcup\limits_{\alpha \in [-C, C]} U_\alpha$. Поскольку можно выбрать конечное подпокрытие этого отрезка, имеем $\mu\{x : f'_j(x) \in [-C, C]\} \to 0$, $j \to \infty$. Следовательно, $\mu\{x : |f'_j(x)| > C\} \to 1$, $j \to \infty$. Это означает, что $(\forall C > 0\, \exists j_0\, \forall j > j_0)\, \mathrm{Var}_0^1 f_j > \frac{C}{2}$.

4.2.2. Все параметры d_k неотрицательны. Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда $d_k \geq 0$, $k = 1, 2, \dots, n$.

Лемма 4.6. *Пусть f — непрерывная самоподобная функция с параметрами самоподобия $\{a_k\}$, $\{c_k\}$, $\{d_k\}$, $\{\beta_k\}$, и пусть $d_k \geq 0\ \forall k = 1, 2, \dots, n$. Предположим, что у преобразований θ_k нет общей неподвижной точки. Тогда существует* *непрерывная самоподобная функция* g *с параметрами самоподобия* $\{\tilde{a}_k\}$, $\{\tilde{c}_k\}$, $\{\tilde{d}_k\}$, $\{\tilde{\beta}_k\}$, $k = 1, 2, \ldots, \tilde{n}$ $(\tilde{n} \leq n)$, *такая, что* $\tilde{d}_k > 0$, $k = 1, 2, \ldots, \tilde{n}$, $\tilde{\theta}_j$ *не имеют общей неподвижной точки и* $\operatorname{Var}_0^1 f \geq \operatorname{Var}_0^1 g$.

Доказательство. Рассмотрим операцию «склейки». Зафиксируем натуральные числа k и m такие, что $1 \leq k < m \leq n$. По заданным параметрам самоподобия $\{a_i, c_i, d_i, \beta_i\}$, $i = 1, 2, \ldots, n$, построим новые параметры $\{\tilde{a}_j, \tilde{c}_j, \tilde{d}_j, \tilde{\beta}_j\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$ по следующему правилу:

$$\tilde{a}_j = a_j, \quad \tilde{c}_j = c_j, \quad \tilde{d}_j = d_j \quad \text{при } 1 \leq j < m,\ j \neq k, \tag{4.10}$$

$$\tilde{a}_k = a_k + a_m, \quad \tilde{c}_k = c_k + c_m, \quad \tilde{d}_k = d_k + d_m, \tag{4.11}$$

$$\tilde{a}_j = a_{j+1}, \quad \tilde{c}_j = c_{j+1}, \quad \tilde{d}_j = d_{j+1} \quad \text{при } m \leq j \leq n-1. \tag{4.12}$$

Из условия $\sum\limits_{k=1}^{n} |d_k| = 1$ следует, что в результате этой операции условие (2.2) не нарушается.

Числа $\tilde{\alpha}_k$ пересчитаем по новым числам $\tilde{a}_k$, а числа $\tilde{\beta}_k$ подберем так, чтобы новые параметры самоподобия порождали непрерывную самоподобную функцию.

Проведем операцию «склейки» по формулам (4.10)–(4.12), выбрав k, m так, чтобы были выполнены следующие условия: $d_k \neq 0$, $d_m = 0$, $\tilde{\theta}_j$ не имеют общей (для всех $j = 1, \ldots, n-1$) неподвижной точки.

Если функции θ_j $(j = 1, \ldots, n)$ не имели общую неподвижную точку, то функции $\tilde{\theta}_j$ $(j = 1, \ldots, n-1)$ также не будут иметь общую неподвижную точку, что следует из свойства (4.3).

Очевидно, за конечное число операций «склейки» получим набор параметров самоподобия, у которого все числа $\tilde{d}_j \neq 0$ и $\tilde{\theta}_j$ не имеют общей неподвижной точки.

Покажем теперь, что после этих операций самоподобная функция, отвечающая новым параметрам самоподобия, будет иметь вариацию, не большую, чем у исходной функции. Это утверждение достаточно проверить для одной операции «склейки».

Пусть f — самоподобная функция, отвечающая исходному набору параметров самоподобия, а g — самоподобная функция, отвечающая «склеенным» параметрам самоподобия. Покажем, что для любого натурального числа j для кусочно-линейных приближений этих функций (определение см. в теореме 2.2) выполнено неравенство $\operatorname{Var}_0^1 f_j \geq \operatorname{Var}_0^1 g_j$.

