Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 519.2

АСИМПТОТИКА ХВОСТА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ РАЗНОСТИ ЗАВИСИМЫХ СУБЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ВЕЛИЧИН

Х. Альбрехер, С. Асмуссен, Д. Корчак

Аннотация. Изучается асимптотическое поведение $\mathbb{P}(X - Y > u)$ при $u \to \infty$, где X имеет субэкспоненциальное распределение, Y положительна и случайные величины X, Y могут быть зависимы. Найдены условия, при которых вычитание Y не меняет поведение хвоста распределения X. Также изучено, при каких условиях комонотонность функции копулы является наихудшим вариантом для указанной асимптотики в смысле минимизации хвоста распределения $X - Y$, и предложены явные конструкции наихудших копул в прочих ситуациях.

Ключевые слова: субэкспоненциальная случайная величина, разности, зависимость, копула, средняя функция превышения.

§ 1. Введение

В последние годы достигнут существенный прогресс в понимании влияния зависимости на асимптотику хвоста распределения сумм положительных субэкспоненциальных случайных величин (см., например, [1–5]). В настоящей работе изучается асимптотика хвоста распределения разности случайных величин, т. е. $\mathbb{P}(X - Y > u)$ при $u \to \infty$, где распределение X субэкспоненциально а хвост распределения положительной случайной величины Y может быть разным. Если X, Y независимы, то просто (ср. [6, лемма 3.2])

$$\mathbb{P}(X - Y > u) \sim \mathbb{P}(X > u) \tag{1.1}$$

без каких бы то ни было дополнительных условий. Таким образом, все дело в наличии зависимости.

Поскольку $\mathbb{P}(X - Y > u) = \mathbb{P}(\max(X, 0) - Y > u)$ при положительном u, можно без ограничения общности предполагать, что X положительна.

Асимптотика хвоста распределения разности зависимых положительных величин представляет интерес в самых разных областях таких, как, например, рекуррентные стохастические уравнения, системы обслуживания и модели страхования рисков, всякий раз в условиях наличия зависимости. Так, в контексте страхования можно естественным образом интерпретировать разности зависимых величин как разности между выплатой X и предшествующим ей временем между выплатами Y, когда непосредственно после выплаты сохраняется структура случайного блуждания, свойственная процессу текущего баланса компании (см. [7–10], а также примеры этих и аналогичных структур

Supported by the Swiss National Science Foundation Project 200021–124635/1.

в [11]). Аналогичные интерпретации возможны в приложениях, связанных с системами обслуживания.

Асмуссен и Бьярд [12] использовали свойство (1.1) в случае, когда распределение Y имеет тонкий хвост. Они показали, что (1.1) по существу, если хвост распределения Y тоньше, чем $e^{-x^{1/2}}$, и построили контрпример, показывающий, что (1.1) может не выполняться в случае более тонких, но все еще субэкспоненциальных хвостов. Целью настоящей работы является получение более общих условий относительно зависимости X и Y, при которых имеет место изучаемая нечувствительность асимптотики, и рассмотрение более широкого класса распределений Y. В § 3 дан общий критерий выполнения (1.1), § 4 посвящен обсуждению роли средней функции превышения в этом анализе. В § 5 более подробно изучен случай легких хвостов распределений Y и предложена существенно более простая конструкция примера, показывающего, что $e^{-x^{1/2}}$ является фактически критической границей для скорости убывания хвоста распределения X, если не уточнять вид зависимости. Эта скорость критическая также во многих иных ситуациях и известна как $\sqrt{x}$*-нечувствительность* [13]. В § 6 показано (при некоторых условиях регулярности), что если пример нечувствительности (1.1) существует, то комонотонная копула также служит контрпримером. Тем не менее комонотонная копула не является той формой зависимости, которая порождает наиболее экстремальное поведение $\mathbb{P}(X - Y > u)$. Мы предлагаем условия, при которых комонотонная зависимость действительно будет наихудшей в смысле минимизации хвоста распределения $X - Y$, а также явную конструкцию наихудшей функции копулы в остальных случаях. Наконец, в § 7 рассматривается случай почти правильно меняющегося распределения X и обсуждается связь с локальными предельными теоремами.

§ 2. Предварительные сведения

В этом параграфе приведем некоторые свойства случайных величин и классические результаты, используемые в работе. Для случайной величины X с функцией распределения $F_X(u)$ обозначим через $\overline{F}_X(u) = \mathbb{P}(X > u)$ хвост распределения. Будем говорить, что распределение X имеет *длинный хвост*, если для любой постоянной x

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}_X(u-x)}{\overline{F}_X(u)} = 1.$$

Распределение неотрицательной случайной величины X называется *субэкспоненциальным*, если для двух независимых копий X_1 и X_2 величины X выполнено

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X_1 + X_2 > u)}{\mathbb{P}(X > u)} = 2.$$

Заметим, что субэкспоненциальные распределения имеют длинный хвост. Подклассом субэкспоненциальных распределений являются правильно меняющиеся распределения, т. е. те, для которых найдется индекс $\alpha > 0$ такой, что для всех $y > 0$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}_X(yu)}{\overline{F}_X(u)} = y^{-\alpha}.$$

Расширением класса правильно меняющихся распределений является множество распределений, удовлетворяющих свойству

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X > (1+\varepsilon)u)}{\mathbb{P}(X > u)} = 1.$$

Это свойство известно как почти правильное изменение, а также как состоятельное изменение [14, 15]. Из [16, теорема 2.47] следует, что $\overline{F}_X(u)$ почти правильно меняется, если и только если для любой неотрицательной функции $\delta(u)$, для которой $\lim\limits_{u\to\infty} \delta(u)/u = 0$, выполнено

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}_X(u+\delta(u))}{\overline{F}_X(u)} = 1. \tag{2.1}$$

Обзор дальнейших свойств распределений с тяжелыми хвостами см. в [16].

Другое полезное расширение класса правильно меняющихся распределений связано с теорией экстремальных значений (см. классические источники в [17, 18]). Обозначим через $M_n = \max\limits_{1\le i\le n} X_i$ максимум n независимых и одинаково распределенных случайных величин и предположим, что существуют постоянные a_n, b_n и невырожденная функция распределения $H(x)$, для которых

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}((M_n - b_n)a_n \le x) = \lim_{n\to\infty} (F_X(a_n x + b_n))^n = H(x). \tag{2.2}$$

Тогда $H(x)$ называется *распределением экстремальных значений* и, как известно, принадлежит одному из следующих трех классов:

$$H(x) = \begin{cases} e^{-x^{-\alpha}}, & x > 0 \text{ (Фреше)}, \\ e^{-(-x)^{\alpha}}, & x < 0 \text{ (Вейбулл)}, \\ e^{-e^{-x}}, & x \in \mathbb{R} \text{ (Гумбель)} \end{cases}$$

(см., например, [17, предложение 0.3]). О величине X (или ее распределении $\overline{F}_X(x)$) говорят, что она *лежит в максимальной области притяжения* распределения экстремальных значений H. В [17, гл. 1] показано, что X лежит в максимальной области притяжения распределения Фреше, если и только если распределение X правильно меняется. Если X лежит в максимальной области притяжения распределения Вейбулла, то носитель распределения X ограничен справа. Наконец, X лежит в максимальной области притяжения распределения Гумбеля, если и только если существует сопровождающая функция $e(x)$ такая, что для всех y

$$\lim_{u\to x_r} \frac{\overline{F}_X(u+ye(u))}{\overline{F}_X(u)} = e^{-y},$$

где $x_r = \inf\{x : F_X(x) = 1\}$ — правая граница носителя распределения X (см. также [19, разд. 3.10]). Функция $e(x)$ единственна с точностью до асимптотической эквивалентности и может быть выбрана как средняя функция превышения $e_m(x) = \mathbb{E}(X - x \mid X > x)$ или, если плотность существует, как $1/r(x) = \overline{F}_X(x)/f_X(x)$ (обратная величина к интенсивности отказов). Класс распределений, лежащих в максимальной области притяжения распределения Гумбеля, содержит некоторые субэкспоненциальные распределения: логарифмически нормальное, Вейбулла с тяжелыми хвостами, а также ряд распределений с тонкими хвостами типа гамма-распределений и нормальных распределений.

