Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2012. Том 53, № 2

УДК 517.9

НЕОДНОРОДНЫЕ ЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ СОБОЛЕВСКОГО ТИПА С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В. Е. Федоров, Е. А. Омельченко

Аннотация. Для линейного неоднородного дифференциального уравнения первого порядка в абстрактном банаховом пространстве с вырожденным оператором при производной, относительно p-радиальным оператором при искомой функции и непрерывным оператором запаздывания получены условия однозначной разрешимости начальных задач Коши и Шоуолтера методами теории вырожденных полугрупп операторов.

Полученные общие результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для систем интегродифференциальных уравнений типа уравнений фазового поля.

Ключевые слова: уравнение соболевского типа, уравнение с запаздыванием, полугруппа операторов.

§ 1. Введение

Среди неклассических уравнений математической физики часто встречаются уравнения и системы уравнений, не разрешенные относительно старшей производной по времени, так называемые уравнения соболевского типа [1–4]. При моделировании процессов нередко наблюдается эффект последействия [5–7]. В этом случае возникает проблема исследования начально-краевой задачи для уравнения или системы уравнений соболевского типа с запаздыванием. Такие исследования удобно проводить в рамках задачи

$$u(t) = h(t), \quad t \in [-r, 0], \ h \in C([-r, 0]; \mathfrak{U}), \tag{1.1}$$

для операторно-дифференциального уравнения соболевского типа с запаздыванием:

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \Phi u_t + f(t), \quad t \in [0, \infty). \tag{1.2}$$

Здесь $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ — банаховы пространства, операторы $L : \mathfrak{U} \to \mathfrak{F}$, $\Phi : C([-r, 0]; \mathfrak{U}) \to \mathfrak{F}$ линейны и непрерывны, $\ker L \neq \{0\}$, оператор $M : \operatorname{dom} M \to \mathfrak{F}$ линеен, замкнут и плотно определен в $\mathfrak{U}$, $u_t \in C([-r, 0]; \mathfrak{U})$, $u_t(s) = u(t + s)$ для $s \in [-r, 0]$, $f : [0, +\infty) \to \mathfrak{F}$. Несмотря на интенсивное развитие теории функционально-дифференциальных уравнений (см., например, [7–9]), частным случаем которых являются уравнения с запаздыванием, в настоящее время задача (1.1), (1.2) является малоизученной и поэтому представляет интерес для исследования.

В данной работе при изучении задачи (1.1), (1.2) использованы развитые для уравнений соболевского типа методы теории вырожденных полугрупп операторов [3, 4, 10–12] и полугрупповой подход к рассмотрению уравнений с запаздыванием (см., например, [13]).

Полученные абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для неразрешимых относительно старшей производной по времени уравнений и систем уравнений в частных производных с запаздыванием.

§ 2. Неоднородное уравнение с запаздыванием, разрешенное относительно производной

Для банаховых пространств $\mathfrak{U}$, $\mathfrak{F}$ через $\mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$ будем обозначать банахово пространство линейных непрерывных операторов, действующих из $\mathfrak{U}$ в $\mathfrak{F}$. Множество линейных замкнутых операторов, действующих в $\mathfrak{F}$, с областями определения, плотными в $\mathfrak{U}$, обозначим через $\mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Если $\mathfrak{F}=\mathfrak{U}$, то соответствующие обозначения будут иметь вид $\mathscr{L}(\mathfrak{U})$ и $\mathscr{C}l(\mathfrak{U})$ соответственно.

Пусть $\mathfrak{Y}$ — банахово пространство, $\mathfrak{Y}_r=C([-r,0];\mathfrak{Y})$, оператор $A\in\mathscr{C}l(\mathfrak{Y})$ порождает C_0-непрерывную полугруппу операторов, $\Phi\in\mathscr{L}(\mathfrak{Y}_r;\mathfrak{Y})$ — оператор запаздывания. Рассмотрим задачу

$$y(t)=h(t),\quad t\in[-r,0],\ h\in\mathfrak{Y}_r, \tag{2.1}$$

для уравнения

$$\dot y(t)=Ay(t)+\Phi y_t,\quad t\in[0,+\infty), \tag{2.2}$$

где функция $y_t\in\mathfrak{Y}_r$ строится по функции $y\in C([-r,+\infty);\mathfrak{Y})$ согласно правилу

$$y_t(s)=y(t+s),\quad s\in[-r,0],\ t\in[0,+\infty). \tag{2.3}$$

Решением задачи (2.1), (2.2) называется функция $y\in C([-r,+\infty);\mathfrak{Y})\cap C^1([0,+\infty);\mathfrak{Y})$, удовлетворяющая условию (2.1) и уравнению (2.2).

Построим по уравнению (2.2) оператор $B\in\mathscr{C}l(\mathfrak{Y}_r)$ следующим образом:

$$\operatorname{dom}B=\{z\in C^1([-r,0];\mathfrak{Y}):z(0)\in\operatorname{dom}A,\ z'(0)=Az(0)+\Phi z\},\quad Bz=z'.$$

Теорема 2.1 [13]. *Пусть A — генератор C_0-непрерывной полугруппы операторов. Тогда оператор B порождает C_0-непрерывную полугруппу операторов $\{Z(t)\in\mathscr{L}(\mathfrak{Y}_r):t\in[0,+\infty)\}$. При этом для любого $h\in\operatorname{dom}B$ существует единственное решение задачи* (2.1), (2.2), *которое имеет вид $y(t)=[Z(t)h](0)$ при $t>0$.*

Используя теорему 2.1, исследуем задачу (2.1) для неоднородного уравнения

$$\dot y(t)=Ay(t)+\Phi y_t+g(t),\quad t\in[0,+\infty). \tag{2.4}$$

Построим по функции $g:[-r,+\infty)\to\mathfrak{Y}$ функцию $g_t:[0,+\infty)\to\mathfrak{Y}_r$ согласно правилу (2.3). Полученное отображение $t\to g_t$ во избежание путаницы обозначим через $\tilde g$. При $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ через $\tilde g_t^{(k)}$ обозначим его k-ю производную в точке t, а через $g_t^{(k)}$ — функцию из $\mathfrak{Y}_r$, построенную согласно правилу (2.3) при заданном t по k-й производной $g^{(k)}$ от функции $g\in C^k([-r,+\infty);\mathfrak{Y})$.