Для доказательства этого факта воспользуемся записью, полученной в лемме 4.3. Выпишем таким образом вариацию g_j:

$$\begin{aligned}\operatorname{Var}_{\tilde{T}_j} g_j &= \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=1}^{n-1} \cdots \sum_{i_j=1}^{n-1} |\tilde{\theta}_{i_1}(\tilde{\theta}_{i_2}(\ldots \tilde{\theta}_{i_j}((g(1) - g(0))) \ldots))| \cdot |\tilde{a}_{i_1} \tilde{a}_{i_2} \ldots \tilde{a}_{i_j}| \\ &= \sum_{i_1=1}^{n-1} \sum_{i_2=1}^{n-1} \cdots \sum_{i_j=1}^{n-1} |[\tilde{a}_{i_1} \tilde{\theta}_{i_1}]([\tilde{a}_{i_2} \tilde{\theta}_{i_2}](\ldots [\tilde{a}_{i_j} \tilde{\theta}_{i_j}]((g(1) - g(0))) \ldots))|.\end{aligned}$$

По лемме 4.4 $\tilde{a}_k \tilde{\theta}_k(\cdot) = a_k \theta_k(\cdot) + a_m \theta_m(\cdot)$, следовательно, $|\tilde{a}_k \tilde{\theta}_k(\cdot)| \leq |a_k \theta_k(\cdot)| + |a_m \theta_m(\cdot)|$. Учитывая, что набор $\{a_i \theta_i \mid i \neq k, m\}$ перешел в набор $\{\tilde{a}_i \tilde{\theta}_i \mid i \neq k\}$, а также то, что $g(0) = f(0) = 0$, $g(1) = f(1) = 1$, вариацию можно оценить следующим образом:

$$\operatorname{Var}_{\widetilde{T}_j} g_j \leq \sum_{i_1=1}^{n}\sum_{i_2=1}^{n}\cdots\sum_{i_j=1}^{n}|[a_{i_1}\theta_{i_1}]([a_{i_2}\theta_{i_2}](\ldots[a_{i_j}\theta_{i_j}]((f(1)-f(0)))\ldots))| = \operatorname{Var}_{T_j} f_j.$$

Из того, что последнее неравенство выполнено для всех j, следует, что $\operatorname{Var} g \leq \operatorname{Var} f$.

Следствие 4.3. *Теорема* 4.4 *верна и при* $d_k \geq 0$, $k = 1, \ldots, n$.

Следствие 4.4. *Теорема* 4.4 *верна, когда все* d_k *отрицательны.*

Доказательство. Достаточно применить теорему 4.4 к функции f и оператору подобия $\mathscr{S}^2$.

4.2.3. Среди чисел $d_1, \ldots, d_n$ есть числа разных знаков. Перейдем к рассмотрению случая, когда среди чисел $d_1, \ldots, d_n$ есть как положительные, так и отрицательные.

Лемма 4.7. *Пусть самоподобная функция f определяется следующими параметрами самоподобия:* $n = 2$, $a_1 = a_2 = d_2 = -d_1 = \frac{1}{2}$, *и имеет ограниченную вариацию. Тогда функция f линейна.*

Доказательство. Поскольку функция f имеет ограниченную вариацию и $|d_1| + |d_2| = 1$, согласно следствию 3.2 f непрерывна. Как следствие непрерывности получаем, что θ_i $(i = 1, 2)$ можно записать следующим образом: $\theta_1(t) = t + c$, $\theta_2(t) = 2 - t - c$, где число c произвольно.

Введем величины $p_j(t) := \mu\{t : f_j' = t\}$, $j \geq 1$. Вариацию функции f_j можно вычислить следующим образом: $\operatorname{Var} f_j = \sum\limits_{t \in R} t p_j(t)$. Так как функция f_j кусочно-линейна, параметр t принимает лишь конечное число значений. Величины p_j и p_{j+1} связаны соотношением

$$p_{j+1}(t) = \sum_{k=1}^{2} a_k p_j((\theta_k)^{-1}(t)).$$

По индукции несложно доказать (в явном виде выписав обратные преобразования), что $p_j(\cdot)$ симметрично относительно $t = 1$, т. е. $p_j(t) = p_j(2-t)$, и что оно может быть задано рекуррентной формулой:

$$p_{j+1}(t) = \frac{1}{2}(p_j(t+\beta) + p_j(t-\beta)). \tag{4.13}$$

Заметим, что вариация функции f_j вычисляется по величинам $p_j(\cdot)$ однозначно. Поэтому если мы возьмем другой набор аффинных преобразований $\widetilde{S}_k$ $(k = 1, 2)$, порождающих такую же последовательность величин $\tilde{p}_j$, то вариации функций $\tilde{f}_j$ будут совпадать с вариациями функций f_j.

Рассмотрим оператор подобия, порожденный преобразованиями $\widetilde{S}_k$, которые определяются следующими параметрами самоподобия: $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = d_2 = \frac{1}{2}$, $c_1 = c$, $c_2 = -c$. Нетрудно проверить, что $\tilde{p}_j$ будут тоже изменяться по закону (4.13) и $\tilde{p}_0 \equiv p_0$, поэтому $\tilde{p}_j \equiv p_j$ и $\operatorname{Var} f_j = \operatorname{Var} \tilde{f}_j$.