Мы будем рассматривать зависимые случайные величины, поэтому иногда полезно будет отделить структуру, описывающую зависимость, от одномерных распределений. Для этого будут использованы функции копулы, отдельные свойства которых напомним здесь (см., например, [20]). *Двумерной копулой* $C(u, v)$ является функция, для которой

• $C(u,0) = 0 = C(0,v)$ для всех $u, v \in [0,1]$,

• $C(u,1) = u$ и $C(1,v) = v$ для всех $u, v \in [0,1]$,

• C является 2-монотонной, т. е. для любых $u_1, u_2, v_1, v_2 \in [0,1]$ таких, что $u_1 \le u_2$ и $v_1 \le v_2$,

$$C(u_2, v_2) - C(u_2, v_1) - C(u_1, v_2) + C(u_1, v_1) \ge 0.$$

Тем самым функция копулы является функцией совместного распределения двух случайных величин с равномерными на $[0,1]$ одномерными распределениями. По теореме Скляра всегда существует копула C такая, что функция совместного распределения двух случайных величин X и Y представима в виде

$$\mathbb{P}(X \le x, Y \le y) = C(F_X(x), F_Y(y)). \tag{2.3}$$

Наоборот, для каждой функции копулы существуют случайные величины X и Y с одномерными функциями распределения F_X и F_Y, для которых выполнено (2.3). Говорят, что X и Y *зависимы согласно копуле* C. Заметим, что C инвариантна относительно монотонных преобразований частных распределений. Верхняя граница Фреше $M(u,v) = \min(u,v)$ (максимальная, или комонотонная, копула) такова, что

$$C(u,v) \le M(u,v)$$

для любых функций копул C. Случайные величины X и Y называют *комонотонными*, если они зависимы согласно M. Для каждой функции копулы можно определить соответствующую копулу выживания как $\widehat{C}(u,v) = u + v - 1 + C(1-u, 1-v)$, тем самым

$$\mathbb{P}(X > x, Y > y) = \widehat{C}(\overline{F}_X(x), \overline{F}_Y(y)).$$

Функции копулы являются удобным инструментом построения зависимых случайных величин с заданными одномерными распределениями. В настоящей работе мы используем следующие два метода построения копул (см., например, [20, гл. 3]). Обозначим через $\{J_i\}$ разбиение отрезка $[0,1]$, определяемое как набор замкнутых промежутков $J_i = [a_i, b_i]$, которые могут пересекаться только в концевых точках и $\bigcup J_i = [0,1]$ (можно отнести концевые точки к какому-либо одному промежутку и получить разбиение в классическом смысле). Для каждого разбиения $\{J_i\}$ и для любого конечного набора функций копул $\{C_i\}$ определим порядковую сумму $\{C_i\}$ по $\{J_i\}$ как

$$C(u,v) = \begin{cases} a_i + (b_i - a_i) C_i\left(\frac{u-a_i}{b_i-a_i}, \frac{v-a_i}{b_i-a_i}\right), & (u,v) \in J_i^2, \\ M(u,v) & \text{иначе.} \end{cases}$$

Заметим, что если U и V суть равномерно распределенные случайные величины, зависимые соответственно порядковой сумме, то $\mathbb{P}(U \in J_i \mid V \in J_i) = 1$ и случайный вектор $(U,V) \mid (U,V) \in J_i^2$ имеет равномерные одномерные распределения на J_i, зависимые в соответствии с функцией копулы C_i.

Второй вид копул, которые будут использоваться в дальнейшем, это так называемые прямые перемешивания M. Пусть имеются копула C, конечное разбиение $\mathscr{J} = \{J_1, \dots, J_n\}$ отрезка $[0,1]$ и перестановка π набора $\{1, \dots, n\}$. Копула C задает меру на полосах $J_i \times [0,1]$ или, что равносильно, на полосах длиной $h_i = b_i - a_i$. Упорядочим теперь эти полосы в соответствии с перестановкой π. Теперь полосе $[0, h_{\pi(1)}] \times [0,1]$ припишем меру, которую копула C приписывала полосе $J_{\pi(1)} \times [0,1]$, полосе $[h_{\pi(1)}, h_{\pi(1)} + h_{\pi(2)}] \times [0,1]$ припишем меру, ранее отвечавшую $J_{\pi(2)} \times [0,1]$, и т. д. Тем самым задана новая вероятностная мера на $[0,1]\times[0,1]$, которая (что легко проверить) снова имеет равномерные одномерные распределения, поэтому соответствует новой копуле $C_s(\mathscr{J},\pi)$. Назовем $C_s(\mathscr{J},\pi)$ *прямым перемешиванием* M, если $C=M$, и тогда будем использовать обозначение $M_s(\mathscr{J},\pi)$. Из дискуссии после теоремы 3.2.3 в [20] (см. также [21]) следует, что любая копула может быть приближена перемешиваниями сколь угодно точно в равномерной метрике.

В дальнейших параграфах мы также будем использовать многомерную теорию экстремальных значений, изучающую покомпонентные максимумы многомерных случайных величин (представленные здесь результаты можно, например, найти в [17, гл. 5.4] или в [18]). Рассмотрим такие возможные пределы

$$\lim_{n\to\infty}[\mathbb{P}(X\le a_nx+b_n,\ Y\le \hat a_ny-\hat b_n)]^n=H(x,y),$$

для которых H имеет невырожденные одномерные распределения. В этом случае одномерные распределения X и Y должны лежать в максимальной области притяжения распределения экстремальных значений H_X и H_Y соответственно и должна существовать копула C_* такая, что для функции копулы C величин X и Y имеет место равенство

$$C_*(u,v)=\lim_{n\to\infty}[C(u^{1/n},v^{1/n})]^n.$$

В этом случае говорят, что копула C лежит в максимальной области притяжения экстремальной копулы C_*. Кроме того, $H(x,y)=C_*(H_X(x),H_Y(y))$.

Кратко очертим значение теории экстремальных значений для целей следующих параграфов настоящей работы. Пусть, скажем, $\overline{F}_X$ правильно меняется с показателем α и $\overline{F}_X(u)\sim\overline{F}_Y(cu)$. Тогда легко можно убедиться в том, что

$$\lim_{t\to\infty}\frac{\mathbb{P}(X>tx\ \text{или}\ Y>tcy)}{\mathbb{P}(X>t)}=\lim_{t\to\infty}\frac{1-C(F_X(tx),F_Y(tcy))}{\overline{F}_X(t)}$$

$$=-\lim_{t\to\infty}\log\left[C\biggl(\exp\left\{\overline{F}_X(t)\frac{\log(F_X(tx))}{\overline{F}_X(t)}\right\},\exp\left\{\overline{F}_X(t)\frac{\log(F_Y(tcy))}{\overline{F}_X(t)}\right\}\biggr)^{1/\overline{F}_X(t)}\right]$$

$$=-\log(C_*(e^{-x^{-\alpha}},e^{-y^{-\alpha}})).$$

В последнем равенстве использован тот факт, что функция в правой части непрерывна. Теперь для любого t левая часть уравнения определяет меру H_t на $[0,\infty]^2$, а правая — меру H на $[0,\infty]^2\backslash\{0,0\}$ (так называемую экспоненциальную меру). Вычисления показывают, что $H_t\to H$ в том смысле, что для любого множества A, отделенного от $\{0,0\}$ и такого, что $H(\partial A)=0$, выполняется $\lim\limits_{t\to\infty}H_t(A)\to H(A)$, где ∂A — граница множества A. Для $A=\{(x,y):x-cy>1\}$ имеем

$$H_t(A)=\frac{\mathbb{P}(X-Y>t)}{\mathbb{P}(X>t)}.$$

Доказательство того, что $H(\partial A)=0$, тривиально ввиду специального вида H. Из определения H ясно, что достаточно рассмотреть случай $\alpha=1$, чтобы полностью описать H. Если взять $x=r\theta$ и $y=r(1-\theta)$, то из [17, предложение 5.11] будет следовать, что соответствующая H мера μ_r на радиальной части не зависит от меры μ_θ на угловой части, μ_r имеет плотность r^{-2} и мера μ_θ такова, что

$$\int_0^1\theta\,d\mu_\theta=\int_0^1(1-\theta)\,d\mu_\theta=1. \tag{2.4}$$

Если X лежит в максимальной области притяжения распределения Гумбеля, то применимы аналогичные рассуждения.

§ 3. Нечувствительность асимптотики

Как следует, например, из [16], если распределение F имеет длинный хвост, то существует неубывающая функция δ такая, что $\delta(u) \to \infty$ при $u \to \infty$, для которой

$$\overline{F}_X(u \pm \delta(u)) \sim \overline{F}_X(u) \quad \text{при } u \to \infty. \tag{3.1}$$

Далее нам потребуется выбирать $\delta(u)$ настолько большой, насколько это возможно. Следующее предложение, по существу, равносильно предложению 5.1 из [5], однако мы приведем его доказательство ввиду его простоты и полезности для дальнейшего.

Предложение 3.1. *Пусть даны случайная величина $X \geq 0$, распределение которой F_X имеет длинный хвост, и случайная величина $Y \geq 0$ (не обязательно независимые). Тогда (1.1) выполнено при условии, что $\delta(\cdot)$ в (3.1) может быть выбрана так, что*

$$\mathbb{P}(Y > \delta(u),\, X > u + \delta(u)) = o(\overline{F}_X(u)). \tag{3.2}$$

Доказательство. Запишем

$$\mathbb{P}(X - Y > u) = \mathbb{P}(X - Y > u,\, Y \leq \delta(u)) + \mathbb{P}(X - Y > u,\, Y > \delta(u)).$$

Заметим, что согласно (3.2)

$$\mathbb{P}(X - Y > u,\, Y > \delta(u)) \leq \mathbb{P}(X > u + \delta(u),\, Y > \delta(u)) = o(\overline{F}_X(u)).$$

Более того,

$$\mathbb{P}(X - Y > u,\, Y \leq \delta(u)) \leq \mathbb{P}(X > u) = \overline{F}_X(u),$$

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X - Y > u,\, Y \leq \delta(u)) &\geq \mathbb{P}\big(X - \delta(u) > u,\, Y \leq \delta(u)\big) \\ &= \mathbb{P}(X - \delta(u) > u) - \mathbb{P}(X - \delta(u) > u,\, Y > \delta(u)) \sim \overline{F}_X(u) - o(\overline{F}_X(u)).\end{aligned}$$

Вместе эти неравенства завершают доказательство. □

Пример 3.2. Если X и Y зависимы согласно функции копулы C, которая дает отрицательную квадрантную зависимость (NQD, т. е. $C(u,v) \leq uv$ для $0 \leq u,v \leq 1$), и распределение X имеет длинный хвост, то условия предложения 3.1 выполнены и, в частности,

$$\mathbb{P}(Y > \delta(u),\, X > u + \delta(u)) \leq \mathbb{P}(Y > \delta(u))\mathbb{P}(X > u + \delta(u)) = o(\overline{F}_X(u)).$$