Лемма 2.1. *Пусть функции $\tilde g:[0,+\infty)\to\mathfrak{Y}_r$ и $g:[-r,+\infty)\to\mathfrak{Y}$ таковы, что $\tilde g_t(s)=g(t+s)$ для всех $t\ge 0$, $s\in[-r,0]$. Тогда при $k\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ функция g принадлежит $C^k([-r,+\infty);\mathfrak{Y})$ в том и только в том случае, когда $\tilde g\in C^k([0,+\infty);\mathfrak{Y}_r)$. При этом для всех $t\ge 0$*

$$\tilde g_t^{(k)}=g_t^{(k)}. \tag{2.5}$$

Доказательство. Пусть $g \in C([-r,+\infty);\mathfrak{Y})$. Согласно правилу (2.3) $g_t(s) = g(t+s)$ при $s \in [-r,0]$, $t \in [0,+\infty)$. Для $t_0 \geq 0$ возьмем отрезок $I = [t_0 - r - 1, t_0 + 1] \cap [-r,+\infty)$, на который попадают все значения $t_0 + s$ и $t + s$ при t, достаточно близких к t_0. Тогда

$$\lim_{t\to t_0} \|g_t - g_{t_0}\|_{\mathfrak{Y}_r} = \lim_{t\to t_0} \max_{s\in[-r,0]} \|g(t+s) - g(t_0+s)\|_{\mathfrak{Y}} = 0$$

в силу равномерной непрерывности функции g на отрезке I по теореме Кантора. Таким образом, $\tilde{g} \in C([0,+\infty);\mathfrak{Y}_r)$.

Пусть $g \in C^1([-r,+\infty);\mathfrak{Y})$. Покажем, что $\tilde{g} \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{Y}_r)$, $\tilde{g}'_{t_0} = g'_{t_0}$ для всех $t_0 \geq 0$. По теореме Лагранжа имеем

$$\lim_{\Delta\to 0} \left\| g'_{t_0} - \frac{g_{t_0+\Delta} - g_{t_0}}{\Delta} \right\|_{\mathfrak{Y}_r} = \lim_{\Delta\to 0} \max_{s\in[-r,0]} \|g'(t_0+s) - g'(t_0+\theta+s)\|_{\mathfrak{Y}} = 0,$$

поскольку $|\theta| \leq |\Delta|$, а g' равномерно непрерывна на отрезке I. Для $t_0 = 0$ надо рассматривать предел при $\Delta \to 0+$.

Докажем обратное утверждение. Пусть $\tilde{g} \in C([0,+\infty);\mathfrak{Y}_r)$, $t_0 \in [-r,+\infty)$. Рассмотрим отдельно пределы при $t \to t_0+$ и $t \to t_0-$ (для $t_0 = -r$ — только первый из них). Тогда, например, во втором случае

$$\lim_{t\to t_0-} \|g(t) - g(t_0)\|_{\mathfrak{Y}} = \lim_{t\to t_0-} \|g_0(t) - g_{t_0-t}(t)\|_{\mathfrak{Y}} \leq \lim_{t\to t_0-} \|g_0 - g_{t_0-t}\|_{\mathfrak{Y}_r} = 0,$$

что означает непрерывность g в точке t_0 слева.

Для $\tilde{g} \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{Y}_r)$, $t_0 \geq 0$, $s \in [-r,0]$ имеем

$$\lim_{\Delta\to 0} \left\| \tilde{g}'_{t_0}(s) - \frac{g(t_0+s+\Delta) - g(t_0+s)}{\Delta} \right\|_{\mathfrak{Y}} \leq \lim_{\Delta\to 0} \left\| \tilde{g}'_{t_0} - \frac{g_{t_0+\Delta} - g_{t_0}}{\Delta} \right\|_{\mathfrak{Y}_r} = 0.$$

При $t_0 = 0$, $s = -r$ надо рассматривать предел при $\Delta \to 0+$. Таким образом, $g'_{t_0}(s) \equiv g'(t_0+s) = \tilde{g}'_{t_0}(s)$. Поскольку для любого $t \geq -r$ можно найти $t_0 \geq 0$, $s \in [-r,0]$, при которых $t = t_0 + s$, то $g \in C^1([-r,+\infty);\mathfrak{Y})$.

Для произвольных $k \in \mathbb{N}$ утверждение леммы доказывается по индукции аналогичным образом. $\square$

Теорема 2.2. *Пусть A — генератор C_0-непрерывной полугруппы операторов, $g \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{Y})$. Тогда для любого $h \in \operatorname{dom} B$ существует единственное решение задачи* (2.1), (2.4), *которое при $t > 0$ имеет вид*

$$y(t) = [Z(t)h](0) + \left[\int_0^t Z(t-s) g_s \, ds \right](0),$$

где $g_s(\tau) = g(s+\tau)$ при $s + \tau \geq 0$.