Дополним параметры самоподобия преобразований $\widetilde{S}_k$ такими значениями β_1 и β_2, чтобы самоподобная функция $\tilde{f}$ (а значит, и любая из функций $\tilde{f}_j$) была непрерывной. Тогда к функции $\tilde{f}$ применимы теоремы 4.3, 4.4, откуда следует, что функция $\tilde{f}$ (а значит, и f) имеет ограниченную вариацию только в том случае, когда $c = 0$. Но при $c = 0$ получаем, что $\tilde{f}_1 = x$, так что и $\tilde{f} = x$.

Лемма 4.8. *Пусть оператор подобия $\mathscr{S}$ задан двумя аффинными преобразованиями S_i, причем $a_1 = a_2 = \frac{1}{2}$, $d_1 = -\frac{1}{2}$, $d_2 = \frac{1}{2}$, $c_1 + c_2 = 1$, $c_2 \neq 0$. Рассмотрим последовательность операторов подобия $\mathscr{S}_{(k)}$ $(k \in \mathbb{N})$, где каждый оператор $\mathscr{S}_{(k)}$ задан двумя аффинными преобразованиями $S_{(k)i}$ $(i = 1, 2)$. При этом $\mathscr{S}_{(k)} \to S$ в следующем смысле: каждый из параметров самоподобия, задающих оператор $S_{(k)i}$, стремится к соответствующему параметру самоподобия, задающему оператор $\mathscr{S}$: $a_{(k)i} \to a_i$, $c_{(k)i} \to c_i$, $d_{(k)i} \to d_i$ при $k \to \infty$.*

Тогда

$$\sup_k(\sup_j \operatorname{Var} f_{(k)j}) = \infty, \quad \text{где } f_{(k)j} := S^j_{(k)}(f_0),\ f_0(x) = x.$$

Доказательство основывается на том, что если $S_{(k)} \to S$, то при любом фиксированном j выполнено $f_{(k)j} \to f_j$ равномерно на [0,1] при $k \to \infty$.

Действительно, если $a_{(k)i} \to a_i$, $c_{(k)i} \to c_i$, $d_{(k)i} \to d_i$, то и $\theta_{(k)i}(\cdot) \to \theta_i(\cdot)$, так как $\frac{d_{(k)i}}{a_{(k)i}} \to \frac{d_i}{a_i}$, $\frac{c_{(k)i}}{a_{(k)i}} \to \frac{c_i}{a_i}$ и $\theta_{i(k)} \to \theta_i$ при $k \to \infty$ равномерно по $t \in [a, b]$ для любого отрезка $[a, b]$, поэтому при фиксированном j получаем, что $(\theta_{(k)i_1} \circ \theta_{(k)i_2} \circ \dots \circ \theta_{(k)i_j})(1) \to (\theta_{i_1} \circ \theta_{i_2} \circ \dots \circ \theta_{i_j})(1)$ при $k \to \infty$.

Поскольку множество значений, которые могут принимать производные функций $\{f'_i\}_{i \leq j}$, ограничено, получаем, что $f'_{(k)j} \to f'_j$ при $k \to \infty$ равномерно на $[0, 1]$.

Заметим, что вариация $f_{(k)j}$ вычисляется по формуле (ср. с (4.5))

$$\operatorname{Var} f_{(k)j} = \sum_i |f'_{(k)j}||_{\Delta_{(k)i}} \cdot |\Delta_{(k)i}|, \tag{4.14}$$

где $\Delta_{(k)i} := a_{(k)i_1} \cdot \ldots \cdot a_{(k)i_j} \to \Delta_i := a_{i_1} \cdot \ldots \cdot a_{i_j}$.

Поскольку каждое слагаемое в формуле (4.14) стремится к соответствующему слагаемому в выражении для $\operatorname{Var} f_j$ (см. (4.5)), то и $\operatorname{Var} f_{(k)j} \to \operatorname{Var} f_j$.

Отсюда и следует утверждение леммы. Действительно, из условия $c_2 \neq 0$ вытекает нелинейность f, в силу леммы 4.7 получаем неограниченность вариации функции f, а также неограниченность в совокупности вариаций функций f_j. Стало быть, для любого $C > 0$ можно найти такую функцию f_j, что $\operatorname{Var} f_j > C$.

Выберем такое натуральное число k, что $|\operatorname{Var} f_{(k)j} - \operatorname{Var} f_j| < 1$, тогда для функции $f_{(k)j}$ справедлива оценка: $\operatorname{Var} f_{(k)j} > C - 1$. В силу произвольности C получаем утверждение леммы.

Лемма 4.9. *Пусть оператор подобия $\mathscr{S}$ задан двумя аффинными преобразованиями S_1 и S_2, причем $d_1 < 0$, $d_2 > 0$. Функции $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ определены как $S^j(f_0)$, $f_0(x) = x$. Тогда вариации f_j ограничены в совокупности, только если $\theta_1(1) = \theta_2(1) = 1$, т. е. если $c_i + d_i = a_i$, т. е. $f(x) \equiv x$.*

Доказательство. Пусть вариации f_j ограничены в совокупности. Проделаем следующие операции, не увеличивающие $\sup_j \operatorname{Var} f_j$.