Следовательно, (1.1) верно. Заметим, что данный критерий не содержит никаких предположений относительно распределения Y. В терминах копулы выживания достаточным условием является $\widehat{C}(u,v) \leq uh(v)$ при $h(v) \to 0$. На языке функций распределения это означает, что для любых $x, y \geq 0$

$$\mathbb{P}(X > x,\, Y > y) \leq \mathbb{P}(X > x)h(\mathbb{P}(Y > y)). \quad \square$$

Пример 3.3. Можно сформулировать критерий в более общем виде в терминах стохастического порядка: если пара (X^1, Y^1) удовлетворяет условию (3.2), то любая пара (X^2, Y^2) с такими же одномерными распределениями, доминируемая в смысле согласованного упорядочения (т. е. $\mathbb{P}(X^1 > x, Y^1 > y) \geq \mathbb{P}(X^2 > x, Y^2 > y)$ для всех $x > x_0, y > y_0$) также удовлетворяет (3.2). □

§ 4. Роль средней функции превышения

Пусть X имеет правильно меняющееся распределение или лежит в максимальной области притяжения распределения Гумбеля со средней функцией превышения $e_m(u)$. Тогда $\delta(u)$ в (3.1) может быть любой функцией, для которой $\delta(u) \to \infty$ и

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\delta(u)}{e_m(u)} = 0. \tag{4.1}$$

В более общей постановке предположим, что существует функция $e(u)$ такая, что

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X - \varepsilon e(u) > u)}{\mathbb{P}(X > u)} < 1$$

для некоторого $\varepsilon > 0$ и

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X - \varepsilon e(u) > u)}{\mathbb{P}(X > u)} = 1.$$

Тогда если

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y > \varepsilon e(u))}{\mathbb{P}(X > u)} = 0,$$

то по предложению 3.1 получим $\mathbb{P}(X - Y > u) \sim \mathbb{P}(X > u)$.

Как указано выше, для правильно меняющихся распределений или распределений из максимальной области притяжения распределения Гумбеля можно выбрать $e_m(u)$ как среднюю функцию превышения (или обратную величину к интенсивности отказов $r(u)$). Следующий результат предлагает другие условия, при которых распределение X таково, что мы все еще можем использовать среднюю функцию превышения в (4.1).

Лемма 4.1. *Пусть X имеет распределение с длинным хвостом такое, что*

$$\overline{F}_X(x) = c(x) \exp\left\{ -\int_0^x r^*(t)\, dt \right\},$$

где $\lim_{u\to\infty} c(u) = c$, $0 < c < \infty$ *и* $\lim_{u\to\infty} r^*(u) = 0$. *Пусть также существует* $\varepsilon_0 > 0$ *такое, что равномерно по* $0 < t < \varepsilon_0$

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{r^*\bigl(u + \frac{t}{r^*(u)}\bigr)}{r^*(u)} = c_l > 0, \quad \limsup_{u\to\infty} \frac{r^*\bigl(u + \frac{t}{r^*(u)}\bigr)}{r^*(u)} = c_u < \infty.$$

Тогда

$$\limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}\bigl(X - \varepsilon \frac{1}{r^*(u)} > u\bigr)}{\mathbb{P}(X > u)} < 1, \quad \lim_{\varepsilon\to 0} \liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}\bigl(X - \varepsilon \frac{1}{r^*(u)} > u\bigr)}{\mathbb{P}(X > u)} = 1.$$

Замечание 4.2. Заметим, что если для X выполнены условия леммы 4.1, то средняя функция превышения $e_m(u)$ удовлетворяет свойству

$$\lim_{u\to\infty} r^*(u) e_m(u) = 1.$$

Доказательство. Имеем

$$\frac{\mathbb{P}\big(X-\varepsilon\frac{1}{r^*(u)}>u\big)}{\mathbb{P}(X>u)}\sim\exp\left(-\int\limits_u^{u+\frac{\varepsilon}{r^*(u)}}r^*(t)\,dt\right)$$

$$=\exp\left(-\int\limits_0^\varepsilon\frac{r^*\big(u+\frac{t}{r^*(u)}\big)}{r^*(u)}\,dt\right)\lesssim\exp\left(-c_l\int\limits_0^\varepsilon dt\right)=e^{-c_l\varepsilon}<1$$

(здесь $f(u)\lesssim g(u)$ означает $\limsup\limits_{u\to\infty}f(u)/g(u)\le1$). Кроме того,

$$\frac{\mathbb{P}\big(X-\varepsilon\frac{1}{r(u)}>u\big)}{\mathbb{P}(X>u)}\sim\exp\left(-\int\limits_0^\varepsilon\frac{r^*\big(u+\frac{t}{r^*(u)}\big)}{r^*(u)}\,dt\right)\gtrsim\exp\left(-c_u\int\limits_0^\varepsilon dt\right)=e^{-c_u\varepsilon},$$

откуда следует требуемое утверждение. $\square$

Замечание 4.3. Примером, когда условия леммы 4.1 не выполнены, может служить

$$\overline{F}_X(x)=\frac{1}{\log(x)}\quad\text{для } x\ge e.$$

§ 5. Распределение Y с тонким хвостом

Может оказаться полезным заменить (3.2) более сильным условием

$$\mathbb{P}\big(Y>\delta(u)\big)=o(\overline{F}_X(u)),\tag{5.1}$$

которое в таком виде становится критерием одномерного распределения Y и его сравнения с одномерным распределением X. Это приводит к вопросу: если Y имеет распределение с тонким хвостом (т. е. $P(Y>u)=o(e^{-gu})$ для некоторого $g>0$), то для каких случайных величин X, имеющих распределение с длинным хвостом, выполняется (1.1) при любой форме зависимости? В этом случае условие (5.1) превращается в условие

$$e^{-g\delta(u)}=o(\overline{F}_X(u)),$$

которое выполнено для правильно меняющейся F_X (возьмем $\delta(x)=c\log x$ с достаточно большим c), для логарифмически нормального распределения ($\delta(x)=x/\log^2 x$) и для распределения Вейбулла с толстым хвостом $\overline{F}_X(x)=e^{-x^\beta}$ при $\beta<1/2$ ($\delta(x)=x^{1-\beta^*}$ при $\beta<\beta^*<1$). Таким образом, условие покрывает большинство стандартных распределений с толстыми хвостами, кроме тех, хвосты которых ближе всего к легким. Поскольку для независимых X,Y и субэкспоненциально распределенного X распределения X и $X-Y$ всегда имеют одинаковый хвост (как обсуждалось в § 1), можно предположить, что это условие является чисто техническим. Однако, по всей видимости, давно известно, что это не так, хотя точной ссылки привести не удается. Контрпример имеется в [12], и еще более простая конструкция выглядит следующим образом.

Пример 5.1. Пусть $\mathbb{P}(X>u)\sim e^{-u^\beta}$ с показателем $0<\beta<1$ и $Y=X^\beta$. Тогда $\mathbb{P}(Y>u)\sim e^{-u}$ и, следовательно, распределение Y имеет тонкий хвост. Тем самым

$$\mathbb{P}(X-Y>u)=\mathbb{P}(X>u+X^\beta)\le\mathbb{P}(X>u+u^\beta)$$

$$\sim\exp\{-(u+u^\beta)^\beta\}=\exp\{-u^\beta(1+u^{\beta-1})^\beta\}\sim\exp\{-u^\beta-\beta u^{2\beta-1}\}.$$

Здесь $\exp\{-\beta u^{2\beta-1}\} = o(1)$, если и только если $\beta > 1/2$. $\square$

Этот контрпример (так же, как и пример из [12]) использует комонотонную копулу. Естественным является вопрос: всегда ли комонотонная копула минимизирует хвост распределения $X - Y$? Это и будет темой следующего параграфа.

§ 6. Копула для наихудшего случая

Покажем при некоторых условиях регулярности, что если существует контрпример к нечувствительности (1.1), то комонотонная копула также обеспечивает контрпример.

Лемма 6.1. *Пусть X и Y — две неотрицательные случайные величины с функцией распределения $F_X(x)$ и $F_Y(x)$ соответственно. Определим*

$$\overline{\gamma}(u) = \sup\{x \mid F_Y(x-u) < F_X(x),\ x \ge u\} - u,$$

$$\underline{\gamma}(u) = \inf\{x \mid F_Y(x-u) \ge F_X(x),\ x \ge u\} - u.$$

Если для некоторых $\alpha > 0$, $c > 0$ и всех $k > 1$ будет

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}_Y(ku)}{\overline{F}_Y(u)} \le ck^{-\alpha}, \quad \lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X > u + \overline{\gamma}(u))}{\mathbb{P}(X > u)} = 1, \quad \limsup_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y > \overline{\gamma}(u))}{\mathbb{P}(X > u)} < \infty,$$

то

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X - Y > u)}{\mathbb{P}(X > u)} = 1.$$

Если

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X > u + \underline{\gamma}(u))}{\mathbb{P}(X > u)} < 1$$

и величины X и Y связаны комонотонной копулой, то

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X - Y > u)}{\mathbb{P}(X > u)} < 1.$$

Доказательство. Заметим, что $\mathbb{P}(X - Y > u) \le \mathbb{P}(X > u)$. Имеем

$$\begin{aligned}\mathbb{P}(X - Y > u) &= \int_u^\infty \mathbb{P}(Y \le x - u \mid X = x)\, dF_X(x) \\ &= \int_u^\infty \mathbb{P}(Y \le x - u \mid X = x) I_{\{F_Y(x-u) < F_X(x)\}}\, dF_X(x) \\ &\quad + \int_u^\infty \mathbb{P}(Y \le x - u \mid X = x) I_{\{F_Y(x-u) \ge F_X(x)\}}\, dF_X(x).\end{aligned}$$