Доказательство. Доопределим непрерывно дифференцируемым образом функцию g на промежутке $[-r,0)$, например, $g(t) = g(0) + g'(0+)t$, $t \in [-r,0)$. Тогда в силу леммы 2.1 $g_t \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{Y}_r)$. Перепишем уравнение (2.4) как уравнение в пространстве $\mathfrak{Y}_r$:

$$\dot{y}_t = By_t + g_t, \quad t \in [0,+\infty). \tag{2.6}$$

Поскольку $g_t \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{Y}_r)$, решением задачи Коши

$$y_0 = h \in \operatorname{dom} B \tag{2.7}$$

для этого уравнения является функция

$$y_t = Z(t)h + \int\limits_0^t Z(t-s)g_s\,ds \tag{2.8}$$

со значениями в $\mathfrak{Y}_r$. При этом $y(t) = y_t(0)$ для $t \geq 0$. Поскольку сходимость интеграла в (2.8) понимается в смысле пространства $\mathfrak{Y}_r$, то

$$\left[\int\limits_0^t Z(t-s)g_s\,ds\right](0) = \int\limits_0^t \left[Z(t-s)g_s\right](0)\,ds.$$

Из доказательств теорем VI.6.1 и III.3.1 в [13] видно, что интегрируемая функция в последнем выражении зависит только от значений $g_s(0) = g(s)$, $s \geq 0$. Поэтому на решение задачи доопределенные значения функции g не влияют. $\square$

Замечание 2.1. Требование принадлежности g классу $C^1([0,+\infty);\mathfrak{Y})$ в теореме 2.2 можно заменить условием $g \in C([0,+\infty);\operatorname{dom} B)$, где $\operatorname{dom} B$ — банахово пространство с нормой графика оператора B.

Теорема 2.3. *Пусть A — генератор C_0-непрерывной полугруппы операторов, $g \in C^k([0,+\infty);\mathfrak{Y})$, $k \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $g^{(m)}(0) \in \operatorname{dom} A$, $m = \overline{0,k-2}$, и существует такое $q \in C^k([-r,0];\mathfrak{Y})$, что $q^{(m)}(0) = g^{(m)}(0)$, $m = \overline{0,k}$,*

$$g^{(m+1)}(0) - Ag^{(m)}(0) = \Phi q^{(m)}, \quad m = \overline{0,k-2}. \tag{2.9}$$

Тогда для любого $h \in \operatorname{dom} B^k$ существует единственное решение задачи (2.1), (2.4) класса $C([-r,+\infty);\mathfrak{Y}) \cap C^k([0,+\infty);\mathfrak{Y})$.

Доказательство. Доопределим функцию g следующим образом: $g(t) = q(t)$ при $t \in [-r,0)$. В силу условий теоремы на q получим функцию $g \in C^k([-r,+\infty);\mathfrak{Y})$. По лемме 2.1 ей соответствует $g_t \in C^k([0,+\infty);\mathfrak{Y}_r)$, причем $g_0 = q$.

Рассмотрим решение (2.8) задачи (2.6), (2.7). Последовательно его дифференцируя и используя тождество (2.5), получим равенства

$$\frac{d}{dt}y_t = \frac{d}{dt}Z(t)h + g_t + \int\limits_0^t \frac{d}{dt}Z(t-s)g_s\,ds = BZ(t)h + g_t - \int\limits_0^t \frac{d}{ds}\left(Z(t-s)\right)g_s\,ds$$

$$= Z(t)Bh + Z(t)g_0 + \int\limits_0^t Z(t-s)g_s'\,ds = Z(t)h' + Z(t)q + \int\limits_0^t Z(t-s)g_s'\,ds,$$

$$\frac{d^2}{dt^2}y_t = Z(t)B^2h + Z(t)Bq + Z(t)q' + \int\limits_0^t Z(t-s)g_s''\,ds$$

$$= Z(t)h'' + 2Z(t)q' + \int\limits_0^t Z(t-s)g_s''\,ds,$$

$$\ldots,\ \frac{d^k}{dt^k}y_t = Z(t)h^{(k)} + kZ(t)q^{(k-1)} + \int\limits_0^t Z(t-s)g_s^{(k)}\,ds. \tag{2.10}$$

Все равенства справедливы в силу условий на h, g и q. В частности, условия (2.9) означают, что $g_0 = q \in \operatorname{dom} B^{k-1}$, $q' = Bq \in \operatorname{dom} B^{k-2}$, $\dots$, $q^{(k-2)} = B^{k-2}q \in \operatorname{dom} B$.

Таким образом, получено решение $y_t \in C^k([0,+\infty);\mathfrak{Y}_r)$ задачи (2.6), (2.7). По лемме 2.1 ему соответствует функция $y \in C^k([-r,+\infty);\mathfrak{Y})$, которая задает решение задачи (2.1), (2.4). □

§ 3. Условия существования вырожденных полугрупп

Всюду в дальнейшем предполагаем, что $L \in \mathscr{L}(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$, $M \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U};\mathfrak{F})$. Обозначим $\rho^L(M) = \{\mu \in \mathbb{C} : (\mu L - M)^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})\}$, $R^L_\mu(M) = (\mu L - M)^{-1}L$, $L^L_\mu(M) = L(\mu L - M)^{-1}$, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Определение 3.1. Пусть $p \in \mathbb{N}_0$. Оператор M называется (L,p)-*радиальным*, если

(i) $\exists a \in \mathbb{R}\ (a,+\infty) \subset \rho^L(M)$;

(ii) $\exists K > 0\ \forall \mu \in (a,+\infty)\ \forall n \in \mathbb{N}$

$$\max\big\{\big\|\big(R^L_\mu(M)\big)^{n(p+1)}\big\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{U})}, \big\|\big(L^L_\mu(M)\big)^{n(p+1)}\big\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{F})}\big\} \le \frac{K}{(\mu-a)^{n(p+1)}};$$

(iii) существует плотный в $\mathfrak{F}$ линеал $\overset{\circ}{\mathfrak{F}}$ такой, что

$$\big\|M(\mu L - M)^{-1}\big(L^L_\mu(M)\big)^{p+1} f\big\|_{\mathfrak{F}} \le \frac{\mathrm{const}(f)}{(\mu-a)^{p+2}} \quad \forall f \in \overset{\circ}{\mathfrak{F}}$$

при любых $\mu \in (a,+\infty)$;

(iv) для всех $\mu \in (a,+\infty)$

$$\big\|\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}(\mu L - M)^{-1}\big\|_{\mathscr{L}(\mathfrak{F};\mathfrak{U})} \le \frac{K}{(\mu-a)^{p+2}}.$$

Замечание 3.1. Здесь используется более простое определение сильной (L,p)-радиальности, эквивалентное используемому в [4, 10, 11], как это показано в [14].

