Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.512

МУЛЬТИПЛИКАТОРЫ РЯДОВ ПО СИСТЕМЕ ХААРА

Е. М. Семенов, С. Н. Уксусов

Аннотация. Вычислены нормы мультипликатора по системе Хаара в некоторых перестановочно-инвариантных пространствах, в которых система Хаара не является безусловным базисом.

Ключевые слова: система Хаара, мультипликатор, пространство Лоренца.

1. Система функций $\chi_0^0(t) = 1$,

$$\chi_n^k(t) = \begin{cases} 1, & (k-1)2^{-n} < t < \left(k - \frac{1}{2}\right)2^{-n}, \\ -1, & \left(k - \frac{1}{2}\right)2^{-n} < t < k2^{-n}, \\ 0 & \text{для остальных } t \in [0,1], \end{cases}$$

где $1 \leq k \leq 2^n$, $n = 0, 1, \dots$, называется *системой Хаара*. Множество индексов (n, k), соответствующих функциям Хаара, будем обозначать через Ω. Формула $m = 2^n + k$ устанавливает взаимно однозначное соответствие между Ω и множеством натуральных чисел $\mathbb{N}$ и позволяет использовать одноиндексную систему Хаара $\{\chi_m\}$.

Всякая последовательность $s = (s_1, s_2, \dots)$ порождает мультипликатор S, который на полиномах по системе Хаара определяется следующим образом:

$$S\Big(\sum_m c_m \chi_m\Big) = \sum_m s_m c_m \chi_m.$$

Согласно классической теореме Пэли — Марцинкевича [1, теорема 3, следствие 2; 2, разд. 2, с. 5] мультипликатор S ограничен в L_p $(1 < p < \infty)$, если $\sup\limits_m |s_m| < \infty$. Более того, если $1 < p < \infty$, то

$$\|s\|_{L_p} \approx \|s\|_{l_\infty} = \sup_m |s_m|,$$

где знак $\approx$ означает двусторонние оценки с константами, которые не зависят от s. Настоящая работа так же, как и [3], посвящена изучению мультипликаторов Фурье — Хаара в r.i.-пространствах и усиливает результат, анонсированный в [4]. Мультипликаторы по системе Хаара изучались в работах [5–8] и многих др.

2. Приведем необходимые определения. Банахово функциональное пространство E на $[0, 1]$ с мерой Лебега называется *перестановочно-инвариантным* (r.i.)*-пространством* или *симметричным*, если

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00614–а).

1) из $|x(t)| \le |y(t)|$ и $y \in E$ вытекает, что $x \in E$ и $\|x\|_E \le \|y\|_E$;

2) из равноизмеримости функций $x(t), y(t)$ и $y \in E$ следует, что $x \in E$ и $\|x\|_E = \|y\|_E$.

Согласно [2] в дальнейшем будем предполагать, что E сепарабельно или сопряжено к сепарабельному пространству. Обозначим через $\varkappa_e(t)$ характеристическую функцию измеримого множества $e \subset [0,1]$.

Обозначим через Φ множество возрастающих вогнутых на $[0,1]$ функций, удовлетворяющих условию $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = 1$. Всякая функция $\varphi \in \Phi$ порождает пространство Лоренца $\Lambda(\varphi)$ с нормой

$$\|x\|_{\Lambda(\varphi)} = \int_0^1 x^*(t)\, d\varphi(t),$$

где $x^*(t)$ — перестановка функции $x(t)$ [9, с. 81].

Система $\left\{2^{\frac{n}{2}}\chi_n^k,\ (n,k) \in \Omega\right\}$ полная ортонормированная. Если r.i.-пространство E сепарабельно, то множество полиномов по системе Хаара плотно в E. Система Хаара образует монотонный базис в E.

Все изложенные выше сведения о r.i.-пространствах содержатся в [2, 9], о системе Хаара — в $[1, 2, 7, 8]$.