Рассмотрим вместо оператора $\mathscr{S}$ оператор $\mathscr{S}^2$ (он имеет ту же неподвижную точку). Оператор $\mathscr{S}^2$ задается уже четырьмя аффинными преобразованиями $S_{il} := S_i(S_l)$, $i, l = 1, 2$. Параметры самоподобия этих аффинных преобразований находятся по формулам $d_{il} = d_i d_l$, поэтому $d_{11}, d_{22} > 0$, $d_{12}, d_{21} < 0$. Склеим аффинные преобразования S_{il}, имеющие одинаковый знак у параметров самоподобия d_{il} (а именно, склеим S_{11} с S_{22} , S_{12} с S_{21} и получим новые преобразования $\widetilde{S}_1$ и $\widetilde{S}_2$). В итоге получим новый оператор $\widetilde{\mathscr{S}}$ с новыми параметрами самоподобия $\tilde{d}_1 < 0$, $\tilde{d}_2 > 0$, причем выполнено условие $|\tilde{d}_1| + |\tilde{d}_2| = 1$.

Параметры самоподобия при переходе от оператора $\mathscr{S}$ к оператору $\widetilde{\mathscr{S}}$ меняются, как указано ниже. Параметры $\tilde{d}_i$ меняются следующим образом:

$$\tilde{d}_1 = d_{12} + d_{21} = 2d_1d_2, \quad \tilde{d}_2 = d_{11} + d_{22} = (d_1)^2 + (d_2)^2,$$

$$\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 = (d_1 + d_2)^2. \tag{4.15}$$

Аналогично получаем формулы для $\tilde{a}_i$:

$$\tilde{a}_1 = a_{12} + a_{21} = 2a_1a_2, \quad \tilde{a}_2 = a_{11} + a_{22} = (a_1)^2 + (a_2)^2.$$

Следовательно,

$$\tilde{a}_2 - \tilde{a}_1 = (a_2 - a_1)^2. \tag{4.16}$$

Осталось получить формулы для $\tilde{c}_i$. Так как $\theta_{ij}(t) := \theta_i(\theta_j(t)) = \frac{d_{ij}}{a_{ij}}t + \frac{c_{ij}}{a_{ij}}$, то $a_{ij}\theta_{ij}(t) = d_{ij}t + c_{ij}$. С другой стороны,

$$a_ia_j\theta_i(\theta_j(t)) = a_ia_j\left[\frac{d_i}{a_i}\left(\frac{d_j}{a_j}t + \frac{c_j}{a_j}\right) + \frac{c_i}{a_i}\right] = d_id_jt + c_jd_i + c_ia_j.$$

Таким образом, $c_{ij} = c_jd_i + c_ia_j$. Теперь найдем $\tilde{c}_i$:

$$\tilde{c}_1 = c_{12} + c_{21} = (c_2d_1 + c_1a_2) + (c_1d_2 + c_2a_1) = c_1(a_2 + d_2) + c_2(a_1 + d_1),$$

$$\tilde{c}_2 = c_{11} + c_{22} = (c_1d_1 + c_1a_1) + (c_2d_2 + c_2a_2) = c_1(a_1 + d_1) + c_2(a_2 + d_2).$$

Следовательно,

$$\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 = c_1(a_2 - a_1 + d_2 - d_1) + c_2(a_1 - a_2 + d_1 - d_2) = (c_1 - c_2)(a_2 - a_1 + d_2 - d_1),$$

$$\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 = (c_1 - c_2)(a_2 - a_1 + 1). \tag{4.17}$$

Проделаем такую операцию (замена $\mathscr{S}$ на $\mathscr{S}^2$ и склейка тех преобразований, у которых параметры d_i имеют одинаковый знак) несколько раз. Обозначим через $\mathscr{S}'$ оператор $\mathscr{S}$ после k таких операций.

Заметим, что величина $\sup\limits_j \operatorname{Var} f_j$ для $f_j = [(\mathscr{S}')^j](f_0)$ $(f_0(x) = x)$ при этих операциях не изменится. Учитывая (4.15)–(4.17), получим, что параметры самоподобия изменятся следующим образом:

$$\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 = ((a_1 - a_2)^2)^2 \dots)^2 = (a_1 - a_2)^{2^k},$$

$$\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 = ((d_1 + d_2)^2)^2 \dots)^2 = (d_1 + d_2)^{2^k},$$

$$\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 = (c_1 - c_2)(1 + (a_2 - a_1))(1 + (a_2 - a_1)^2)(1 + (a_2 - a_1)^{2^2}) \dots (1 + (a_2 - a_1)^{2^k}).$$

Очевидно, что $\tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 \to 0$, $\tilde{d}_1 + \tilde{d}_2 \to 0$ при $k \to \infty$.