Пусть $\mathfrak{U}^0$ ($\mathfrak{F}^0$) — ядро $\ker\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}$ ($\ker\big(L^L_\mu(M)\big)^{p+1}$), $\mathfrak{U}^1$ ($\mathfrak{F}^1$) — замыкание линеала $\operatorname{im}\big(R^L_\mu(M)\big)^{p+1}$ ($\operatorname{im}\big(L^L_\mu(M)\big)^{p+1}$) в норме пространства $\mathfrak{U}$ ($\mathfrak{F}$), а M_k (L_k) — сужение оператора M (L) на $\operatorname{dom} M_k = \mathfrak{U}^k \cap \operatorname{dom} M$ ($\mathfrak{U}^k$), $k = 0,1$.

Теорема 3.1 [4, 10, 11]. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален. Тогда*

(i) $\mathfrak{U} = \mathfrak{U}^0 \oplus \mathfrak{U}^1$, $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^0 \oplus \mathfrak{F}^1$;

(ii) $L_k \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $M_k \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}^k;\mathfrak{F}^k)$, $k = 0,1$;

(iii) *существуют операторы* $M_0^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}^0;\mathfrak{U}^0)$ *и* $L_1^{-1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{F}^1;\mathfrak{U}^1)$;

(iv) *оператор* $H = M_0^{-1}L_0 \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^0)$ *нильпотентен степени не больше* p;

(v) *существует сильно непрерывная полугруппа* $\{U(t) \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}) : t \ge 0\}$ *уравнения*

$$L\dot{u}(t) = Mu(t); \tag{3.1}$$

(vi) *инфинитезимальным генератором* C_0*-непрерывной полугруппы операторов* $\{U_1(t) = U(t)|_{\mathfrak{U}^1} \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}^1) : t \in [0,+\infty)\}$ *является оператор* $L_1^{-1}M_1 \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}^1)$.

В работах [4, 11] также показано, что проектор вдоль $\mathfrak{U}^0$ на $\mathfrak{U}^1$ (вдоль $\mathfrak{F}^0$ на $\mathfrak{F}^1$) имеет вид

$$P = \operatorname*{s-lim}_{\mu\to+\infty}\big(\mu R^L_\mu(M)\big)^{p+1} \quad \Big(Q = \operatorname*{s-lim}_{\mu\to+\infty}\big(\mu L^L_\mu(M)\big)^{p+1}\Big).$$

Обозначим также $I - Q = Q_0$, $I - P = P_0$. При доказательстве утверждения (ii) используется тот факт, что в условиях теоремы 3.1 выполняются равенства

$$QL = LP, \quad QMu = MPu \quad \forall u \in \operatorname{dom} M. \tag{3.2}$$

Замечание 3.2. Из теоремы 3.1 следует, что понятие сильно (L, p)-радиального оператора является обобщением понятия генератора (C_0)-непрерывной полугруппы на случай уравнения соболевского типа (3.1) с вырожденным оператором L при производной ($\ker L \neq \{0\}$). При этом параметр $p \in \mathbb{N}_0$ является характеристикой вырожденности этого уравнения, поскольку показывает максимальную длину цепочки относительно присоединенных векторов, лежащих в ядре разрешающей полугруппы уравнения [4, 10, 11].

Лемма 3.1. *Пусть $g \in C^{p+1}([0, +\infty); \mathfrak{U}^0)$ и оператор M сильно (L, p)-радиален. Тогда существует единственное решение*

$$w \in C^1([0, +\infty); \mathfrak{U}^0) \cap C([0, +\infty); \operatorname{dom} M_0)$$

уравнения

$$H\dot{w}(t) = w(t) + g(t). \tag{3.3}$$

При этом

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k g^{(k)}(t), \quad t \geq 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. Тот факт, что функция (3.4) является решением уравнения (3.3), проверяется непосредственно с использованием нильпотентности оператора H, следующей из теоремы 3.1(iv).

Если существуют два решения уравнения (3.3), то их разность является решением уравнения $H\dot{w}(t) = w(t)$. Продифференцировав обе части этого уравнения и подействовав на них оператором H, получим в силу непрерывности этого оператора равенства

$$H\frac{d}{dt}H\dot{w}(t) = \frac{d}{dt}H^2\dot{w}(t) = H\dot{w}(t) = w(t).$$

Правая часть равенства дифференцируема, поэтому можно повторить процедуру и получить равенство $\frac{d^2}{dt^2}H^3\dot{w}(t) = w(t)$. На p-м шаге получим равенство $w(t) = \frac{d^p}{dt^p}H^{p+1}\dot{w}(t) \equiv 0$ в силу теоремы 3.1(iv). $\square$

Замечание 3.3. В лемме 3.1 помимо требования на функцию g достаточно потребовать лишь нильпотентность оператора H.

§ 4. Неоднородное вырожденное уравнение с запаздыванием

Рассмотрим задачу

$$u(t) = h(t), \quad t \in [-r, 0], \ h \in C([-r, 0]; \mathfrak{U}), \tag{4.1}$$

$$L\dot{u}(t) = Mu(t) + \Phi u_t + f(t), \quad t \in [0, \infty). \tag{4.2}$$

При ее исследовании используем некоторые идеи, предложенные в работе [15] для изучения линейного возмущенного уравнения соболевского типа.

Как в § 2, по оператору $L_1^{-1}M_1$ построим оператор $T \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}_r^1)$, $\operatorname{dom} T = \{v \in C^1([-r, 0]; \mathfrak{U}_r^1) : v(0) \in \operatorname{dom} M, \ v'(0) = L_1^{-1}M_1 v(0) + L_1^{-1}Q\Phi v\}$, $Tv = v'$.