Пусть $(n,k) \in \Omega$ и $\Delta_n^k = \left(\frac{k-1}{2^n}, \frac{k}{2^n}\right)$. Последовательность вложенных друг в друга диадических интервалов

$$\Delta_0^1 \supset \Delta_1^{k_1} \supset \cdots \supset \Delta_n^{k_n}, \quad n \in \mathbb{N},$$

называется *цепью.* Множество цепей обозначим через A. Каждой цепи $K = (1, k_1, \ldots, k_n)$ поставим в соответствие число

$$V(K,s) = \sum_{m=1}^{n} |s_{m,k_m} - s_{m-1,k_{m-1}}|,$$

которое естественно назвать *вариацией s по цепи K.* Введем на пространстве последовательностей $s = \{s_{n,k}, (n,k) \in \Omega\}$ полунорму

$$\|s\|_W = \sup_{K \in A} V(K,s) = \sup_{K \in A, n \in \mathbb{N}} \sum_{m=1}^{n} |s_{m,k_m} - s_{m-1,k_{m-1}}|$$

и множество тех s, для которых $\|s\|_W < \infty$, будем обозначать через W.

Из соображений двойственности вытекает [10, 4.11.4, 4.11.12], что мультипликатор S ограничен в L_1 тогда и только тогда, когда S ограничен в L_∞, и $\|s\|_{L_1} = \|s\|_{L_\infty}$. Если $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_\infty$, то через Vx мы будем обозначать ее вариацию, т. е.

$$Vx = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k - x_{k-1}|.$$

3. Приведем вначале вспомогательные результаты. Доказательства следующих двух лемм просты, поэтому мы их не приводим.

Лемма 1. *Если $x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_\infty$, то*

$$Vx \le 2 \sup \left| \sum_{k=1}^{m} (-1)^k x_{j_k} \right|,$$

где супремум берется по всем $m \in \mathbb{N}$ и возрастающим последовательностям $j_k \in \mathbb{N}$.

Лемма 2. *Пусть s — ограниченная последовательность на Ω и S — соответствующий мультипликатор. Если $\|S\varkappa_{\Delta_n^k}\|_{L_1} \le C2^{-n}$ для некоторого $C > 0$ и всех $(n,k) \in \Omega$, то $\|s\|_{L_1} \le C$.*

Теорема 3. *Для того чтобы мультипликатор S был ограничен в L_1, необходимо и достаточно, чтобы $s \in W$. Более того, $\|s\|_{L_1}$ эквивалентна $\|s\|_W + \|s\|_{l_\infty}$.*

Доказательство. Необходимость. Пусть мультипликатор S, порожденный последовательностью $s = \{s_{n,k}, (n,k) \in \Omega\}$, ограничен в L_1. В силу равенства $\|s\|_{L_1} = \|s\|_{L_\infty}$ мультипликатор S ограничен в L_∞. Каждой цепи

$$\Delta_{n_1}^{k_1} \supset \Delta_{n_2}^{k_2} \supset \dots \supset \Delta_{n_m}^{k_m}, \quad m \in \mathbb{N},$$

поставим в соответствие функцию

$$x(t) = \sum_{j=1}^{m} a_j \chi_{n_j}^{k_j}(t),$$

где числа $a_j = \pm 1$ строятся следующим образом. Функции $\chi_{n_1}^{k_1}(t) + \chi_{n_2}^{k_2}(t)$ и $\chi_{n_1}^{k_1}(t) - \chi_{n_2}^{k_2}(t)$ на интервале $\Delta_{n_2}^{k_2}$ принимают значения 2 и 0 или 0 и -2 соответственно. Поэтому, полагая $a_1 = 1$, мы можем выбрать a_2 равным 1 или -1 так, чтобы функция $a_1\chi_{n_1}^{k_1}(t) + a_2\chi_{n_2}^{k_2}(t)$ равнялась 0 на носителе функции $\chi_{n_3}^{k_3}(t)$. Следующая пара индексов a_3 и a_4 определяется аналогично. Тогда $x(t)$ принимает значения из множества $\{0, \pm 1, \pm 2\}$. Если $m \ge 2$, то $\|x\|_{L_\infty} = 2$ и

$$\|Sx\|_{L_\infty} = \left\| \sum_{j=1}^{m} s_{n_j,k_j} a_j \chi_{n_j}^{k_j} \right\|_{L_\infty} \le 2\|s\|_{L_\infty}.$$