Чтобы доказать первое утверждение леммы, отметим, что

$$\begin{aligned}\int_u^\infty \mathbb{P}(Y \le x - u \mid X = x) I_{\{F_Y(x-u) < F_X(x)\}}\, dF_X(x) &\le \int_u^\infty I_{\{F_Y(x-u) < F_X(x)\}}\, dF_X(x) \\ &\le \int_u^{u+\overline{\gamma}(u)} dF_X(x) = \mathbb{P}(X > u) - \mathbb{P}(X > u + \overline{\gamma}(u)) = o(\mathbb{P}(X > u)).\end{aligned}$$

Для второго интеграла

$$\int_u^\infty \mathbb{P}(Y \le x-u \mid X=x) I_{\{F_Y(x-u)\ge F_X(x)\}}\, dF_X(x)$$

$$\ge \int_{u+k\overline{\gamma}(u)}^\infty \mathbb{P}(Y \le x-u \mid X=x)\, dF_X(x) \ge \int_{u+k\overline{\gamma}(u)}^\infty \mathbb{P}(Y \le k\overline{\gamma}(u) \mid X=x)\, dF_X(x)$$

$$= \mathbb{P}(X > u+k\overline{\gamma}(u)) - \mathbb{P}(X > u+k\overline{\gamma}(u), Y > k\overline{\gamma}(u))$$

$$\ge \mathbb{P}(X > u+k\overline{\gamma}(u)) - \mathbb{P}(Y > k\overline{\gamma}(u)).$$

Следовательно, существует $c_1 > 0$, не зависящее от k и такое, что

$$\frac{\mathbb{P}(Y > k\overline{\gamma}(u))}{\mathbb{P}(X > u)} = \frac{\mathbb{P}(Y > k\overline{\gamma}(u))}{\mathbb{P}(Y > \overline{\gamma}(u))} \frac{\mathbb{P}(Y > \overline{\gamma}(u))}{\mathbb{P}(X > u)} \le c_1 k^{-\alpha}.$$

Поскольку для x_0 такого, что $F_Y(x_0-u) < F_X(x_0)$, при каждом $\varepsilon > 0$ выполняется неравенство $F_Y((x_0+\varepsilon)-(u+\varepsilon)) < F_X(x_0+\varepsilon)$, получаем

$$\overline{\gamma}(u+\varepsilon) = \sup\{x \mid F_Y(x-(u+\varepsilon)) < F_X(x),\ x \ge u\} - (u+\varepsilon)$$

$$\ge \sup\{x \mid F_Y(x-u) < F_X(x),\ x \ge u\} + \varepsilon - (u+\varepsilon) = \overline{\gamma}(u).$$

Стало быть, $\overline{\gamma}(u)$ монотонно возрастает. Более того,

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X > u+k\overline{\gamma}(u))}{\mathbb{P}(X > u)} = \liminf_{u\to\infty} \prod_{l=1}^k \frac{\mathbb{P}(X > u+l\overline{\gamma}(u))}{\mathbb{P}(X > u+(l-1)\overline{\gamma}(u))}$$

$$\ge \liminf_{u\to\infty} \prod_{l=1}^k \frac{\mathbb{P}(X > u+(l-1)\overline{\gamma}(u) + \overline{\gamma}(u+(l-1)\overline{\gamma}(u)))}{\mathbb{P}(X > u+(l-1)\overline{\gamma}(u))} = 1,$$

откуда вытекает первое утверждение. Для доказательства второго утверждения заметим, что для связанных комонотонной копулой X и Y с необходимостью

$$\mathbb{P}(X-Y > u) = \int_u^\infty \mathbb{P}(Y \le X-u \mid X=x)\, dF_X(x)$$

$$\le \int_u^\infty I_{\{F_Y(x-u)\ge F_X(x)\}}\, dF_X(x) \le \int_{u+\underline{\gamma}(u)}^\infty dF_X(x) = \mathbb{P}(X > u+\underline{\gamma}(u)). \quad \square$$

Хотя лемма 6.1 говорит о том, что комонотонная копула является естественным кандидатом для контрпримера, она никак не касается вопроса, обеспечивает ли эта копула наихудший случай, т. е. является ли она копулой, минимизирующей $\mathbb{P}(X-Y > u)$ в асимптотическом смысле при данных одномерных распределениях. Чтобы ответить на этот вопрос, рассмотрим сначала случай правильно меняющегося распределения X. В предложении 7.1 ниже будет показано, что если $\overline{F}_Y(u)/\overline{F}_X(u) \to 0$, то при любых копулах асимптотические свойства оказываются одинаковыми. С другой стороны, если $F_X(x) \ge F_Y(x)$ для связанных комонотонной копулой X, Y, то $\mathbb{P}(X-Y > u) = 0$. Следовательно, предположим существование $\hat{c} > 0$ такого, что

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}_Y(u)}{\overline{F}_X(u)} = \hat{c},$$

или, что равносильно, существование c, для которого

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}_Y(cu)}{\overline{F}_X(u)} = 1.$$

Будем изучать асимптотическое поведение $X - Y$ при дополнительном условии

$$\frac{\mathbb{P}(X > xu, Y > ycu)}{\mathbb{P}(X > u)} \to H(x, y),$$

где $H(x, y)$ невырожденна. Согласно теории экстремальных значений

$$\frac{\mathbb{P}(X - Y > u)}{\mathbb{P}(X > u)} \to H(\{(x, y) \mid x - cy > 1\}).$$

Для выяснения того, какая H минимизирует $H(\{(x, y) \mid x - cy > 1\})$, важен показатель правильного изменения α функции F_X. Переходя в полярные координаты (используя сумму компонент в качестве нормы), можем записать H как произведение мер на радиальной и угловой частях. Радиальная мера имеет плотность $\alpha r^{-\alpha-1}$, и условие (2.4) равносильно условию (отметим, что мы выполнили замену переменных)

$$\int_0^1 \theta^\alpha \, d\mu(\theta) = \int_0^1 (1 - \theta)^\alpha \, d\mu(\theta) = 1.$$

Далее заметим, что

$$H(\{(x, y) \mid x - cy > 1\}) = \int_{\frac{c}{1+c}}^1 (\theta - c(1 - \theta))^\alpha \, d\mu(\theta). \tag{6.1}$$

Теперь мы можем выяснить, какая μ^* минимизирует (6.1). Рассмотрим дискретную меру: $\mu(\theta = \theta_i) = p_i$ для $i = 1, \dots, d$. Тогда существует $\theta_i > 1/2$ ($p_i > 0$), если и только если существует $\theta_j < 1/2$ ($p_j > 0$).

Лемма 6.2. *Если мера μ^*, минимизирующая* (6.1), *присваивает положительную массу p_i точке $\theta_i \le \frac{c}{c+1}$, то*

$$\theta_i = \frac{c}{1 + c}.$$

Доказательство. Предположим, что утверждение леммы неверно. Без ограничения общности можно предполагать, что $\theta_1 > 1/2$ и $\theta_2 < c/(c + 1)$. Определим новую меру μ^{**}, для которой $\hat{\theta}_i = \theta_i$ при $i \ne 2$, $\hat{p}_i = p_i$ для $i > 2$, при этом $\hat{\theta}_2 = c/(1 + c)$. Убедимся, что μ является мерой. Имеем

$$p_1\theta_1^\alpha + p_2\theta_2^\alpha = \hat{p}_1\theta_1^\alpha + \hat{p}_2\left(\frac{c}{1 + c}\right)^\alpha,$$

$$p_1(1 - \theta_1)^\alpha + p_2(1 - \theta_2)^\alpha = \hat{p}_1(1 - \theta_1)^\alpha + \hat{p}_2\left(\frac{1}{1 + c}\right)^\alpha.$$

Отсюда следует, что

$$\hat{p}_1 = p_1 + p_2 \frac{\left(\theta_2 \frac{1+c}{c}\right)^\alpha - ((1 - \theta_2)(1 + c))^\alpha}{\left(\theta_1 \frac{1+c}{c}\right)^\alpha - ((1 - \theta_1)(1 + c))^\alpha} < p_1,$$

где без ограничения общности предположили, что p_2 достаточно мало, чтобы $\hat{p}_1 \ge 0$. Таким образом,

$$\int_{\frac{c}{1+c}}^{1} (\theta - c(1-\theta))^\alpha \, d\mu^*(\theta) - \int_{\frac{c}{1+c}}^{1} (\theta - c(1-\theta))^\alpha \, d\mu^{**}(\theta) = (p_1 - \hat{p}_1)(\theta_1 - c(1-\theta_1))^\alpha > 0,$$

а это противоречит предположению о том, что μ^* минимизирует (6.1). $\square$

Теорема 6.3. *Пусть $\alpha < 1$. Тогда μ^* сосредоточена на точках $\theta_1 = 1$ и $\theta_2 = \frac{c}{1+c}$ с массами $p_1 = 1 - c^\alpha$ и $p_2 = (1+c)^\alpha$.*

Доказательство. Предположим, что μ^* присваивает положительную меру $p_1 > 0$ точке $c/(1+c) < \theta_1 < 1$. Тогда можно определить новую меру μ^{**}, которая эквивалентна μ^*, за исключением того, что мы заменили θ_1 на 1 и соответствующую вероятность p_1 на $\hat{p}_1$. Добавим массу $\hat{p}_0$ точке $c/(1+c)$ так, чтобы

$$\hat{p}_1 = p_1\left(\theta_1^\alpha - c^\alpha(1-\theta_1)^\alpha\right) > 0, \quad \hat{p}_0 = p_1(1-\theta_1)^\alpha(1+c)^\alpha.$$

Далее,

$$\int_{\frac{c}{1+c}}^{1} (\theta - c(1-\theta))^\alpha \, d\mu^*(\theta) - \int_{\frac{c}{1+c}}^{1} (\theta - c(1-\theta))^\alpha \, d\mu^{**}(\theta)$$
$$= p_1(\theta_1 - c(1-\theta_1))^\alpha - \hat{p}_1 = p_1((\theta_1 - c(1-\theta_1))^\alpha - (\theta_1^\alpha - c^\alpha(1-\theta_1)^\alpha)) > 0.$$

Отсюда следует требуемое утверждение. $\square$

Теорема 6.4. *Пусть $\alpha > 1$. Тогда μ^* сосредоточена в точке $\theta_1 = 1/2$.*

Доказательство. Предположим, что μ^* присваивает положительную меру $p_1 > 0$ значению $\theta_1 > 1/2$ и $p_2 > 0$ — значению $\theta_2 < 1/2$, где без ограничения общности считаем, что

$$p_1\theta_1^\alpha + p_2\theta_2^\alpha = p_1(1-\theta_1)^\alpha + p_2(1-\theta_2)^\alpha.$$

Определим меру μ^{**}, заменив θ_1 и θ_2 на $1/2$ с вероятностной массой $\hat{p}_1 = 2^\alpha\left(p_1\theta_1^\alpha + p_2\theta_2^\alpha\right)$. Будем различать два случая.