Теорема 4.1. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}_r;\mathfrak{F})$, $\operatorname{im}\Phi \subset \mathfrak{F}^1$, $Qf \in C^1([0,+\infty);\mathfrak{F})$, $Q_0 f \in C^{p+1}([0,+\infty);\mathfrak{F})$, $Ph \in \operatorname{dom} T$, $P_0 h \in C^1([-r,0];\mathfrak{U})$,*

$$P_0 h(0) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(Q_0 f)^{(k)}(0), \tag{4.3}$$

$(P_0 h)'(0-) = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(Q_0 f)^{(k+1)}(0+)$. *Тогда существует единственное решение $u \in C([-r,+\infty);\mathfrak{U}) \cap C^1([0,+\infty);\mathfrak{U})$ задачи (4.1), (4.2).*

Доказательство. Подействуем на обе части уравнения (4.2) оператором $L_1^{-1}Q$ и, используя равенства (3.2), получим уравнение

$$\dot v(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}Q\Phi(v_t + w_t) + L_1^{-1}Qf(t), \tag{4.4}$$

где $Pu(t) = v(t)$, $P_0 u(t) = w(t)$, функции $v_t \in C([-r,0];\mathfrak{U}^1)$, $w_t \in C([-r,0];\mathfrak{U}^0)$ соответствуют $v \in C([-r,+\infty);\mathfrak{U}^1)$, $w \in C([-r,+\infty);\mathfrak{U}^0)$ по правилу (2.3). Если же на уравнение (4.2) подействовать оператором $M_0^{-1}Q_0$, то получим равенство

$$H\dot w(t) = w(t) + M_0^{-1}Q_0\Phi(v_t + w_t) + M_0^{-1}Q_0 f(t). \tag{4.5}$$

Таким образом, задача (4.1), (4.2) эквивалентна задаче

$$v(t) = Ph(t), \quad t \in [-r,0], \tag{4.6}$$

$$w(t) = P_0 h(t), \quad t \in [-r,0], \tag{4.7}$$

для системы уравнений (4.4) и (4.5).

Если $\operatorname{im}\Phi \subset \mathfrak{F}^1$, то $Q_0\Phi = 0$. В этом случае уравнение (4.5) в силу леммы 3.1 имеет единственное решение $w(t) = -\sum\limits_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(Q_0 f)^{(k)}(t)$ при $t \in [0,+\infty)$. При этом задача (4.7) для него разрешима только в случае выполнения условия согласования (4.3). В силу условий теоремы на $Q_0 f$ и $P_0 h$ получена функция $w \in C^1([-r,+\infty];\mathfrak{U}^0)$, поэтому по лемме 2.1 ей соответствует $w_t \in C^1\big([0,+\infty];\mathfrak{U}_r^0\big)$.

Таким образом, система (4.4)–(4.7) редуцирована к задаче (4.6) для уравнения

$$\dot v(t) = L_1^{-1}M_1 v(t) + L_1^{-1}Q\Phi v_t + g(t), \tag{4.8}$$

где $g(t) = L_1^{-1}Q\Phi w_t + L_1^{-1}Qf(t)$, а оператор $L_1^{-1}M_1$ порождает (C_0)-непрерывную полугруппу по теореме 3.1(vi). Из непрерывности оператора $L_1^{-1}Q\Phi$ и непрерывной дифференцируемости w_t, Qf следует, что $g \in C^1\big([0,+\infty];\mathfrak{U}_r^1\big)$. В силу теоремы 2.2 задача (4.6), (4.8), а также задача (4.1), (4.2) имеют единственное решение. $\square$

Ключевым при получении этого результата было предположение о том, что $\operatorname{im}\Phi \subset \mathfrak{F}^1$. Теперь рассмотрим случай, когда $\mathfrak{U}_r^0 \subset \ker\Phi$.

Теорема 4.2. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}_r;\mathfrak{F})$, $\mathfrak{U}_r^0 \subset \ker\Phi$, $f \in C^{p+1}([0,+\infty);\mathfrak{F})$, $P_0 h \in \mathfrak{U}_r^0$,*

$$\begin{gathered} Ph \in C^{p+1}([-r,0];\mathfrak{U}), \quad (Ph)^{(k)}(0) \in \operatorname{dom} M, \\ (Ph)^{(k+1)}(0) = L_1^{-1}M_1(Ph)^{(k)}(0) + L_1^{-1}Q\Phi(Ph)^{(k)}, \quad k = \overline{0,p}. \end{gathered} \tag{4.9}$$

Кроме того, в случае $p > 0$ пусть $L_1^{-1}(Qf)^{(m)}(0) \in \operatorname{dom} M$, $m = \overline{0,p-1}$, и существует такая функция $q \in C^{p+1}([-r,0];\mathfrak{U}^1)$, что $q^{(m)}(0) = L_1^{-1}(Qf)^{(m)}(0)$,

$m = \overline{0, p+1}$, $(Qf)^{(m+1)}(0) - M_1 L_1^{-1}(Qf)^{(m)}(0) = Q\Phi q^{(m)}$, $m = \overline{0, p-1}$. *Тогда если*

$$P_0 h(0) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(Q_0 f)^{(k)}(0) - \sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} Q_0 \Phi (Ph)^{(k)}(0)$$

$$- \sum_{k=0}^{p} k H^k M_0^{-1} Q_0 \Phi q^{(k-1)}(0), \quad (4.10)$$

то существует единственное решение $u \in C([-r, +\infty); \mathfrak{U}) \cap C^1([0, +\infty); \mathfrak{U})$ *задачи* (4.1), (4.2).

Замечание 4.1. Условие (4.10) при $p = 0$ не содержит последней суммы и соответственно функции q.