Преобразуем выражение для $\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2$ таким образом:

$$\begin{aligned}(c_1 - c_2)&(1 + (a_2 - a_1))(1 + (a_2 - a_1)^2)(1 + (a_2 - a_1)^{2^2}) \dots (1 + (a_2 - a_1)^{2^k}) \\ &= \frac{c_1 - c_2}{1 - (a_2 - a_1)}(1 - (a_2 - a_1))(1 + (a_2 - a_1))(1 + (a_2 - a_1)^2) \\ &\times (1 + (a_2 - a_1)^{2^2}) \dots (1 + (a_2 - a_1)^{2^k}) = (c_1 - c_2)\frac{1 - (a_2 - a_1)^{2^{k+1}}}{1 - (a_2 - a_1)}.\end{aligned}$$

Тем самым $\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 \to \frac{c_1 - c_2}{1-(a_2-a_1)}$ при $k \to \infty$. Следовательно, $\tilde{c}_1 - \tilde{c}_2 \to 1$ тогда и только тогда, когда $c_1 - c_2 = 1 - (a_2 - a_1)$. Предположим, что это условие выполнено: пусть $c_1 - c_2 = 1 - (a_2 - a_1)$. Перепишем это условие в другом виде:

$$c_1 - c_2 = (d_2 - d_1) - (a_2 - a_1) \Leftrightarrow c_1 + d_1 - a_1 = c_2 + d_2 - a_2. \tag{4.18}$$

Условие непрерывности состоит в том, что $c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = 1$, т. е.

$$c_1 + c_2 + d_1 + d_2 = a_1 + a_2 \Leftrightarrow c_1 + d_1 - a_1 = -(c_2 + d_2 - a_2). \tag{4.19}$$

Из уравнений (4.18), (4.19) следует, что $c_1 + d_1 - a_1 = c_2 + d_2 - a_2 = 0$. Тем самым $f_1 = x$, а значит, $f_j = x$ и для остальных j, так что для предельной функции выполнено $f = x$.

Докажем теперь, что если $c_1 - c_2 \neq 1 - (a_2 - a_1)$, то вариации f_j будут не ограничены в совокупности. Если $c_1 - c_2 \neq 1 - (a_2 - a_1)$, то $\mathscr{S}'_{(k)} \to \mathscr{S}''$ при $k \to +\infty$, где $\mathscr{S}''$ — оператор, построенный в лемме 4.8, т. е. $a''_1 = a''_2 = \frac{1}{2}$, $d''_1 = -\frac{1}{2}$, $d''_2 = \frac{1}{2}$, $c''_2 \neq 0$.

Так как на каждом шаге $\sup\limits_n \operatorname{Var} f_{n(k)}$ не увеличивается, получаем, что $\sup\limits_n \operatorname{Var} f_n = \sup\limits_k (\sup\limits_n \operatorname{Var} f_{(k)n}) = \infty$, что и требовалось.

Теорема 4.5. *Пусть f — неподвижная точка оператора подобия $\mathscr{S}$, для которого среди чисел $d_1, \ldots, d_n$ есть как положительные, так и отрицательные. Тогда если вариация функции f ограничена, то*

$$\sum_{d_k \geq 0} (c_k + d_k) = \sum_{d_k \geq 0} a_k, \quad \sum_{d_k < 0} (c_k + d_k) = \sum_{d_k < 0} a_k. \tag{4.20}$$

Доказательство. Теорема непосредственно вытекает из предыдущей леммы.

Склеим те преобразования S_i, у которых числа d_i одного знака, в одно новое преобразование. Получим новый оператор подобия $\widetilde{\mathscr{S}}$, заданный двумя операторами преобразования S'_1 и S''_2. У функций $\tilde{f}_j := \widetilde{\mathscr{S}}^j f_0$ вариации не увеличатся по сравнению с вариациями функций $f_j := \mathscr{S}^j f_0$ $(f_0 = x)$ и будут ограничены в совокупности согласно лемме 4.9 только в случае, когда выполнены равенства (4.20).

Так как до склейки вариации f_j были ограничены, выписанные равенства выполнены, что и требовалось.

4.2.4. Свойства параметров самоподобия самоподобной функции ограниченной вариации. Пусть $\mathscr{S}$ по-прежнему оператор подобия, задающий функцию f, θ_k — функции, определенные (4.2). В силу теоремы 4.5 мы можем рассматривать такой оператор подобия $\widetilde{\mathscr{S}}$, параметры которого удовлетворяют следующим условиям:

а) $\tilde{a}_i = a_i$,

б) если $d_i \geq 0$, то $\tilde{\theta}_i \equiv \theta_i$ (т. е. $\tilde{d}_i = d_i$, $\tilde{c}_i = c_i$),

в) если $d_i < 0$, то $\tilde{\theta}_i(t) = 2 - \theta_i(t)$ (т. е. $\tilde{d}_i = -d_i > 0$, $\tilde{c}_i = 2a_i - c_i$).

