Сибирский математический журнал
Ноябрь—декабрь, 2012. Том 53, № 6

УДК 512.552.16

ЦЕНТРАЛИЗАТОРЫ ОБОБЩЕННЫХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ ПОЛИЛИНЕЙНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ ПЕРВИЧНЫХ КОЛЕЦ

Л. Карини, В. де Филиппис

Аннотация. Пусть R — первичное кольцо характеристики не 2 с кольцом частных Утуми U и обобщенным центроидом C, δ — ненулевое дифференцирование кольца R, G — ненулевое обобщенное дифференцирование R, $f(x_1,\dots,x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над C. Если $\delta(G(f(r_1,\dots,r_n))f(r_1,\dots,r_n))=0$ для всех $r_1,\dots,r_n\in R$, то $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R; более того, существует $a\in U$ такой, что $G(x)=ax$ для всех $x\in R$, а δ — внутреннее дифференцирование R такое, что $\delta(a)=0$.

Ключевые слова: первичное кольцо, дифференциальные тождества, обобщенные дифференцирования

1. Введение

Пусть R — первичное кольцо характеристики не 2 с центром $Z(R)$, кольцом частных Утуми U и обобщенным центроидом C. Один из подходов к получению информации о структуре кольца R — это изучение подходящих условий на подмножества $T=\{G(s)s/s\in S\}$ и $V=\{sG(s)/s\in S\}$, где S — некоторое подмножество R, а G — аддитивное отображение на R.

В [1, теорема 2] показано, что если G — ненулевое дифференцирование R и $S=\{f(x_1,\dots,x_n)/x_1,\dots,x_n\in R\}$ для нецентрального многочлена $f(x_1,\dots,x_n)$ над C такие, что $T\subseteq Z(R)$ (соответственно $V\subseteq Z(R)$), то $\mathrm{char}(R)=2$ и R удовлетворяет стандартному тождеству степени 4.

Позднее мы обобщили предыдущий результат на случай $\mathrm{char}(R)\neq 2$. Более точно, в [2] мы доказали, что если $V_m=\{sG(s)^m/s\in S\}$, где $m\geq 1$ — положительное целое число и $S=\{f(x_1,\dots,x_n)/x_1,\dots,x_n\in I\}$ для ненулевого правого идеала I в R, то $V_m\subseteq Z(R)$ влечет, что либо $f(x_1,\dots,x_n)$ централен на $eRCe$ для подходящего идемпотента $e\in\mathrm{Soc}(RC)$, либо $G(I)I=0$.

Возможный подход, который может быть использован при изучении T (или V), состоит в том, чтобы оценить его мощность, а разумный критерий для описания T состоит в оценке его левого аннулятора $L(T)=\{x\in R,\ xt=0\ \forall t\in T\}$ и централизатора $C(T)=\{x\in R,\ [x,t]=0\ \forall t\in T\}$: если T является большим, мы должны ожидать, что $L(T)=0$ и $C(T)=Z(R)$.

Недавно в [3] Аргас и Демир изучили $L(T)$ в случае, когда G является обобщенным дифференцированием R и $S=\{f(x_1,\dots,x_n)/x_1,\dots,x_n\in I\}$ для нецентрального полилинейного многочлена $f(x_1,\dots,x_n)$ над C и ненулевого правого идеала I в R. Они показали, что если $a\in L(T)$, то справедливо одно из следующих утверждений: либо $aI=0$; либо $G(x)=qx$ и $aqI=0$; либо

$G(x) = bx + [c, x]$ и $[c, I]I = abI = 0$ или $a(b + c)I = 0$; либо $f(x_1, \dots, x_n)$ централен на $eRCe$ для подходящего идемпотента $e \in \mathrm{Soc}(RC)$.

В частности, когда $I = R$, предыдущий результат означает, что $L(T) = 0$, если только не $G(x) = cx$ и $L(T)c = (0)$.

Мы продолжаем это направление исследования, изучая централизатор T в случае, когда $S = \{f(x_1, \dots, x_n)/x_1, \dots, x_n \in R\}$. Более точно, мы доказываем следующую теорему.