На интервале $\Delta_{n_m}^{k_m}$ функции $a_j\chi_{n_j}^{k_j}(t)$ $(1 \le j \le m)$ принимают значение $(-1)^j$ или $(-1)^{j+1}$. Следовательно,

$$\left| \sum_{j=1}^{m} (-1)^j s_{n_j,k_j} \right| \le 2\|s\|_{L_\infty}.$$

Полученная оценка выполнена для произвольной подпоследовательности $\{s_{n_j,k_j}\}$ последовательности индексов $s_{0,1}, s_{1,i_1}, \dots, s_{r,i_r}$ соответствующей цепи

$$\Delta_0^1 \supset \Delta_1^{i_1} \supset \dots \supset \Delta_r^{i_r}, \quad r \in \mathbb{N}.$$

Применяя лемму 1, для любой цепи получаем $V\{s_{r,i_r}\} \le 4\|s\|_{L_\infty}$. Отсюда $\|s\|_W \le 4\|s\|_{L_\infty}$.

Достаточность. Предположим, что $\|s\|_W < \infty$. Пусть $(i,j) \in \Omega$. Нетрудно подсчитать, что

$$\varkappa_{\Delta_i^j} = 2^{-i}\chi_0^0 + \sum_{n=0}^{i-1} \varepsilon_n 2^{n-i} \chi_n^{k_n} \tag{1}$$

для некоторых $\varepsilon_n = \pm 1$ и некоторой цепи $\Delta_0^1 \supset \Delta_1^{k_1} \supset \dots \supset \Delta_{i-1}^{k_{i-1}}$. Действительно, (1) есть разложение функции $\varkappa_{\Delta_i^j}(t)$ в ряд по системе Хаара. Применяя преобразование Абеля, получаем

$$S\varkappa_{\Delta_i^j} = (s_{0,0} - s_{0,1})2^{-i}\chi_0^0 + (s_{0,1} - s_{1,k_1})\big(2^{-i}\chi_0^0 + \varepsilon_0 2^{-i}\chi_0^1\big) + \dots + (s_{i-2,k_{i-2}} - s_{i-1,k_{i-1}})\left(2^{-i}\chi_0^0 + \sum_{n=0}^{i-2}\varepsilon_n 2^{n-i}\chi_n^{k_n}\right) + s_{i-1,k_{i-1}}\left(2^{-i}\chi_0^0 + \sum_{n=0}^{i-1}\varepsilon_n 2^{n-i}\chi_n^{k_n}\right).$$

В силу [7, теорема 4.a.1] для любого r.i.-пространства E, натурального n и произвольной последовательности чисел a_1, a_2, … ,a_{n+1} выполнено неравенство

$$\left\|\sum_{k=1}^{n+1} a_k\chi_k\right\|_E \geq \left\|\sum_{k=1}^{n} a_k\chi_k\right\|_E.$$

В нашем случае

$$\left\|2^{-i}\chi_0^0 + \sum_{n=0}^{m}\varepsilon_n 2^{n-i}\chi_n^{k_n}\right\|_{L_1} \leq \|\varkappa_{\Delta_i^j}\|_{L_1} = 2^{-i}$$

для любого $m = 0, 1, \dots, i-1$. Отсюда

$$\|S\varkappa_{\Delta_i^j}\|_{L_1} \leq |s_{0,0} - s_{0,1}|\big\|2^{-i}\chi_0^0\big\|_{L_1} + \dots + |s_{i-1,k_{i-1}} - s_{0,1}|\left\|2^{-i}\chi_0^0 + \sum_{n=0}^{i-1}\varepsilon_n 2^{n-i}\chi_n^{k_n}\right\|_{L_1} \leq \left(|s_{0,0} - s_{0,1}| + \sum_{n=0}^{i-2}|s_{n,k_n} - s_{n+1,k_{n+1}}| + |s_{i-1,k_{i-1}}|\right)2^{-i}.$$

Лемма 2 показывает, что полученная оценка влечет ограниченность S в L_1 и неравенство

$$\|s\|_{L_1} \leq |s_{0,0} - s_{0,1}| + \sum_{n=0}^{i-2}|s_{n,k_n} - s_{n+1,k_{n+1}}| + |s_{i-1,k_{i-1}}|.$$