Докажем, что $\sum\limits_{i=1}^{n} (\tilde{c}_i + \tilde{d}_i) = 1$:

$$\sum_{i=1}^{N} (\tilde{c}_i + \tilde{d}_i) = \sum_{d_i \geq 0} (\tilde{c}_i + \tilde{d}_i) + \sum_{d_i < 0} (\tilde{c}_i + \tilde{d}_i) = \sum_{d_i \geq 0} (c_i + d_i) + \sum_{d_i < 0} (-d_i + 2a_i - c_i)$$

(по теореме 4.5)

$$= \sum_{d_i \geq 0} a_i + \sum_{d_i<0} a_i + \sum_{d_i<0} (a_i - c_i - d_i) = \sum_{d_i \geq 0} a_i + \sum_{d_i<0} a_i = 1.$$

Поскольку $\sum\limits_{i=1}^{N} (\tilde{c}_i + \tilde{d}_i) = 1$, можно задать $\tilde{\beta}_i$ так, чтобы оператор подобия $\widetilde{\mathscr{S}}$ переводил непрерывные функции в непрерывные.

При такой конструкции действие $f \to \mathscr{S}(f)$ эквивалентно композиции двух действий:

1) $f \to \widetilde{\mathscr{S}}(f)$,

2) на тех отрезках $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, для которых $d_i < 0$, заменим каждое значение производной функции $[\widetilde{\mathscr{S}}(f)]$, равной y, на $2 - y$.

Другими словами, функция $[\widetilde{\mathscr{S}}(f)](x)$ заменяется функцией $2x - [\widetilde{\mathscr{S}}(f)](x)$. После этого за счет вертикальных сдвигов частей графика функции f на отрезках $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ достигается непрерывность в точках α_i.

Заметим, что $\mathscr{S}$ всегда можно представить в таком виде, но только в условиях теоремы 4.5 оператор $\widetilde{\mathscr{S}}$ будет таким, что $\sum\limits_{i=1}^{N} (\tilde{c}_i + \tilde{d}_i) = 1$.

Теорема 4.6. *Если функция f имеет ограниченную вариацию, то функции $\tilde{\theta}_i$ $(i = 1, \ldots, n)$ имеют общую неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\omega(f) = \mathrm{Var}(f - \alpha x) + \mathrm{Var}(f - (2 - \alpha)x),$$

где α — некоторое фиксированное действительное число. Проследим, как меняется величина $\omega(f_j)$ при переходе от функции f_j к f_{j+1} ($f_j := \mathscr{S}^j(f_0)$, $f_0(x) = x$). Ввиду того, что вариации функций f_j ограничены в совокупности, вариации функций $(f_j - \alpha x)$ и $(f_j - (2 - \alpha)x)$ тоже ограничены в совокупности. Таким образом, величины $\omega(f_j)$ тоже ограничены при $j \to \infty$.

Так как f_j и f_{j+1} совпадают в точках множества T_j (см. доказательство теоремы 4.1) и f_j линейна между его точками, то $\omega(f_{j+1}) \geq \omega(f_j)$. Поскольку $\omega(f_j)$ ограничены в совокупности, то $\omega(f_{j+1}) - \omega(f_j) \to 0$ при $j \to \infty$. Покажем, что $\omega(\mathscr{S}(f_j)) = \omega(\widetilde{\mathscr{S}}(f_j))$. Действительно, так как обе функции непрерывны, достаточно показать равенство вариаций на каждом отрезке $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$.

На тех отрезках, где $d_i \geq 0$, выполнено соотношение $\widetilde{\mathscr{S}}(f_j) \equiv \mathscr{S}(f_j)$ на $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ и равенство тривиально. На тех отрезках, где $d_i < 0$, запишем вариацию функции $\mathscr{S}(f_j) - \alpha x$ на отрезке $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$ через ее производные:

$$\mathrm{Var}_{[\alpha_i, \alpha_{i+1}]}(\mathscr{S}(f_j) - \alpha x) = \sum_y |y - \alpha| p(y),$$

где $p(y) = \mu(\{x \in [\alpha_i, \alpha_{i+1}] \mid [\mathscr{S}(f_j)]'(x) = y\})$.

Аналогично получим справедливость следующего соотношения:

$$\sum_y |y - \alpha| p(y) + \sum_y |y - (2-\alpha)| p(y) = \sum_y |(2-y) - \alpha| p(y) + \sum_y |(2-y) - (2-\alpha)| p(y),$$

откуда вытекает, что равенство $\omega(\mathscr{S}(f_j)) = \omega(\widetilde{\mathscr{S}}(f_j))$ выполнено тождественно.

Так как $\omega(f_{j+1}) - \omega(f_j) \to 0$, то и $\omega(\widetilde{\mathscr{S}}(f_j)) - \omega(f_j) \to 0$. Следовательно, $\mathrm{Var}(\widetilde{\mathscr{S}}(f_j) - \alpha x) - \mathrm{Var}(f_j - \alpha x) \to 0$ при $j \to \infty$ для любого фиксированного α.