Теорема. *Пусть R — первичное кольцо характеристики не 2 с кольцом частных Утуми U и обобщенным центроидом C, δ — ненулевое дифференцирование R, G — ненулевое обобщенное дифференцирование R, $f(x_1, \dots, x_n)$ — нецентральный полилинейный многочлен над C. Если $\delta(G(f(r_1, \dots, r_n))f(r_1, \dots, r_n)) = 0$ для всех $r_1, \dots, r_n \in R$, то $f(x_1, \dots, x_n)^2$ централен на R; более того, существует $a \in U$ такой, что $G(x) = ax$ для всех $x \in R$, а δ является внутренним дифференцированием R таким, что $\delta(a) = 0$.*

2. Матричный случай и внутренние обобщенные дифференцирования

Изучим случай, когда $R = M_m(F)$ — алгебра $m \times m$-матриц над полем F. Предположим, что существуют a, c, q из R такие, что $a(cx+xq)x-(cx+xq)xa = 0$ для всех $x \in f(R)$. Заметим, что множество $f(R) = \{f(r_1, \dots, r_n) : r_1, \dots, r_n \in R\}$ инвариантно при действии внутренних автоморфизмов R. Как обычно, обозначим через e_{ij} матричную единицу с 1 на (i, j)-позиции и нулями вне ее, а через I — единичную матрицу в R. Здесь докажем, что в случае $m \geq 3$ справедливо одно из следующих утверждений:

• q — центральная матрица, $a(c + q) = (c + q)a$ и $f(x_1, \dots, x_n)^2$ централен на R;

• a — центральная матрица;

• $c = -q$ — центральные матрицы.

Для того чтобы доказать этот результат, будем неявно использовать следующие простые замечания.

Замечание 1. Для любого внутреннего автоморфизма φ алгебры $M_m(F)$ справедливо

$$0 = \varphi(a(cs + sq)s - (cs + sq)sa) = \varphi(a)(\varphi(c)s + s\varphi(q))s - (\varphi(c)s + s\varphi(q))s\varphi(a)$$

для всех $s \in f(R)$, поскольку $f(R)$ инвариантно относительно действия всех внутренних автоморфизмов R.

Очевидно, что

• a, c и q — центральные матрицы тогда и только тогда, когда $\varphi(a)$, $\varphi(c)$ и $\varphi(q)$ центральны;

• $c + q = 0$ тогда и только тогда, когда $\varphi(c) + \varphi(q) = 0$.

Следовательно, чтобы доказать наш результат, мы можем заменить a, c, q соответственно на $\varphi(a)$, $\varphi(c)$, $\varphi(q)$.

Замечание 2. Матричная единица e_{kl} лежит в $f(R)$ для всех $k \neq l$.

Нам также нужна следующая лемма (см. доказательство в лемме 1.5 из [4]).

Лемма 1. *Пусть K — бесконечное поле и $m \geq 2$. Если $A_1, \dots, A_k$ — нескалярные матрицы из $M_m(K)$, то существует обратимая матрица $Q \in M_m(F)$ такая, что все элементы каждой матрицы $QA_1Q^{-1}, \dots, QA_kQ^{-1}$ ненулевые.*

Лемма 2. *Пусть K — бесконечное поле, $R = M_m(K)$ — алгебра $m \times m$-матриц над K, $Z(R)$ — центр R и $S = f(R)$. Предположим, что существуют $a, b \in R$ такие, что $a(bs^2) - (bs^2)a = 0$ для всех $s \in S$. Если $f(x_1, \dots, x_n)^2$ нецентрален на R, то либо $a \in Z(R)$, либо $b = 0$.*

Доказательство. Пусть A — аддитивная подгруппа в R, порожденная множеством

$$f(R)^2 = \{f(x_1, \dots, x_n)^2 : x_1, \dots, x_n \in R\}.$$

В [5] доказано, что если характеристика R не 2 и $f(x_1, \dots, x_n)^2$ нецентрален на R, то A содержит нецентральный лиев идеал L алгебры R. Более того, известно, что в случае характеристики не 2 существует нецентральный идеал I в R такой, что $[I, R] \subseteq L$. Таким образом, в случае, когда R является матричным кольцом, $a(bx) - (bx)a = 0$ для всех $x \in [R, R]$. По лемме 1.6 из [4] либо $a \in Z(R)$, либо $b \in Z(R)$, если только не $m = 2$, т. е. $R = M_2(K)$.