(a) $\theta_2 > c/(1+c)$. В этом случае мы должны показать, что

$$\int_{\frac{c}{1+c}}^{1} (\theta - c(1-\theta))^\alpha \, d\mu^*(\theta) - \int_{\frac{c}{1+c}}^{1} (\theta - c(1-\theta))^\alpha \, d\mu^{**}(\theta) \ge 0.$$

Левая часть равна

$$p_1(\theta_1 - c(1-\theta_1))^\alpha + p_2(\theta_2 - c(1-\theta_2))^\alpha - (1-c)^\alpha\left(p_1\theta_1^\alpha + p_2\theta_2^\alpha\right)$$
$$= p_1(\theta_1 - c(1-\theta_1))^\alpha + p_1\frac{\theta_1^\alpha - (1-\theta_1)^\alpha}{(1-\theta_2)^\alpha - \theta_2^\alpha}(\theta_2 - c(1-\theta_2))^\alpha$$
$$- p_1(1-c)^\alpha\left(\theta_1^\alpha + \theta_2^\alpha\frac{\theta_1^\alpha - (1-\theta_1)^\alpha}{(1-\theta_2)^\alpha - \theta_2^\alpha}\right),$$

поэтому надо показать, что

$$\frac{\left(1-c\left(\frac{1}{\theta_1}-1\right)\right)^\alpha-(1-c)^\alpha}{1-\left(\frac{1}{\theta_1}-1\right)^\alpha} \geq \frac{\left(1-c\left(\frac{1}{\theta_2}-1\right)\right)^\alpha-(1-c)^\alpha}{1-\left(\frac{1}{\theta_2}-1\right)^\alpha} \tag{6.2}$$

(ср. с методом, описанным в § 2). Поскольку функция $\frac{(1-cx)^\alpha-(1-c)^\alpha}{1-x^\alpha}$ убывает при $x<1$ и возрастает при $x>1$, получаем, что требуется лишь проверить (6.2) для $\theta_1=\theta_2=1/2$, для которого оно выполняется в силу того, что

$$\lim_{x\to 1}\frac{(1-cx)^\alpha-(1-c)^\alpha}{1-x^\alpha}=(1-c)^{\alpha-1}.$$

(b) $\theta_2=c/(1+c)$. В этом случае мы должны показать, что

$$\int\limits_{\frac{c}{1+c}}^{1}(\theta-c(1-\theta))^\alpha\,d\mu^*(\theta)-\int\limits_{\frac{c}{1+c}}^{1}(\theta-c(1-\theta))^\alpha\,d\mu^{**}(\theta)$$
$$=p_1(\theta_1-c(1-\theta_1))^\alpha-(1-c)^\alpha\left(p_1\theta_1^\alpha+p_2\left(\frac{c}{1+c}\right)^\alpha\right)$$
$$=p_1(\theta_1-c(1-\theta_1))^\alpha-p_1(1-c)^\alpha\left(\theta_1^\alpha+c^\alpha\frac{\theta_1^\alpha-(1-\theta_1)^\alpha}{1-c^\alpha}\right)\geq 0.$$

Это эквивалентно тому, что

$$\frac{\left(1-c\left(\frac{1}{\theta_1}-1\right)\right)^\alpha-(1-c)^\alpha}{1-\left(\frac{1}{\theta_1}-1\right)^\alpha} \geq \frac{(1-c)^\alpha c^\alpha}{1-c^\alpha}.$$

Левая часть снова будет наименьшей при $\theta_1=1/2$, и надо показать, что

$$(1-c)^{\alpha-1}\geq\frac{(1-c)^\alpha c^\alpha}{1-c^\alpha},$$

а это выполнено при $0<c<1$ и $\alpha>1$. $\square$

Лемма 6.5. *Пусть X лежит в максимальной области притяжения распределения Гумбеля с сопровождающей функцией $e(x)$. Предположим, что существует $0<c<1$ такое, что*

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\mathbb{P}(Y>cu)}{\mathbb{P}(X>u)}=1,$$

и пусть функция копулы (X,Y) лежит в максимальной области притяжения экстремальной копулы. Тогда копулой, асимптотически минимизирующей $\mathbb{P}(X-Y>u)$, будет комонотонная копула.

Доказательство. Имеем

$$\frac{\mathbb{P}(X>u+xe(u),\,Y>cu+yce(u))}{\mathbb{P}(X>u)}\to H(x,y).$$

Здесь $H(x,y)=H^*(e^x,e^y)$, где отвечающие H^* функции $R=x+y$ и $\theta=x/(x+y)$ независимы, R имеет плотность r^{-2} и для меры μ от θ выполнено

$$\int\limits_0^1\theta\,d\mu(\theta)=\int\limits_0^1 1-\theta\,d\mu(\theta)=1.$$

Для $b > 0$ получаем

$$\frac{\mathbb{P}(X - Y > (1-c)u + e(u),\ X > u - be(u))}{\mathbb{P}(X > u)} \to H(\{(x,y) \mid x - cy > 1,\ x > -b\})$$

при

$$H(\{(x,y) \mid x - cy > 1,\ x > -b\}) = \int\limits_0^1 \min\left(e^{-\frac{1}{1-c}}(1-\theta)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\frac{1}{1-c}}, e^b\right) d\mu(\theta).$$

Если $\mu(1) > 0$ и $N > 0$, то при $u \to \infty$

$$\begin{aligned}\frac{\mathbb{P}(X - Y > (1-c)u + e(u),\ X > u - be(u))}{\mathbb{P}(X > u)}& \\ \gtrsim \frac{\mathbb{P}(X > u - Ne(u)) - \mathbb{P}(X > u - Ne(u),\ Y > cu - (N+2)e(u))}{\mathbb{P}(X > u)}& \\ \sim e^N - \int\limits_0^1 \min(\theta e^N, (1-\theta)e^{c^{-1}(N+2)})\, d\mu(\theta) \geq e^N \mu(1) \to \infty&\end{aligned}$$

при $N \to \infty$. Отсюда при $b \to \infty$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X - Y > (1-c)u + e(u))}{\mathbb{P}(X > u)} \geq e^{-\frac{1}{1-c}} \int\limits_0^1 e^{-\frac{1}{1-c}}(1-\theta)\left(\frac{\theta}{1-\theta}\right)^{\frac{1}{1-c}} d\mu(\theta). \quad (6.3)$$

Заметим, что для X, Y, связанных комонотонной копулой, можно $\geq$ заменить знаком $=$. Наконец, мы должны найти μ, которая минимизирует (6.3). Будем опять рассматривать лишь случай, когда μ дискретна. Без ограничения общности предполагаем, что $\theta_1 > 1/2$ и $\theta_2 < 1/2$,

$$p_1\theta_1 + p_2\theta_2 = p_1(1-\theta_1) + p_2(1-\theta_2) = \frac{p_1 + p_2}{2},$$

и заменяем θ_1 и θ_2 на $\theta = 1/2$ с массой $p = p_1 + p_2$. Надо показать, что

$$p_1(1-\theta_1)\left(\frac{\theta_1}{1-\theta_1}\right)^{\frac{1}{1-c}} + p_2(1-\theta_2)\left(\frac{\theta_2}{1-\theta_2}\right)^{\frac{1}{1-c}} \geq p_1(1-\theta_1) + p_2(1-\theta_2).$$

Поскольку

$$p_2 = p_1 \frac{2\theta_1 - 1}{1 - 2\theta_2},$$

необходимо установить, что

$$\frac{1-\theta_1}{2\theta_1 - 1}\left(\left(1 + \frac{2\theta_1 - 1}{1-\theta_1}\right)^{\frac{1}{1-c}}\right) \geq \frac{1-\theta_2}{2\theta_2 - 1}\left(\left(1 + \frac{2\theta_2 - 1}{1-\theta_2}\right)^{\frac{1}{1-c}}\right)$$

или для $x_i = \frac{2\theta_i - 1}{1-\theta_i}$

$$\frac{(1+x_1)^{\frac{1}{1-c}} - 1}{x_1} \geq \frac{(1+x_2)^{\frac{1}{1-c}} - 1}{x_2},$$

что выполняется в силу $\frac{1}{1-c} > 1$ и $-1 < x_2 < 0 < x_1$. $\square$

Теорема 6.3 показывает, что если $X \in \mathscr{R}_{-\alpha}$ с показателем $\alpha < 1$, то комонотонная копула не минимизирует $\mathbb{P}(X - Y > u)$ асимптотически. С другой стороны, теорема 6.4 говорит о том, что при $\alpha > 1$ комонотонная копула минимизирует асимптотически $\mathbb{P}(X - Y > u)$. Тем не менее покажем, что дело в другом.