По определению преобразования $\widetilde{\mathscr{S}}$ для всех чисел $\tilde{d}_i$ выполнены неравенства $\tilde{d}_i \geq 0$. Тем самым по следствию 4.3 получаем, что у всех функций $\tilde{\theta}_k$ одна и та же неподвижная точка, что и требовалось.

Также существует связь между ограниченностью вариации самоподобной функции f и свойствами функций $\theta_k(t) = \frac{d_k t + c_k}{a_k}$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Следствие 4.5. *Если самоподобная функция f имеет ограниченную вариацию, то все функции θ_k, для которых $d_k \geq 0$, имеют общую неподвижную точку.*

Доказательство. Действительно, для тех индексов k, для которых $d_k \geq 0$, функции θ_k и $\tilde{\theta}_k$ совпадают (см. п. 4.2.4), а в соответствии с теоремой 4.6 функции $\tilde{\theta}_k$ имеют общую неподвижную точку.

Лемма 4.10. *Для тех индексов $k \in \{1, \ldots, n\}$, для которых выполнено условие $d_k \neq -a_k$, функции θ_k имеют общую неподвижную точку.*

Доказательство. Рассмотрим преобразование S^2, для которого функция f также является неподвижной. Так как $d_k^2 \geq 0$, по следствию 4.5 получаем, что $\theta_k(\theta_k)$ имеют общую неподвижную точку. Здесь $\theta_k(\theta_k)$ означает проитерированную функцию $(\theta_k(\theta_k))(t) := \frac{d_k \theta_k(t) + c_k}{a_k}$. При этом для фиксированного индекса k неподвижная точка функции $\theta_k(\theta_k)$ может не совпасть с неподвижными точками других отображений $\theta_j(\theta_j)$ только при условии $d_k = -a_k$. Так как неподвижные точки отображений θ_k и $\theta_k(\theta_k)$ совпадают, получаем утверждение леммы.

Лемма 4.11. *Для тех индексов $k \in \{1, \ldots, n\}$, для которых выполнено условие $d_k = -a_k$, выполнены соотношения $\theta_k(t) = 2 - t$ и $d_k + c_k = a_k$.*

Доказательство. Так как $d_k = -a_k$, то $\theta_k(t) = -t + c_k/a_k$ и $\tilde{\theta}_k(t) = 2 - \theta_k(t) = t + 2 - c_k/a_k$. По теореме 4.6 функции $\tilde{\theta}_k$ имеют общую неподвижную точку, т. е. $2 - c_k/a_k = 0$, откуда $c_k + d_k = 2a_k - a_k = a_k$.

Лемма 4.12. *Для тех индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, для которых $d_i < 0$, выполнено равенство $\theta_i(1) = 1$.*

Доказательство. Рассмотрим только те θ_i, для которых $d_i < 0$. Для них известно, что преобразования $\tilde{\theta}_i(t) = 2 - \theta_i(t)$ имеют одну и ту же неподвижную точку и, следовательно, θ_i имеют одну и ту же неподвижную точку. Обозначим ее через t_0.

Пусть для определенности $t_0 \geq 1$ (случай $t_0 \leq 1$ рассматривается аналогично). Так как $d_i < 0$, то t и $\theta_i(t)$ лежат по разные стороны от t_0, поэтому $\theta_i(1) \geq t_0 \geq 1$, т. е. $\theta_i(1) = \frac{d_i + c_i}{a_i} \geq 1$. Таким образом, $d_i + c_i \geq a_i$ для всех i, для которых $d_i < 0$.

Поскольку $\sum\limits_{\tilde{d}_k < 0} (\tilde{c}_k + \tilde{d}_k) = \sum\limits_{\tilde{d}_k < 0} \tilde{a}_k$, получаем, что $d_i + c_i = a_i$, т. е. $\theta_i(1) = 1$, что и требовалось.

Следствие 4.6. *Если среди чисел $\{d_k\}_{k=1}^n$ есть как отрицательные, так и положительные, а вариации функций f_j ($f_j := S^j(f_0)$, $f_0(x) = x$) ограничены в совокупности, то самоподобная функция f линейна.*

Доказательство. По лемме 4.12 для тех индексов $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, для которых $d_i < 0$, функции θ_i имеют общую неподвижную точку $t_0 = 1$. По лемме 4.10 получаем, что эта неподвижная точка общая для всех функций θ_k,

$k \in \{1, 2, \ldots, n\}$, таких, что $\theta_k(1) = 1$, т. е. $d_k + c_k = a_k$. Тогда если $f_0 = x$, то $f_1 = f_2 = \cdots = x$, а значит, и $f = x$.

Таким образом, критерий ограниченности вариации доказан полностью, т. е. справедлива следующая

Теорема 4.7. *При $D = 1$ вариация невырожденной (нелинейной) самоподобной функции f ограничена тогда и только тогда, когда f непрерывна и все функции θ_k имеют общую неподвижную точку.*

Осталось рассмотреть некоторые обобщения.