В случае $b \in Z(R)$ имеем $b(ax - xa) = 0$ для всех $x \in [R, R]$. Следовательно, либо $b = 0$, либо $ax - xa = 0$ для всех $x \in [R, R]$, что снова влечет $a \in Z(R)$.

В итоге предположим, что $R = M_2(K)$ и a нецентральна. По замечанию 1 и лемме 1 существует обратимая матрица $Q \in M_m(K)$ такая, что все элементы $QaQ^{-1} = a'$ ненулевые. Обозначим $a' = \sum\limits_{kl} a'_{kl} e_{kl}$ и $b' = \sum\limits_{kl} b'_{kl} e_{kl}$ для подходящих a'_{kl} и b'_{kl} из K, сопряженных элементам a, b. Естественно, что $a'(b'x) - (b'x)a' = 0$ для всех $x \in [R, R]$. Зафиксируем $x = e_{12} \in [R, R]$. Тогда $0 = a'(b'x) - (b'x)a' = a'b'e_{12} - b'e_{12}a'$ и, умножая справа на e_{11}, получаем $-b'e_{12}a'e_{11} = 0$, откуда либо $a'_{21} = 0$, либо $b'_{11} = b'_{21} = 0$. Аналогично при $x = e_{21}$ вычислениями также получаем, что либо $a'_{12} = 0$, либо $b'_{22} = b'_{12} = 0$. Поскольку $a'_{12} \neq 0$ и $a'_{21} \neq 0$, то $b' = 0$, т. е. также $b = 0$. $\square$

Лемма 3. *Пусть F — поле, $R = M_m(F)$ — алгебра $m \times m$-матриц над F, $Z(R)$ — центр R и $S = f(R)$. Предположим, что существуют $a, c, q \in R$ такие, что $a(cx + xq)x - (cx + xq)xa = 0$ для всех $x \in S$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений*:

- $a \in Z(R)$;
- $c = -q \in Z(R)$;
- $q \in Z(R)$, $a(c + q) = (c + q)a$, а $f(x_1, \dots, x_n)^2$ *централен на* R.

Доказательство. Во-первых, предположим, что F бесконечно. Пусть $a = \sum\limits_{kl} a_{kl} e_{kl}$, $c = \sum\limits_{kl} c_{kl} e_{kl}$ и $q = \sum\limits_{kl} q_{kl} e_{kl}$ для подходящих a_{kl}, c_{kl} и q_{kl} из F.

Для того чтобы доказать настоящую лемму, предполагаем, что a и q не являются центральными.

По замечанию 1 и лемме 1 существует обратимая матрица $Q \in M_m(F)$ такая, что $QqQ^{-1} = q'$ и $QaQ^{-1} = a'$ имеет все элементы ненулевые. Обозначим $a' = \sum\limits_{kl} a'_{kl} e_{kl}$, $c' = \sum\limits_{kl} c'_{kl} e_{kl}$ и $q' = \sum\limits_{kl} q'_{kl} e_{kl}$ для подходящих a'_{kl}, c'_{kl} и q'_{kl} из F, сопряженных элементам a, c, q. Конечно, $a'(c'x + xq')x - (c'x + xq')xa' = 0$ для всех $x \in S$.

Поскольку $f(x_1, \dots, x_n)$ нецентрален, по [6] существуют $u_1, \dots, u_n \in M_m(F)$ и $\alpha \in F - \{0\}$ такие, что $f(u_1, \dots, u_n) = \alpha e_{kl} \in S$ при $k \neq l$. Следовательно, $a'e_{kl}q'e_{kl} - e_{kl}q'e_{kl}a' = 0$ и умножение слева на e_{ll} дает противоречие с $a'_{lk}q'_{lk} = 0$.