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей теоремы, вместо задачи (4.1), (4.2) рассмотрим эквивалентную ей задачу (4.4)–(4.7). В случае, когда $\mathfrak{U}_r^0 \subset \ker \Phi$, выполняется $\Phi w_t \equiv 0$. Поэтому уравнение (4.4) имеет вид

$$\dot{v}(t) = L_1^{-1} M_1 v(t) + L_1^{-1} Q \Phi v_t + L_1^{-1} Q f(t). \quad (4.11)$$

Условие (4.9) означает принадлежность функции Ph области определения оператора T^{p+1}. По теореме 2.3 отсюда следует, что существует единственное решение $v \in C([-r, +\infty); \mathfrak{U}^1) \cap C^{p+1}([0, +\infty); \mathfrak{U}^1)$ задачи (4.6), (4.11).

Подставив это решение в (4.5), получим уравнение

$$H \dot{w}(t) = w(t) + g(t), \quad (4.12)$$

где $g(t) = M_0^{-1} Q_0 \Phi v_t + M_0^{-1} Q_0 f(t)$. Согласно лемме 3.1 существует единственное решение такого уравнения, которое имеет вид

$$w(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k g^{(k)}(t) = -\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1}(Q_0 f)^{(k)}(t)$$

$$-\sum_{k=0}^{p} H^k M_0^{-1} Q_0 \Phi \left[Z(t)(Ph)^{(k)} + k Z(t) q^{(k-1)} + \int_0^t Z(t-s) L_1^{-1} (Qf)_s^{(k)}\, ds \right](0)$$

в силу формулы (2.10) для производных функции v_t. Здесь $Z(t)$ — операторы полугруппы, порожденной оператором T, а $(Qf)_s^{(k)}$ — производные в пространстве $\mathfrak{U}_r^1$ функции $(Qf)_s$, соответствующей функции Qf по правилу (2.3). Для того чтобы найденное решение уравнения было решением задачи (4.7) класса $C([-r, +\infty); \mathfrak{U}) \cap C^1([0, +\infty); \mathfrak{U})$, необходимо выполнение условия согласования (4.10). □

В случае сильно (L, p)-радиального оператора M рассмотрим для уравнения соболевского типа с запаздыванием задачу

$$Pu(t) = h(t), \quad t \in [-r, 0], \quad (4.13)$$

где $h \in \mathfrak{U}_r^1$. Она является аналогом обобщенной задачи Шоуолтера [4, 15], которая для уравнений соболевского типа без запаздывания возникает естественным образом. При редукции задачи (4.2), (4.13) к задаче для системы (4.4), (4.5) получаем условие (4.6) на функцию v, при этом на функцию w никаких начальных ограничений не накладывается. В условиях теоремы 4.2 это выглядит естественным, поскольку система (4.11), (4.12) не содержит запаздывания для функции w. С учетом этого соображения получим аналогичную теорему о разрешимости задачи (4.13).

Теорема 4.3. *Пусть оператор M сильно (L,p)-радиален, $\Phi \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}_r;\mathfrak{F})$, $\mathfrak{U}_r^0 \subset \ker\Phi$, $f \in C^{p+1}([0,+\infty);\mathfrak{F})$,*

$$h \in C^{p+1}([-r,0];\mathfrak{U}), \quad h^{(k)}(0) \in \operatorname{dom} M,$$

$$h^{(k+1)}(0) = L_1^{-1}M_1h^{(k)}(0) + L_1^{-1}Q\Phi h^{(k)}, \quad k = \overline{0,p}.$$

Кроме того, пусть при $p > 0$ выполняется $L_1^{-1}(Qf)^{(m)}(0) \in \operatorname{dom} M$, $m = \overline{0,p-1}$, и существует такое $q \in C^{p+1}([-r,0];\mathfrak{U}^1)$, что $q^{(m)}(0) = L_1^{-1}(Qf)^{(m)}(0)$, $m = \overline{0,p+1}$, $(Qf)^{(m+1)}(0) - M_1L_1^{-1}(Qf)^{(m)}(0) = Q\Phi q^{(m)}$, $m = \overline{0,p-1}$. Тогда существует единственное решение $u \in C([-r,+\infty);\mathfrak{U}) \cap C^1([0,+\infty);\mathfrak{U})$ задачи (4.2), (4.13).

Доказательство. Повторяя рассуждения теоремы 4.2, придем к уравнению (4.12), которое в силу леммы 3.1 имеет единственное решение. □

Замечание 4.2. Для разрешимости обобщенной задачи Шоуолтера в отличие от задачи Коши в теореме 4.3 не нужны условия согласования вида (4.10).

Замечание 4.3. Для разрешимости задачи (4.13) важно, что Φ не зависит от w_t. Поэтому нельзя доказать теорему, аналогичную теореме 4.1. Действительно, в уравнении (4.4) оператор Φ действует на w_t, но при $t \in [-r,0)$ эта функция не задана.

§ 5. Линеаризованная система уравнений фазового поля

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей $\partial\Omega$ класса C^∞, $\lambda, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\mu_m : [-r,0] \to \mathbb{R}$ — функции ограниченной вариации,

$$\int_{-r}^{0}\int_{\Omega}\int_{\Omega} |K_m(x,y,s)|^2\,dxdyd\mu_m(s) < +\infty, \quad m = 1,2, \tag{5.1}$$

$f_0, f_1 : \Omega \times [0,+\infty) \to \mathbb{R}$. Рассмотрим задачу с начальными условиями

$$v(x,t) = h_1(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [-r,0], \tag{5.2}$$

$$w(x,t) = h_0(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [-r,0], \tag{5.3}$$

и граничными условиями

$$\lambda\frac{\partial v}{\partial n}(x,t) + (1-\lambda)v(x,t) = \lambda\frac{\partial w}{\partial n}(x,t) + (1-\lambda)w(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \partial\Omega \times [0,+\infty), \tag{5.4}$$

для системы уравнений

$$\frac{\partial v}{\partial t}(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w(x,t) + \int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_1(x,y,s)v(y,t+s)\,dyd\mu_1(s)$$

$$+ \int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_2(x,y,s)w(y,t+s)\,dyd\mu_2(s) + f_1(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty), \tag{5.5}$$

$$\Delta w(x,t) + \beta w(x,t) + \alpha v(x,t) + f_0(x,t) = 0, \quad (x,t) \in \Omega \times [0,+\infty). \tag{5.6}$$

Искомыми в задаче являются функции $v(x,t)$, $w(x,t)$.