Так как $|s_{0,0} - s_{0,1}| + |s_{i-1,k_{i-1}}| \leq 3\sup\limits_{\Lambda,K}|s_{n,k}|$, то $\|s\|_{L_1} \leq \|s\|_W + 3\|s\|_{l_\infty}$. Из оценки $\|s\|_W \leq 4\|s\|_{L_\infty}$ и очевидного неравенства $\|s\|_{L_1} \geq \|s\|_{l_\infty}$ получаем окончательно

$$\max\left(\frac{1}{4}\|s\|_W, \|s\|_{l_\infty}\right) \leq \|s\|_{L_1} \leq \|s\|_W + 3\|s\|_{l_\infty}. \qquad \square$$

Поскольку из ограниченности линейного оператора в L_1 и L_∞ следует его ограниченность в любом r.i.-пространстве [2, 2.a.10; 9, 2.4.3], из теоремы 3 вытекает

Следствие 4. *Для того чтобы мультипликатор S был ограничен в любом r.i.-пространстве* E, *необходимо и достаточно, чтобы $s \in W$.*

4. Ортогональный проектор на подсистему χ_{n_i} можно рассматривать как мультипликатор S, для которого

$$s_k = \begin{cases} 1, & k = n_i, \\ 0, & k \neq n_i. \end{cases}$$

Если система Хаара образует безусловный базис в r.i.-пространстве E, то S ограничен в E. Если же система Хаара не является безусловным базисом в E, то ограниченность S зависит от $\{n_i\}$.

Если $\alpha > 0$, то функция $\ln^{-\alpha}\frac{e}{t}$ вогнута в некоторой окрестности нуля. Тогда существует такое $t_\alpha \in (0,1)$, что функция $\varphi_\alpha(t)$, совпадающая с $\ln^{-\alpha}\frac{e}{t}$ на $[0,t_\alpha]\cup\{1\}$ и линейная на $[t_\alpha,1]$, возрастает и вогнута на $[0,1]$. Ясно, что $\varphi_\alpha(t)$ эквивалентна функции $\ln^{-\alpha}\frac{e}{t}$. Система Хаара не является безусловным базисом в пространстве $\Lambda(\varphi_\alpha)$ в силу [2, 2.c.6] или [9, 2.9.6].

Лемма 5. *Пусть a_k — монотонно убывающая последовательность, стремящаяся к нулю ($a_k \downarrow 0$), и $\alpha > 0$. Следующие условия эквивалентны:*

1) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n}\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k < \infty$;

2) $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{a_n^\alpha}\sum\limits_{k=n}^{\infty} a_k^\alpha < \infty$;

3) *существуют такие $m\in\mathbb{N}$ и $c\in(0,1)$, что* $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \frac{a_{k+m}}{a_k} \le c$.

Эквивалентность условий 1 и 3 хорошо известна [11, с. 22]. Отсюда вытекает эквивалентность условий 2 и 3.

Лемма 6. *Пусть $\alpha > 0$. Существует такая константа $C(\alpha) > 0$, что для любой монотонно возрастающей последовательности $n_i \in \mathbb{N}$ и любого $j \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$\sum_{i=1}^{j} 2^{n_i} n_i^{-\alpha} \le C(\alpha) 2^{n_j} n_j^{-\alpha}.$$

Доказательство. Утверждение очевидно для $\alpha \le 1$. В этом случае можно взять $C(\alpha) = 8$. Пусть $\alpha > 1$. Функция $f(x) = 2^x x^{-\alpha}$ убывает на $[1, \alpha/\ln 2]$ и возрастает на $[\alpha/\ln 2, \infty)$, и $\min\limits_{x\ge 1} f(x) = \left(\frac{e\ln 2}{\alpha}\right)^\alpha$.