Поскольку хотим сравнить влияние различных копул на совместное распределение X и Y при фиксированных одномерных распределениях F_X и F_Y, определим для каждой копулы C меру $\mathbb{P}_C$, полагая

$$\mathbb{P}_C(X \le x,\, Y \le y) = C(F_X(x),\, F_Y(y)).$$

Свойство, состоящее в том, что комонотонная копула минимизирует асимптотически $\mathbb{P}(X - Y > u)$, можно иначе сформулировать так: для каждой функции копулы C

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}_C(X - Y > u)}{\mathbb{P}_M(X - Y > u)} \ge 1. \tag{6.4}$$

Ввиду предложения 7.1 (см. ниже) можно предполагать, что для величины X с правильно меняющимся распределением существует контрпример к свойству (6.4), если $\overline{F}_X(x) \approx c\overline{F}_Y(x)$ для некоторого $0 < c < 1$. Поэтому выберем $F_Y(x) = F_X(2x)$, т. е. $2Y \overset{d}{=} X$. Пусть X лежит в максимальной области притяжения распределения экстремальных значений. Будем использовать следующий вид зависимости.

Определение 6.6. Для случайной величины X с функцией распределения F_X и сопровождающей функцией $e(u)$ зададим $u_n = u_{n-1} + 2e(2u_{n-1})$, где $u_1 > 0$ и $F(u_1) > 0$, вместе с соответствующим разбиением $(J_i)_{n\ge1}$ интервала $[0,1]$ $(n \ge 1)$:

$$J_1 = [0, F(2u_1)),$$

$$J_{2n} = [F(2u_n), F(2(u_n + e(2u_n)))), \quad J_{2n+1} = [F(2(u_n + e(2u_n))), F(2u_{n+1})).$$

Определим последовательность копул $(C_n)_{n\ge1}$ так:

$$C_{2n}(u,v) = uv \quad \text{и} \quad C_{2n+1}(u,v) = \min(u,v).$$

Окончательно определим копулу $\overline{C}$ как ординальную сумму копул $(C_n)_{n\ge1}$ по разбиению $(J_i)_{n\ge1}$.

Замечание 6.7. Если $2Y \overset{d}{=} X$ и X, Y зависимы согласно копуле из определения 6.6, то для $0 \le Y < u_1$ и $u_n + e(2u) \le Y < u_{n+1}$ выполнено $2Y = X$. Более того, для $n \ge 1$

$$\mathbb{P}(X \le x \mid u_n \le Y < u_n + e(2u_n)) = \mathbb{P}(X \le x \mid 2u_n \le X < 2u_n + 2e(2u_n)).$$

Предложение 6.8. *Пусть X лежит в максимальной области притяжения распределения экстремальных значений и плотность распределения f_X обладает свойством*

$$\lim_{u\to\infty} \frac{f_X(u + xe(u))}{f_X(u)} = g(x) = \begin{cases} (1+x)^{-\alpha} & \overline{F}_X(x) \in \mathscr{R}_{-\alpha},\ \alpha > 0, \\ e^{-x} & X \in MDA(\Lambda). \end{cases}$$

Предположим, что $2Y \overset{d}{=} X$ и X, Y зависимы согласно копуле из определения 6.6. Тогда

$$\liminf_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}_{\overline{C}}(X - Y > u)}{\mathbb{P}_M(X - Y > u)} < 1.$$

Доказательство. Без ограничения общности предположим, что $e(x)$ монотонна. Для каждого n имеем

$$\mathbb{P}(X-Y>u_n)=\mathbb{P}(X-Y>u_n,Y\le u_n)$$
$$+\,\mathbb{P}(X-Y>u_n,u_n<Y\le u_n+e(2u_n))+\mathbb{P}(X-Y>u_n,u_n+e(2u_n)<Y).$$

Теперь можно легко проверить, что

$$\mathbb{P}(X-Y>u_n,Y\le u_n)=0$$

и

$$\mathbb{P}(X-Y>u_n,u_n+e(2u_n)<Y)\le \mathbb{P}(Y>u_n+e(2u_n)).$$

С другой стороны,

$$\mathbb{P}(X-Y>u_n,u_n<Y\le u_n+e(2u_n))$$
$$=\int\limits_{u_n}^{u_n+e(2u_n)}\mathbb{P}(X>u_n+y\mid 2u_n<X\le 2(u_n+e(2u_n)))f_Y(y)\,dy$$
$$=e(2(u_n))\int\limits_0^1\mathbb{P}(X>2u_n+ye(2u_n)\mid 2u_n<X\le 2(u_n+e(2u_n)))$$
$$\times f_Y(u_n+ye(2u_n))\,dy.$$

Заметим, что

$$\mathbb{P}(X>2u_n+ye(2u_n)\mid 2u_n<X\le 2(u_n+e(2u_n)))$$
$$=\frac{\mathbb{P}(X>2u_n+ye(2u_n))-\mathbb{P}(X>2u_n+e(2u_n))}{\mathbb{P}(X>2u_n)-\mathbb{P}(X>2u_n+e(2u_n))}\to\frac{g(y)-g(1)}{g(0)-g(1)}<1,\quad y>0,$$

при $n\to\infty$. Как следует из

$$\frac{f_Y(u_n+ye(2u_n))}{f_Y(u_n)}=\frac{f_X(2u_n+2ye(2u_n))}{f_X(2u_n)}\to g(2y),$$

выполнено

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(X-Y>u_n,\,u_n<Y\le u_n+e(2u_n))}{\mathbb{P}(u_n<Y\le u_n+e(2u_n))}<1$$

и, следовательно,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathbb{P}(X-Y>u_n)}{\mathbb{P}(Y>u_n)}<1.\quad\square$$

Пример 6.9. В качестве примера рассмотрим $\mathbb{P}(X>x)=\mathbb{P}(2Y>x)=1/x$ с функцией $e(x)=x$ и $u_n=5^n$. На рис. 1 изображен график $\frac{\mathbb{P}_{\overline{C}}\left(X-Y>\frac{1}{2}10^x\right)}{\mathbb{P}_M\left(X-Y>\frac{1}{2}10^x\right)}$.

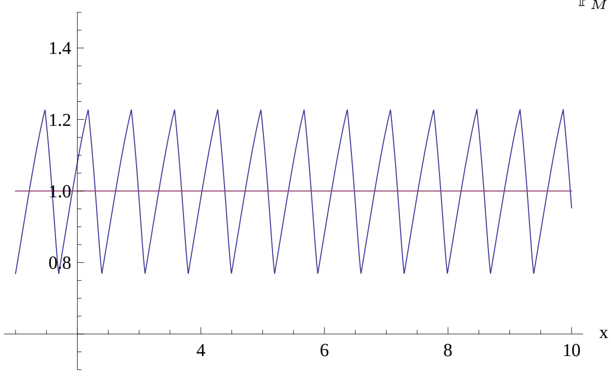

Рис. 1.

Убедившись, что наихудший вариант не всегда дается комонотонной копулой, займемся выявлением наихудшего варианта (при данной конкретной u вместо $u \to \infty$). Для этой цели используем прямые перемешивания M. Поскольку перемешивания плотны в множестве копул, хотим найти перемешивание, минимизирующее $\mathbb{P}(X - Y > u)$. Для данных F_X, F_Y и u определим

$$g_u(x) = \begin{cases} \inf\{t : F_Y^{-1}(t) \geq F_X^{-1}(x) - u\}, & \text{если } F_X^{-1}(x) > u, \\ 0 & \text{иначе.} \end{cases} \tag{6.5}$$

Для равномерно распределенных (U_1, U_2) с такой же функцией копулы C, как у (X, Y), справедливо

$$\mathbb{P}(U_2 < g_u(U_1)) = \mathbb{P}(X - Y > u).$$

Лемма 6.10. *Пусть $g(x)$ — возрастающая функция такая, что для всех $c \in [-1, 1]$ количество перемен знака разности $g(x) - x - c$ конечно. Тогда перемешивание M_s^*, минимизирующее $\mathbb{P}_{M_s}(U_2 < g(U_1))$, строится по $\mathscr{J} = \{[0, x_0], [x_0, 1]\}$ и $\pi = (2, 1)$ для некоторого $0 < x_0 < 1$.*

Доказательство. Пусть M_s — перемешивание на конечном разбиении $\mathscr{J}$ с перестановкой π. Для $J \in \mathscr{J}$ и $x \in J$ обозначим через J^π и x^π интервал, соответственно точку, в которые интервал J и точка x переходят под действием перестановки. Без ограничения общности предположим, что для каждого $J \in \mathscr{J}$

$$\frac{\mathbb{P}(U_1 \in \{x^\pi : x \in J \& x < g(x^\pi)\})}{\mathbb{P}(U_1 \in \{x^\pi : x \in J\})} \in \{0, 1\}.$$