Замечание 5.1. Система (5.5), (5.6) при $K_m \equiv 0$, $m = 1, 2$, эквивалентна линеаризованной системе уравнений фазового поля, описывающей фазовые переходы первого рода при условии нулевого времени релаксации [16, 17].

Положим $\mathfrak{U} = \mathfrak{F} = (L_2(\Omega))^2$,

$$L = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{L}(\mathfrak{U}), \quad M = \begin{pmatrix} \Delta & -\Delta \\ \alpha & \beta + \Delta \end{pmatrix} \in \mathscr{C}l(\mathfrak{U}), \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_0 \end{pmatrix},$$

$$H^2_\partial(\Omega) = \left\{ w \in H^2(\Omega) : \left(\lambda \frac{\partial}{\partial n} + 1 - \lambda \right) w(x) = 0,\ x \in \partial\Omega \right\},\ \operatorname{dom} M = \left(H^2_\partial(\Omega)\right)^2,$$

$$\Phi \begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_{-r}^{0} \int\limits_{\Omega} K_1(x,y,s) v_t(y,s)\, dy d\mu_1(s) + \int\limits_{-r}^{0} \int\limits_{\Omega} K_2(x,y,s) w_t(y,s)\, dy d\mu_2(s) \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} \|\Phi(v_t, w_t)\|^2_{\mathfrak{F}} &\le 2 \int\limits_{\Omega} \left| \int\limits_{-r}^{0} \int\limits_{\Omega} K_1(x,y,s) v_t(y,s)\, dy d\mu_1(s) \right|^2 dx \\ &\quad + 2 \int\limits_{\Omega} \left| \int\limits_{-r}^{0} \int\limits_{\Omega} K_2(x,y,s) w_t(y,s)\, dy d\mu_2(s) \right|^2 dx \\ &\le 2 \int\limits_{-r}^{0} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} |K_1(x,y,s)|^2\, dx dy d\mu_1(s) \cdot \max_{s \in [-r,0]} \int\limits_{\Omega} |v_t(y,s)|^2\, dy \int\limits_{-r}^{0} d\mu_1(s) \\ &\quad + 2 \int\limits_{-r}^{0} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} |K_2(x,y,s)|^2\, dx dy d\mu_2(s) \cdot \max_{s \in [-r,0]} \int\limits_{\Omega} |w_t(y,s)|^2\, dy \int\limits_{-r}^{0} d\mu_2(s) \\ &\le 2 \sum_{m=1}^{2} V^0_{-r}[\mu_m] \int\limits_{-r}^{0} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{\Omega} |K_m(x,y,s)|^2\, dx dy d\mu_m(s) \cdot \|(v_t, w_t)\|^2_{\mathfrak{U}_r}. \end{aligned}$$

Обозначим $Aw = \Delta w$, $\operatorname{dom} A = H^2_\partial(\Omega) \subset L_2(\Omega)$. Через $\{\varphi_k : k \in \mathbb{N}\}$ обозначим ортонормированные в смысле скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в $L_2(\Omega)$ собственные функции оператора A, занумерованные по невозрастанию собственных значений $\{\lambda_k : k \in \mathbb{N}\}$ с учетом их кратности.

Теорема 5.1 [18]. *Пусть $-\beta \notin \sigma(A)$. Тогда оператор M сильно $(L, 0)$-радиален. При этом*

$$P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\alpha(\beta + A)^{-1} & 0 \end{pmatrix}, \quad Q = \begin{pmatrix} I & A(\beta + A)^{-1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда $\mathfrak{U}^1 = \operatorname{im} P = \{(v, -\alpha(\beta + A)^{-1} v) \in (L_2(\Omega))^2 : v \in L_2(\Omega)\}$ изоморфно подпространству $L_2(\Omega) \times \{0\}$; $\mathfrak{U}^0 = \ker P = \{0\} \times L_2(\Omega)$; $\mathfrak{F}^1 = \operatorname{im} Q = \{(v + A(\beta + A)^{-1} w, 0) \in (L_2(\Omega))^2 : v, w \in (L_2(\Omega))^2\} = L_2(\Omega) \times \{0\}$ и $\mathfrak{F}^0 = \ker Q = \{(v, w) \in (L_2(\Omega))^2 : v + A(\beta + A)^{-1} w = 0\}$ изоморфно $\{0\} \times L_2(\Omega)$.

Теорема 5.2. *Пусть* $-\beta \notin \sigma(A)$, *выполняется условие* (5.1) *и* $f_0, f_1 \in C^1([0,+\infty); L_2(\Omega))$, $h_0, h_1 \in C^1([-r,0]; L_2(\Omega))$, $h_1(\cdot,0) \in H^2_\partial(\Omega)$,

$$h_{1t}(x,0) = \Delta h_1(x,0) + \alpha\Delta(\beta+A)^{-1}h_1(x,0) + \int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_1(x,y,s)h_1(y,s)\,dyd\mu_1(s)$$

$$- \alpha(\beta+A)^{-1}\int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_2(x,y,s)h_1(y,s)\,dyd\mu_2(s), \quad x \in \Omega,$$

$$\alpha h_1(\cdot,0) + (\beta+\Delta)h_0(\cdot,0) = -f_0(\cdot,0),$$
$$\alpha h_{1t}(\cdot,0-) + (\beta+\Delta)h_{0t}(\cdot,0-) = -f_{0t}(\cdot,0+).$$

Тогда существует единственное решение

$$v, w \in C([-r,+\infty); L_2(\Omega)) \cap C^1([0,+\infty); L_2(\Omega))$$

задачи (5.2)–(5.6).