Если $i \ge 2\alpha$, то

$$\frac{2^i i^{-\alpha}}{2^{i+1}(i+1)^{-\alpha}} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{i}\right)^\alpha \le \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2\alpha}\right)^\alpha < \frac{e^{\frac{1}{2}}}{2} < \frac{9}{10}.$$

Поэтому для $j \ge 2\alpha$ имеем

$$\sum_{2\alpha\le i\le j} 2^{n_i}\cdot n_i^{-\alpha} < 2^{n_j}\cdot n_j^{-\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{9}{10}\right)^k = 10\cdot 2^{n_j}\cdot n_j^{-\alpha}.$$

Если $i \le 2\alpha$, то

$$2^i i^{-\alpha} \le \max(2, 2^{2\alpha}(2\alpha)^{-\alpha}) = \max(2, (2/\alpha)^\alpha) = 2.$$

Отсюда для $j \le 2\alpha$ получаем

$$\sum_{i=1}^{j} 2^{n_i} n_i^{-\alpha} \le 2j \le 4\alpha \le 4\alpha\left(\frac{\alpha}{e\ln 2}\right)^\alpha 2^{n_j} n_j^{-\alpha}.$$

Если $j > 2\alpha$, то

$$\sum_{i=1}^{j} 2^{n_i} n_i^{-\alpha} = \sum_{i=1}^{[2\alpha]} 2^{n_i} n_i^{-\alpha} + \sum_{i=[2\alpha]+1}^{j} 2^{n_i} n_i^{-\alpha}$$

$$\leq 4\alpha \left(\frac{\alpha}{e \ln 2}\right)^{\alpha} 2^{[2\alpha]} [2\alpha]^{-\alpha} + 10 \cdot 2^{n_j} \cdot n_j^{-\alpha}$$

$$\leq 8\alpha \left(\frac{\alpha}{e \ln 2}\right)^{2\alpha} 2^{n_j} n_j^{-\alpha} + 10 \cdot 2^{n_j} n_j^{-\alpha} = \left(8\alpha \left(\frac{\alpha}{e \ln 2}\right)^{2\alpha} + 10\right) 2^{n_j} n_j^{-\alpha}.$$

Таким образом, утверждение доказано с константой

$$C(\alpha) = 8\alpha \left(\frac{\alpha}{e \ln 2}\right)^{2\alpha} + 10. \quad \square$$

Теорема 7. *Пусть возрастающая последовательность натуральных чисел n_k удовлетворяет условию*

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{\ln n_{k+1}}{\ln n_k} < \infty, \tag{2}$$

P — ортогональный проектор на подсистему $\chi^1_{n_k}$ и $\alpha > 0$. Для того чтобы P был ограничен в пространстве Лоренца $\Lambda(\varphi_\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} n_k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{n_j} < \infty.$$

Доказательство. Необходимость. Для любого $e \subset [0,1]$ имеем

$$P\varkappa_e(t) = \sum_{i=1}^{\infty} 2^{n_i} \int_e \chi^1_{n_i}(s)\, ds \cdot \chi^1_{n_i}(t).$$

В частности, если $e = (0, 2^{-n_j})$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$, то

$$P\varkappa_e(t) = \sum_{i=1}^{j-1} 2^{n_i - n_j} \chi^1_{n_i}(t).$$

Так как

$$\|P\varkappa_e\|_{\Lambda(\varphi)} \geq \frac{1}{2} \left\| \sum_{i=j+1}^{\infty} \chi^1_{n_i} \right\|_{\Lambda(\varphi)} = \frac{1}{2} \left(\varphi_\alpha(2^{-n_{j+1}}) + \sum_{i=j+3}^{\infty} \varphi_\alpha(2^{-n_i}) \right)$$

$$\geq \frac{1}{4} \sum_{i=j+1}^{\infty} \varphi_\alpha(2^{-n_i}),$$

то

$$\sum_{i=j}^{\infty} \varphi_\alpha(2^{-n_i}) \leq C \varphi_\alpha(2^{-n_j})$$

для некоторого $C > 0$ и всех $j = 1, 2, \ldots$. Отсюда

$$\sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{n_i^\alpha} \leq \frac{C}{n_j^\alpha}.$$

В силу леммы 5 из этого условия следует, что

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} n_k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{n_j} < \infty.$$

Достаточность. Предположим теперь, что выполнено неравенство

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} n_k \sum_{j=k}^{\infty} \frac{1}{n_j} < \infty.$$

Тогда снова ввиду леммы 5 справедливо неравенство

$$\sum_{i=j}^{\infty} \frac{1}{n_i^{\alpha}} \leq \frac{C}{n_j^{\alpha}}.$$

Пусть теперь e — произвольное подмножество из $[0,1]$ и $\operatorname{mes} e = 2^{-n_j}$ для некоторого $j \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|P\varkappa_e\|_{\Lambda(\varphi_\alpha)} \leq \left(\sum_{i=1}^{j} 2^{n_i} n_i^{-\alpha}\right) \operatorname{mes} e + \sum_{i=j+1}^{\infty} n_i^{-\alpha}$$