4.3. Случай отрицательных a_k. Для случая, когда среди параметров самоподобия какие-то из чисел $\{a_k\}_{k=1}^n$ отрицательны, осталась неразобранной только ситуация, когда $D = 1$ и f непрерывна. Сведем ее к случаю, когда все a_k неотрицательны: рассмотрим оператор $\widetilde{S}$ такой, что $\operatorname{Var} \tilde{f}_k = \operatorname{Var} f_k$, а параметры самоподобия оператора $\widetilde{S}$ выбираются следующим образом:

1) если $a_k \geq 0$, то $\tilde{a}_k = a_k$, $\tilde{d}_k = d_k$, $\tilde{c}_k = c_k$;

2) если $a_k < 0$, то $\tilde{a}_k = -a_k > 0$, $\tilde{d}_k = -d_k$, $\tilde{c}_k = -c_k$; все числа $\tilde{\beta}_k$ выбираются из условия непрерывности функции $\tilde{f}$.

Таким образом, получаем, что $\tilde{\theta}_k = \theta_k$, $|\tilde{a}_k| = |a_k|$. Из теоремы 4.3 получаем, что теорема 4.7 справедлива и в том случае, когда среди чисел a_k есть отрицательные.

4.4. Случай $f(0) = f(1)$. Достаточно рассмотреть $\tilde{f}(x) = f(x) + x$. Для этой функции будет $\tilde{f}(0) \neq \tilde{f}(1)$ и применимы все теоремы, выведенные ранее.

Очевидно, f и $\tilde{f}$ имеют ограниченную или неограниченную вариацию одновременно. Наличие общей неподвижной точки у θ_k также не зависит от добавления линейного слагаемого, поэтому критерий ограниченности вариации будет тот же.

§ 5. Некоторые приложения к спектральным задачам

Как известно, число δ, характеризующее степенной порядок роста считающих функций задачи (1.1), (1.2), определяется из уравнения (см. [11])

$$\sum_{k=1}^{n} (a_k |d_k|)^\delta = 1.$$

Теорема 5.1. *Если $\sum\limits_{k=1}^{n} |d_k| \leq 1$, то $\delta \leq \frac{1}{2}$.*

Доказательство. Рассмотрим только случай $a_k > 0$ ($\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 1$). Несложное применение неравенства Коши — Буняковского приводит к оценкам

$$1 = \sum_{k=1}^{n} (a_k |d_k|)^\delta \leq \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (a_k)^{2\delta}} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} (|d_k|)^{2\delta}},$$

что при $\delta > \frac{1}{2}$ невозможно.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Mandelbrot B.* Fractals, form, chance, and dimension. San Francisco: Freeman, 1977.
2. *Hutchinson J.* Fractals and self-similarity // Indiana Univ. J. Math. 1981. V. 30. P. 713–741.
3. *Barnsley M.* Fractals everywere. New York: Acad. Press, 1988.
4. *De Rham G.* Une peu de mathématique à propos d'une courbe plane // Rev. Math. Elemetaires. 1947. V. 2, N 4, 5. P. 73–76, 89–97.
5. *De Rham G.* Sur une courbe plane // J. Math. Pures Appl. 1956. V. 35, N 9. P. 25–42.
6. *De Rham G.* Sur les courbes limités de polygones obtenus par trisection // Enseign. Math. 1959. V. 5, N 2. P. 29–43.
7. *Protasov V.* Refinement equations with nonnegative coefficients // J. Fourier Anal. Appl. 2000. V. 6, N 1. P. 55–78.
8. *Протасов В. Ю.* Фрактальные кривые и всплески // Изв. РАН Сер. мат. 2006. Т. 70, № 5. С. 105–145.
9. *Шейпак И. А.* О конструкции и некоторых свойствах самоподобных функций в пространствах $L_p[0,1]$ // Мат. заметки. 2007. Т. 81, № 6. С. 924–938.
10. *Solomyak M., Verbitsky E.* On a spectral problem related to self-similar measures // Bull. London Math. Soc. 1995. V. 27. P. 242–248.
11. *Владимиров А. А., Шейпак И. А.* Самоподобные функции в пространстве $(L_2[0,1])$ и задача Штурма — Лиувилля с сингулярным индефинитным весом // Мат. сб. 2006. Т. 197, № 11. С. 13–30.
12. *Владимиров А. А., Шейпак И. А.* Индефинитная задача Штурма — Лиувилля для некоторых классов самоподобных сингулярных весов // Тр. МИРАН. 2006. Т. 255. С. 88–98.
13. *Шейпак И. А.* Особые точки самоподобной функции нулевого спектрального порядка. Самоподобная струна Стилтьеса // Мат. заметки. 2010. Т. 88, № 2. С. 303–316.
14. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. М.: Наука, 1974.

Статья поступила 28 января 2011 г.

Гаганов Никита Валерьевич, Шейпак Игорь Анатольевич
Московский гос. университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет,
Воробьевы горы, Москва 119992
`iasheip@mech.math.msu.su`