Следовательно, либо $a \in Z(R)$, либо $q \in Z(R)$. Если $q \in Z(R)$, то $a(c+q)x^2 - (c+q)x^2a = 0$ для всех $x \in S$. Положим $b = c + q$. В случае, когда $f(x_1, \dots, x_n)^2$ нецентрален на R, получаем требуемое заключение по лемме 2. С другой стороны, в случае центральности $f(x_1, \dots, x_n)^2$ на R имеем $(ab - ba)x^2 = 0$ для всех $x \in S$. Если $f(r_1, \dots, r_n)^2 = 0$ для всех $r_1, \dots, r_n \in R$, то $f(x_1, \dots, x_n)$ — полиномиальное тождество на R (что хорошо известно ввиду, например, леммы 3 из [6]); противоречие. Таким образом, существуют $u_1, \dots, u_n \in R$ такие, что $0 \neq f(u_1, \dots, u_n)^2 \in Z(R)$. Следовательно, $(ab-ba)f(u_1, \dots, u_n)^2 = 0$ влечет $ab - ba = 0$, т. е. $a(c+q) = (c+q)a$, что и требовалось.

Далее, пусть K — бесконечное поле, являющееся расширением поля F, и пусть $\overline{R} = M_m(K) \cong R \bigotimes_F K$. Полилинейный многочлен $f(x_1, \dots, x_n)$ централен на R тогда и только тогда, когда он централен на $\overline{R}$. Таким образом, из наших предположений следует, что $f(x_1, \dots, x_n)$ нецентрален на $\overline{R}$. Рассмотрим обобщенный многочлен

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = [a, (cf(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n)q)f(x_1, \dots, x_n)],$$

который является обобщенным полиномиальным тождеством на R. Более того, он полиоднороден полистепени $(2, \dots, 2)$ от переменных $x_1, \dots, x_n$.

Значит, полная линеаризация $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ — это полилинейный обобщенный многочлен $\Theta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ от $2n$ неизвестных; более того,

$$\Theta(x_1, \dots, x_n, x_1, \dots, x_n) = 2^n \Phi(x_1, \dots, x_n).$$

Очевидно, что полилинейный многочлен $\Theta(x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ является обобщенным полиномиальным тождеством на R и $\overline{R}$. Поскольку $\mathrm{char}(F) \neq 2$, то $\Phi(r_1, \dots, r_n) = 0$ для всех $r_1, \dots, r_n \in \overline{R}$, и заключение следует из первого аргумента. $\square$

Следствие 1. *Пусть F — поле, $R = M_m(F)$ — алгебра $m \times m$-матриц над F, $Z(R)$ — центр R. Предположим, что существуют $a, c, q \in R$ такие, что $a(cx + xq)x - (cx + xq)xa = 0$ для всех $x \in R$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

- $a \in Z(R)$;
- $c = -q \in Z(R)$.

Лемма 4. *Пусть R — первичное кольцо, $a, c, q \in U$ такие, что $a(cx+xq)x - (cx + xq)xa = 0$ для всех $x \in f(R) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in R\}$. Тогда*

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = [a, (cf(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n)q)f(x_1, \dots, x_n)]$$

является нетривиальным обобщенным полиномиальным тождеством на R, т. е. R — GPI-кольцо, за исключением тех случаев, когда либо $a \in C$, либо $c = -q \in C$.

Доказательство. По предположению R удовлетворяет условию

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) \in U *_C C\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Предположим, что

$$\begin{aligned}\Phi(x_1, \dots, x_n) = (a(cf(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n)q))f(x_1, \dots, x_n) \\ - ((cf(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n)q)f(x_1, \dots, x_n))a\end{aligned}$$

является тривиальным обобщенным полиномиальным тождеством на R. Это означает, что $\Phi(x_1, \dots, x_n) = 0$ принадлежит $U *_C C\{x_1, \dots, x_n\}$, свободному произведению над C свободной C-алгебры $C\{x_1, \dots, x_n\}$ и C-алгебры U. Любой элемент из $U *_C C\{x_1, \dots, x_n\}$ является обобщенным многочленом с коэффициентами из U (мы рекомендуем читателю [7, 8] для получения дополнительных сведений об обобщенных полиномиальных тождествах).