и

$$\|P\varkappa_e\|_{\Lambda(\phi)} \leq C(\alpha) 2^{n_j} n_j^{-\alpha} 2^{-n_j} + C n_j^{-\alpha} = C_1 \varphi_\alpha(\operatorname{mes} e).$$

Предположение (2) позволяет полученную оценку распространить на любое подмножество $e \subset [0,1]$, т. е.

$$\|P\varkappa_e\|_{\Lambda(\phi_\alpha)} \leq C_2 \varphi_\alpha(\operatorname{mes} e).$$

В силу леммы 2.5.2 из [9]

$$\|Px\|_{\Lambda(\varphi_\alpha)} \leq 2C_2 \|x\|_{\Lambda(\varphi_\alpha)}$$

для любой ступенчатой функции $x(t)$. Отсюда и из ограниченности P в L_2 вытекает ограниченность P в $\Lambda(\varphi_\alpha)$. $\square$

Критерий ограниченности проектора P в пространстве $\Lambda(\varphi_\alpha)$ не зависит от $\alpha > 0$. Отсюда получаем

Следствие 8. *Если выполнено* (2) *и проектор P ограничен в $\Lambda(\varphi_\alpha)$ для некоторого $\alpha > 0$, то P ограничен в $\Lambda(\varphi_\alpha)$ для всех $\alpha > 0$.*

Теорема 7 описывает модельный случай. Пусть теперь $\{n_k\}$ — монотонно возрастающая последовательность натуральных чисел, $1 \leq m_k \leq 2^{n_k}$ и P — ортогональный проектор на подсистему $\chi_{n_k}^{m_k}$. Сразу отметим, что не существует никаких необходимых условий на последовательность (n_k, m_k) для ограниченности P в $\Lambda(\varphi_\alpha)$. Действительно, ортогональный проектор на подсистему χ_n^2 ограничен в любом r.i.-пространстве, поскольку носители функций $\{\chi_n^2\}$ попарно дизъюнктны при различных $n \in \mathbb{N}$. Достаточность теоремы 7 переносится на этот случай без изменений. Тем самым если выполнены условия теоремы 7, то ортогональный проектор P ограничен в пространстве Лоренца $\Lambda(\varphi_\alpha)$, $\alpha > 0$.

Авторы благодарят рецензента за ценные замечания.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кашин Б. С., Саакян А. Л.* Ортогональные ряды. М.: Наука, 1984.
2. *Lindenstrauss J., Tzafriri L.* Classical Banach spaces II. Function spaces. Berlin: Springer-Verl., 1979.
3. *Лелонд О. В., Семенов Е. М., Уксусов С. Н.* Пространство мультипликаторов Фурье — Хаара // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 1. С. 130–138.
4. *Семенов Е. М., Уксусов С. Н.* Мультипликаторы Фурье — Хаара // Ряды Фурье и их приложения: сб. тез. III междунар. симп. Ростов-на-Дону, 2005. С. 32–33.
5. *Yano S.* On a lemma of Marcinkiewicz and its applications to Fourier series // Tohoku Math. J. 1959. N 11. P. 191–215.
6. *Кротов В. Г.* О безусловной сходимости рядов Хаара в Λ^p_ω // Мат. заметки. 1978. Т. 5, № 23. С. 685–695.
7. *Novikov I., Semenov E.* Haar series and linear operators. Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
8. *Голубов Б. И.* Ряды Фурье по системе Хаара // Математический анализ. М.: ВИНИТИ, 1971. С. 109–146. (Итоги науки и техники).
9. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. М.: Наука, 1978.
10. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. М.: Мир, 1965. Т. 2.
11. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. М.: Физматлит, 1961.

Статья поступила 30 мая 2011 г.

Семенов Евгений Михайлович, Уксусов Сергей Николаевич
Воронежский гос. университет, кафедра теории функций и геометрии,
Университетская пл., 1, Воронеж 394006
semenov@math.vsu.ru, uksusov.s@mail.ru