Положим $x_0 = \mathbb{P}_{M_s}(U_2 < g(U_1))$. Без ограничения общности можно считать, что $(J \cap [0, x_0]) \in \{\varnothing, J\}$ для любого $J \in \mathscr{J}$. Далее мы можем разделить интервалы в разбиении $\mathscr{J}$ так: каждому интервалу $J \in \mathscr{J}$, для которого $\mathbb{P}(U_1 \in \{x^\pi : x \in J \& x < g(x^\pi)\}) = \mathbb{P}(U_1 \in \{x^\pi : x \in J\})$, сопоставим единственный интервал $\widehat{J}$ такой, что $\widehat{J} \cap [0, x_0] = \widehat{J}$ и $|J| = |\widehat{J}|$. Если изменим место J и $\widehat{J}$ в перестановке, то $\mathbb{P}(U_2 < g(U_1))$ будет одинаковой для этих двух перемешиваний. Следовательно, можно предполагать, что если $\mathbb{P}(U_1 \in \{x^\pi : x \in J \& x < g(x^\pi)\}) = \mathbb{P}(U_1 \in \{x^\pi : x \in J\})$, то $J \subset [0, x_0]$. Поскольку $g(x)$ возрастает, можно переупорядочить разбиение и получить тот вид M_s^*, из которого следует утверждение леммы. □

Наихудшая копула не единственна, как явно показывает

Лемма 6.11. *Пусть $g(x)$ возрастает, и пусть $x_1 = \inf\{x : x \geq g(x)\}$. Если $x_1 < 1 - x_0$ для некоторого x_0, то для перемешиваний $M_s(\{[0, x_0], [x_0, 1]\}, (2, 1))$ и $\widehat{M}_s(\{[0, x_1], [x_1, x_1 + x_0], [x_1 + x_0, 1]\}, (1, 3, 2))$ выполнено*

$$\mathbb{P}_{M_s}(U_2 < g(U_1)) \geq \mathbb{P}_{\hat{M}_s}(U_2 < g(U_1)).$$

Если $x_1 \geq 1 - x_0$, то

$$\mathbb{P}_{M_s}(U_2 < g(U_1)) \geq \mathbb{P}_M(U_2 < g(U_1)).$$

Пример 6.12. Пусть $F_X(x) = 1 - 1/x$, $F_Y(x) = 1 - 1/(2x)$ и $u = 1$. В этом случае рис. 2 показывает носитель копулы из леммы 6.10 (толстая линия), где $x_0 \approx 0.086$. На рис. 3 толстая линия изображает носитель копулы из леммы 6.11, где $x_0 \approx 0.086$ и $x_1 = 0.5$. На этих рисунках пунктирная линия отвечает функции $g_u(x)$. Здесь

$$x_0 = x_0^* = \sup_{0 \leq x \leq 1} g_u(x) - x. \quad \square \tag{6.6}$$

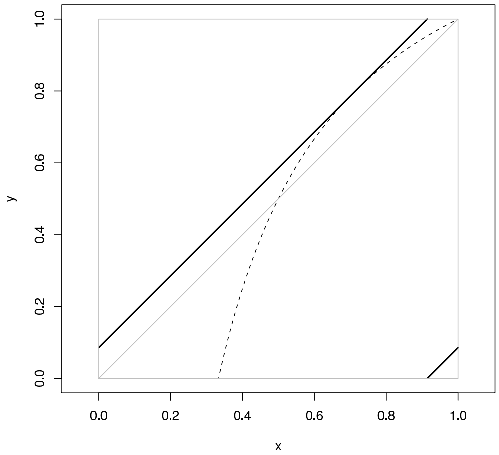

Рис. 2. Копула в наихудшем случае.

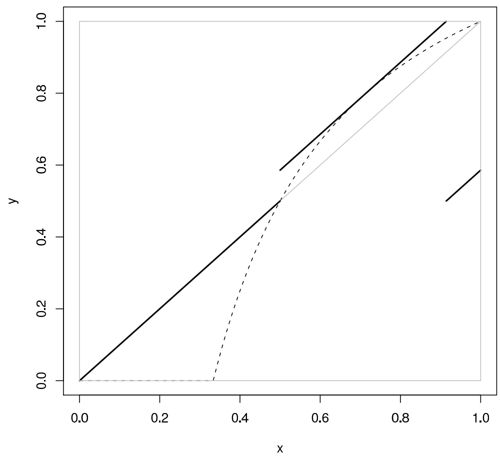

Рис. 3. Другая копула для наихудшего случая.

На самом деле выбор $x_0 = x_0^*$ в (6.6) в целом оптимален, что может быть проверено благодаря следующим соображениям: если $x_0 > x_0^*$, то прямая $x+x_0$, отвечающая интервалу $[x_0, 1]$, проходит выше линии $g_u(x)$. Следовательно, можно уменьшить x_0 до x_0^* так, чтобы прямая $x + x_0^*$ коснулась линии $g_u(x)$; разумеется, $\mathbb{P}_{M_s}(U_2 < g_u(U_1))$ при этом не увеличится. Если же $x_0 < x_0^*$ и для точки x^* выполнено $x_0^* = g_u(x^*) - x^*$, то из монотонности $g_u(x)$ следует, что участок прямой $x + x_0$ от x^* до $g_u(x^*) - x_0$ проходит ниже $g_u(x)$. Поскольку этот участок прямой имеет длину $g_u(x^*) - x_0 - x^* = x_0^* - x_0$, видим, что использованием x_0^* вместо x_0 мы не увеличим вероятность $\mathbb{P}_{M_s}(U_2 < g_u(U_1))$. Далее, если $x^* > 1/2$, то прямая, отвечающая промежутку $[0, x_0]$, лежит ниже $g_u(x)$. Таким образом, мы доказали следующее

Предложение 6.13. *Пусть условия леммы* 6.10 *выполнены и u достаточно велико, чтобы x^*, для которого*

$$g_u(x^*) - x^* = \sup_{0 \le x \le 1} g_u(x) - x,$$

удовлетворяло неравенству $x^* > 1/2$. Тогда

$$\inf_C \mathbb{P}_C(X - Y > u) = \sup_{0\le x\le 1} g_u(x) - x.$$

Сравним этот результат с комонотонной копулой. Для этого предположим, что существует единственная точка γ_u такая, что $g_u(x) - x \le 0$ при $x < \gamma_u$ и $g_u(x) - x > 0$ при $x > \gamma_u$, тогда $\mathbb{P}_M(X - Y > u) = 1 - \gamma_u$ и

$$\inf_C \mathbb{P}_C(X - Y > u) = \mathbb{P}_M(X - Y > u) \sup_{0\le x\le 1} \frac{g_u(\gamma_u + x(1-\gamma_u)) - \gamma_u - x(1-\gamma_u)}{1-\gamma_u}$$
$$= \sup_{0\le x\le 1} (g_u(\gamma_u + x(1-\gamma(u))) - \gamma_u - x(1-\gamma_u)).$$

Если функция

$$h_u(x) = \frac{g_u(\gamma_u + x(1-\gamma_u)) - \gamma_u - x(1-\gamma_u)}{1-\gamma_u}$$

сходится при $u \to \infty$ к функции $h_\infty(x)$, для которой $\sup\limits_{0<x<1} h_\infty(x) = 1$ (т. е. $h_\infty(x) = 1 - x$), то для любой копулы C выполнено (6.4). С другой стороны, если существует последовательность u_n, для которой $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = \infty$ и $\limsup\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{0<x<1} h_{u_n}(x) < 1$, то можно аналогично тому, как это делалось в предложении 6.8, построить копулу, для которой (6.4) не выполнено. Следующий пример показывает именно эту ситуацию для X с распределением Вейбулла и Y, имеющим распределение с тонким хвостом.

Пример 6.14. Пусть $F_X(x) = 1 - e^{-x^\beta}$ $(1/2 < \beta < 1)$ и $F_Z(x) = 1 - e^{-\frac{(1+\varepsilon)\beta^2}{2\beta-1}x^{2-1/\beta}}$. Положим $u_0 = 0$, $u_n = 2^n$ и

$$F_Y(x) = 1 - e^{-u_n} + \frac{F_Z(x) - F_Z(u_n)}{F_Z(u_{n+1}) - F_Z(u_n)}(e^{-u_n} - e^{-u_{n+1}}), \quad u_n \le x < u_{n+1}.$$

Поскольку при $x > 2$

$$\frac{\overline{F}_Y(x)}{e^{-x/2}} \le \frac{\overline{F}_y(u_n)}{e^{-u_{n+1}/2}} = 1,$$

видим, что распределение Y имеет тонкий хвост. Далее, для $u = u_n^{1/\beta} - u_n$ получаем $\gamma_u = (1-e^{-u_n})$, и поскольку $F_Y(x) \le 1-e^{-x}$, у уравнения $F_Y(F_X^{-1}(x) - u) = x$ нет корней слева от γ_u. Имеем

$$h_u(x) = 1 - x - \frac{\overline{F}_Y((u_n - \log(1-x))^{1/\beta} - u^{1/\beta} + u_n)}{e^{-u_n}},$$

так как при $n \to \infty$

$$(u_n - \log(1-x))^{1/\beta} - u^{1/\beta} + u_n = u_n + (1+o(1))\frac{(-\log(1-x))}{\beta}u_n^{1/\beta-1} \le 2u_n = u_{n+1}.$$

Получаем

$$\frac{\overline{F}_Y((u_n - \log(1-x))^{1/\beta} - u^{1/\beta} + u_n)}{e^{-u_n}}$$
$$= 1 - \frac{\overline{F}_Z\big(u_n + (1+o(1))\frac{(-\log(1-x))}{\beta}u_n^{1/\beta-1}\big) - \overline{F}_Z(u_n)}{\overline{F}_Z(u_{n+1}) - \overline{F}_Z(u_n)}(1 - e^{-u_n})$$
$$\sim \frac{\overline{F}_Z\big(u_n + \frac{(-\log(1-x))}{\beta}u_n^{1/\beta-1}\big)}{\overline{F}_Z(u_n)} \sim (1-x)^{1+\varepsilon}.$$

Следовательно, $h_{u_n}(x) \to (1-x)(1-(1-x)^\varepsilon)$ при $n \to \infty$.