Доказательство. Очевидно, что $\operatorname{im}\Phi \subset \mathfrak{F}^1$. Осталось проверить условия теоремы 4.1 с помощью теоремы 5.1. $\square$

Из формулы для проектора P в теореме 5.1 следует, что условие (5.2) эквивалентно начальному условию в обобщенной задаче Шоуолтера для системы

$$v_t(x,t) = \Delta v(x,t) - \Delta w(x,t) + \int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_1(x,y,s)v(y,t+s)\,dyd\mu_1(s) + f_1(x,t),$$
$$(x,t) \in \Omega \times [0,+\infty), \quad (5.7)$$

$$\Delta w(x,t) + \beta w(x,t) + \alpha v(x,t) + \int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_2(x,y,s)v(y,t+s)\,dyd\mu_2(s) + f_0(x,t),$$
$$(x,t) \in \Omega \times [0,+\infty). \quad (5.8)$$

Из теоремы 4.3 получим следующий результат.

Теорема 5.3. *Пусть* $-\beta \notin \sigma(A)$, *выполняется условие* (5.1) *и* $f_0, f_1 \in C^1([0;+\infty); L_2(\Omega))$, $h_1 \in C^1([-r,0]; L_2(\Omega))$, $h_1(\cdot,0) \in H^2_\partial(\Omega)$,

$$h_{1t}(x,0) = \Delta h_1(x,0) + \alpha\Delta(\beta+A)^{-1}h_1(x,0) + \int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_1(x,y,s)h_1(y,s)\,dyd\mu_1(s)$$

$$+ \Delta(\beta+A)^{-1}\int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_2(x,y,s)h_1(y,s)\,dyd\mu_2(s), \quad x \in \Omega.$$

Тогда существует единственное решение

$$v, w \in C([-r,+\infty); L_2(\Omega)) \cap C^1([0,+\infty); L_2(\Omega))$$

задачи (5.2), (5.4), (5.7), (5.8).

Доказательство. Заметим лишь, что в данном случае

$$\Phi\begin{pmatrix} v_t \\ w_t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_1(x,y,s)v_t(y,s)\,dyd\mu_1(s) \\ \int_{-r}^{0}\int_{\Omega} K_2(x,y,s)v_t(y,s)\,dyd\mu_2(s) \end{pmatrix},$$

поэтому $\mathfrak{U}^0_r \subset \ker\Phi$. $\square$

ЛИТЕРАТУРА

1. *Демиденко Г. В., Успенский С. В.* Уравнения и системы, не разрешенные относительно старшей производной. Новосибирск: Науч. кн., 1998.
2. *Свешников А. Г., Альшин А. Б., Корпусов М. О., Плетнер Ю. Д.* Линейные и нелинейные уравнения соболевского типа. М.: Физматлит, 2007.
3. *Favini A., Yagi A.* Degenerate differential equations in Banach spaces. New York; Basel; Hong Kong: Marcel Dekker Inc., 1999.
4. *Sviridyuk G. A., Fedorov V. E.* Linear Sobolev type equations and degenerate semigroups of operators. Utrecht; Boston: VSP, 2003.
5. *Мышкис А. Д.* Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. М.: Гостехиздат, 1951.
6. *Красовский Н. Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. М.: Гостехиздат, 1959.
7. *Delay differential equations and applications* / ed. O. Arino, M. L. Hbid, E. Ait Dads. Dordrecht: Springer-Verl., 2006.
8. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. Basel: Birkhauser, 1997.
9. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Элементы современной теории функционально-дифференциальных уравнений. Методы и приложения. М.: Ин-т компьютерных исследований, 2002.
10. *Федоров В. Е.* Линейные уравнения типа Соболева с относительно p-радиальными операторами // Докл. РАН. 1996. Т. 351, № 3. С. 316–318.
11. *Федоров В. Е.* Вырожденные сильно непрерывные полугруппы операторов // Алгебра и анализ. 2000. Т. 12, № 3. С. 173–200.
12. *Федоров В. Е.* Обобщение теоремы Хилле — Иосиды на случай вырожденных полугрупп в локально выпуклых пространствах // Сиб. мат. журн. 2005. Т. 46, № 2. С. 426–448.
13. *Engel K.-J., Nagel R.* One-parameter semigroups for linear evolution equations. New York; Berlin; Heidelberg: Springer-Verl., 2000.
14. *Федоров В. Е.* Свойства псевдорезольвент и условия существования вырожденных полугрупп операторов // Вестн. Челябинск. гос. ун-та. Сер. Математика. Механика. Информатика. 2009. Т. 20, № 11. С. 12–19.
15. *Федоров В. Е., Рузакова О. А.* О разрешимости возмущенных уравнений соболевского типа // Алгебра и анализ. 2008. Т. 20, № 4. С. 189–217.
16. *Плотников П. И., Старовойтов В. Н.* Задача Стефана с поверхностным натяжением как предел модели фазового поля // Дифференц. уравнения. 1993. Т. 29, № 3. С. 461–471.
17. *Плотников П. И., Клепачева А. В.* Уравнения фазового поля и градиентные потоки маргинальных функций // Сиб. мат. журн. 2001. Т. 42, № 3. С. 651–669.
18. *Федоров В. Е., Уразаева А. В.* Обратная задача для одного класса сингулярных линейных операторно-дифференциальных уравнений // Тр. Воронежск. зимн. мат. шк. Воронеж: ВГУ, 2004. С. 161–172.

Статья поступила 29 марта 2011 г.

Федоров Владимир Евгеньевич
Челябинский гос. университет, математический факультет,
ул. Братьев Кашириных, 129, Челябинск 454001
kar@csu.ru

Омельченко Екатерина Александровна
Российская академия правосудия,
кафедра гуманитарных и социально-экономических дисциплин,
пр. Победы, 160, Челябинск 454084
omelchenko_ea@mail.ru