§ 7. Почти правильно меняющееся распределение X

Предложение 7.1. *Если X имеет почти правильно меняющееся распределение и $\overline{F}_Y(u) = o(\overline{F}_X(u))$, то (1.1) выполнено.*

Доказательство. Мы должны показать, что существует неотрицательная функция $\delta(u) = o(u)$, удовлетворяющая (5.1), поскольку такая функция $\delta(u)$ также удовлетворяет (2.1). Сначала заметим, что для любого $c > 0$ найдется b_c такое, что

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\overline{F}_X(cu)}{\overline{F}_X(u)} \le b_c.$$

Следовательно, для каждого n существует $\hat{u}_n$ такое, что при всех $u > \hat{u}_n$

$$\frac{\mathbb{P}(Y > u)}{\mathbb{P}(X > nu)} \le \frac{1}{n}.$$

Положим $u_0 = 0$ и $u_n = \max(n\hat{u}_n, u_{n-1}) + 1$ для $n > 0$. Тогда для всех $u > u_n$

$$\frac{\mathbb{P}(Y > u/n)}{\mathbb{P}(X > u)} \le \frac{1}{n}.$$

Определим

$$\varepsilon(u) = \begin{cases} 1, & u < u_1, \\ \frac{1}{n}, & u_n < u < u_{n+1}. \end{cases}$$

Тогда для $\delta(u) = \varepsilon(u)u$ имеем

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y > \delta(u))}{\mathbb{P}(X > u)} = 0. \quad \square$$

Опишем подход, основанный на локальных предельных теоремах. Используем локальные предельные теоремы, как в [22], для выяснения асимптотического поведения $\mathbb{P}(X - Y > u)$. Пусть либо $E = [-\infty, \infty] \times (-\infty, \infty])$ $(e(u)/u \to 0)$, либо $E = [-\infty, \infty] \times (-1, \infty])$ $(e(u) = u)$. Далее предполагаем, что существует мера μ (не равная нулю), для которой при любом фиксированном y из $\mathbb{E}$

- $\mu([-\infty, x], (y, \infty])$ — невырожденная функция распределения по x,
- $\mu([-\infty, x], (y, \infty]) < \infty$,
- $\lim\limits_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y \le \beta(u) + x\alpha(u), X > u + ye(u))}{\mathbb{P}(X > u)} = \mu([-\infty, x], (y, \infty])$ в каждой точке непрерывности (x, y) предела.

Предположим, что $\alpha(u)/e(u) \to c$ для некоторой постоянной c, тогда будем иметь, что

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(X - Y > u - \beta(u))}{\mathbb{P}(X > u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}\left(\frac{X-u}{e(u)} - \frac{\alpha(u)}{e(u)} \cdot \frac{Y-\beta(u)}{\alpha(u)} > 0, \frac{X-u}{e(u)} > 0\right)}{\mathbb{P}(X > u)}$$
$$= \mu(\{(y, x) \mid x - cy > 0,\ x > 0\}) \le 1,$$

по крайней мере если μ в достаточной степени непрерывна. Область, которую хотим измерить, изображена на рис. 4.

Имеем

$$\frac{\mathbb{P}(X - Y > u)}{\mathbb{P}(X > u)} \sim \frac{\mathbb{P}(X > u)}{\mathbb{P}(X > u - \beta(u))} \mu(\{(y, x) \mid x - cy > 0,\ x > 0\}).$$

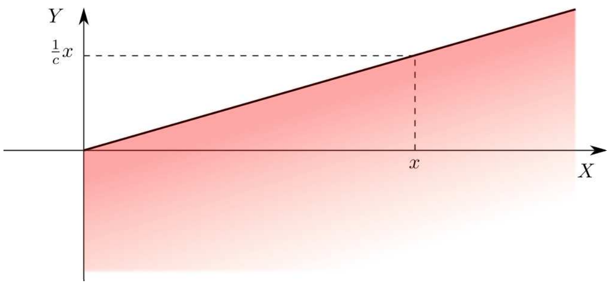

Рис. 4. Область измерения (закрашена).

Если (1.1) выполнено, мы должны предположить, что $\beta(u)/e(u) \to 0$ и $c = 0$ (т. е. $\alpha(u)/e(u) \to 0$). Однако отметим, что для каждого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y \le \varepsilon e(u), X > u)}{\mathbb{P}(X > u)} = \lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}\big(Y \le \beta(u) + \frac{\varepsilon e(u)-\beta(u)}{\alpha(u)}\alpha(u), X > u\big)}{\mathbb{P}(X > u)}$$
$$\ge \lim_{u\to\infty} \frac{\mathbb{P}(Y \le \beta(u) + b\alpha(u), X > u)}{\mathbb{P}(X > u)} = \mu([-\infty, b) \times \mu(0,\infty]) \to 1$$

при $b \to \infty$. Следовательно, условия предложения 3.1 выполнены, и нет необходимости использовать локальные предельные теоремы, чтобы установить (1.1).

ЛИТЕРАТУРА

1. *Albrecher H., Asmussen S., Kortschak D.* Tail asymptotics for the sum of two heavy-tailed dependent risks // Extremes. 2006. V. 9. P. 107–130.

2. *Mitra A., Resnick S.* Aggregation of rapidly varying risks and asymptotic independence // Adv. Appl. Probab. 2009. V. 41. P. 797–828.

3. *Ko B., Tang Q.* Sums of dependent nonnegative random variables with subexponential tails // J. Appl. Probab. 2008. V. 45. P. 85–94.

4. *Kortschak D., Albrecher H.* Asymptotic results for the sum of dependent non-identically distributed random variables // Methodol. Comput. Appl. Probab. 2009. V. 11. P. 279–306.

5. *Foss S., Richards A.* On sums of conditionally independent subexponential random variables // Math. Oper. Res. 2010. V. 35. P. 102–119.

6. *Asmussen S., Albrecher H.* Ruin probabilities (2nd ed.). Singapore: World Sci., 2010.

7. *Albrecher H., Teugels J.* Exponential behavior in the presence of dependence in risk theory // J. Appl. Probab. 2006. V. 43. P. 257–273.

8. *Boudreault M., Cossette H., Landriault D., Marceau E.* A risk model with dependence between interclaim arrivals and claim sizes // Scand. Actuar. J. 2006. P. 265–285.

9. *Asimit A. V., Badescu A. L.* Extremes on the discounted aggregate claims in a time dependent risk model // Scand. Actuar. J. 2010. P. 93–104.

10. *Li J., Tang Q., Wu R.* Subexponential tails of discounted aggregate claims in a time-dependent renewal risk model // Adv. Appl Probab. 2010. V. 42. P. 1126–1146.

11. *Albrecher H., Boxma O. J.* A ruin model with dependence between claim sizes and claim intervals. // Insur. Math. Econ. 2004. V. 35. P. 245–254.

12. *Asmussen S., Biard R.* Ruin probabilities for a regenerative Poisson gap generated risk process // Eur. Act. J. 2011. V. 1. P. 3–22.

13. *Jelenković P., Momcilović P., Zwart B.* Reduced load equivalence under subexponentiality // QUESTA. 2004. V. 46. P. 97–112.

14. *Cline D. B. H.* Intermediate regular and Π variation. // Proc. London Math. Soc. 1994. V. 68. P. 594–616.

15. *Robert C. Y., Segers J.* Tails of random sums of a heavy-tailed number of light-tailed terms // Insur. Math. Econ. 2008. V. 43. P. 85–92.

16. *Foss S., Korshunov D., Zachary S.* An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions. New York: Springer-Verl., 2011.

17. *Resnick S. I.* Extreme values, regular variation, and point processes. New York: Springer-Verl., 1987.

18. *Galambos J.* The asymptotic theory of extreme order statistics. Melbourne, FL: Robert E. Krieger Publ. Co. Inc., 1987.

19. *Bingham N. H., Goldie C. M., Teugels J. L.* Regular variation. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. (Encyclop. Math. Appl.; V. 27).

20. *Nelsen R. B.* An introduction to copulas. New York: Springer-Verl., 1999.

21. *Mikusiński P., Sherwood H., Taylor M. D.* Probabilistic interpretations of copulas and their convex sums // Advances in probability distributions with given marginals (Rome, 1990). Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1991. P. 95–112. (Math. Appl.; V. 67).

22. *Heffernan P., Resnick S.* Limit laws for random vectors with an extreme component // Ann. Appl. Probab. 2007. V. 17. P. 537–571.

Статья поступила 29 сентября 2011 г.

Hansjörg Albrecher (Альбрехер Ханс)
Department of Actuarial Science,
Faculty of Business and Economics, University of Lausanne,
Quartier UNIL-Dorigny, Batiment Extranef,
CH-1015 Lausanne, Switzerland;
Swiss Finance Institute, Switzerland
`hansjoerg.albrecher@unil.ch`

Søren Asmussen (Асмуссен Сорен)
Department of Mathematical Sciences,
Aarhus University,
Ny Munkegade, DK-8000 Aarhus C, Denmark
`asmus@imf.au.dk`

Dominik Kortschak (Корчак Доминик)
Department of Actuarial Science,
Faculty of Business and Economics, University of Lausanne,
Quartier UNIL-Dorigny, Batiment Extranef,
CH-1015 Lausanne, Switzerland
or
Université de Lyon, Université Claude Bernard Lyon 1,
Institut de Science Financière et d'Assurances,
50, Avenue Tony Garnier, F-69007 Lyon, France
`kortschakdominik@gmail.com`