Предположим, что $a \notin C$, т. е. $\{1, a\}$ линейно C-независимы. Таким образом, [8] и тривиальность обобщенного полиномиального тождества $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ на R влекут, что R удовлетворяет

$$(a(cf(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n)q))f(x_1, \dots, x_n) = 0 \in U *_C C\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Поскольку $a \notin C$ и предыдущее тождество — это тривиальное GPI на R, на R выполняется

$$((cf(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n)q)f(x_1, \dots, x_n) = 0 \in U *_C C\{x_1, \dots, x_n\}.$$

Последнее тождество тривиально только в случае $c \in C$, т. е.

$$f(x_1, \dots, x_n)(c + q)f(x_1, \dots, x_n) = 0 \in U *_C C\{x_1, \dots, x_n\}$$

является тривиальным обобщенным полиномиальным тождеством на R, что влечет $c + q = 0$. $\square$

Предложение 1. *Пусть R — первичное кольцо характеристики не 2 и $a, c, q \in U$ такие, что $a(cx + xq)x - (cx + xq)xa = 0$ для всех $x \in f(R) = \{f(x_1, \dots, x_n) : x_1, \dots, x_n \in R\}$. Тогда справедливо одно из следующих утверждений:*

- $a \in C$;
- $c = -q \in C$;
- $f(x_1, \dots, x_n)^2$ *централен на R и* $a(c + q) = (c + q)a$.

Доказательство. Рассмотрим обобщенный многочлен

$$\Phi(x_1, \dots, x_n) = [a, (cf(x_1, \dots, x_n) + f(x_1, \dots, x_n)q)f(x_1, \dots, x_n)].$$

По лемме 4 можно предполагать, что $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ — нетривиальное обобщенное полиномиальное тождество на R. По теореме Бейдара (теорема 2 из [7]) это обобщенное полиномиальное тождество также выполняется на кольце частных Утуми U кольца R. Если C бесконечно, то $\Phi(r_1, \dots, r_n) = 0$ для всех $r_1, \dots, r_n \in U \bigotimes_C \overline{C}$, где $\overline{C}$ — алгебраическое замыкание C. Поскольку U и $U \bigotimes_C \overline{C}$ центрально замкнуты [9, теоремы 2.5, 3.5], можно заменить R либо на U, либо на $U \bigotimes_C \overline{C}$ в зависимости от конечности или бесконечности C. Таким образом, можно предполагать, что R центрально замкнуто над C, которое либо конечно, либо алгебраически замкнуто. По теореме Мартиндейла [10] R является примитивным кольцом с ненулевым цоколем H и ассоциированным кольцом с делением C. Более того, eHe — центральная простая алгебра, конечномерная над C для любого минимального идемпотента $e \in RC$. Можно предполагать H некоммутативным, так как иначе R должно быть коммутативным. Заметим, что H удовлетворяет $\Phi(x_1, \dots, x_n)$ (см., например, доказательство теоремы 1 из [11]). В свете теоремы Джекобсона [12, с. 75] R изоморфно плотному кольцу линейных преобразований некоторого векторного пространства V над C.

Предположим сначала, что V конечномерно над C. Тогда плотность R на V означает, что $R \cong M_k(C)$ — кольцо всех $k \times k$-матриц над C. Так как R некоммутативно, то $k \geq 2$. В этом случае заключение следует из леммы 3.

Предположим далее, что V бесконечномерно над C. Как в лемме 2 из [13], множество $f(R)$ плотно на R, а потому из $\Phi(r_1,\dots,r_n)=0$ для всех $r_1,\dots,r_n\in H$ имеем $[a,(cr+rq)r]$ для всех $r\in H$, т. е. H удовлетворяет $\Phi(x)$.

Во-первых, заметим, что если $c,q\in C$, то $(c+q)[a,r^2]=0$ для всех $r\in H$. В этом случае либо $c+q=0$, либо $[a,r^2]=0$ для всех $r\in H$, т. е. $a\in C$, что и требовалось. Следовательно, мы можем предполагать, что $a\notin C$ и по крайней мере один из c или q не лежит в C. Покажем, что это приводит к противоречию.

Пусть $e^2=e$ — произвольный идемпотент R и $r=exe$ для $x\in H$. Таким образом, $[a,(cexe+exeq)exe]=0$ для всех $x\in H$, и левое и правое умножения на $(1-e)$ дают $(1-e)c(exe)^2a(1-e)=0$. Это означает, что либо $(1-e)ce=0$, либо $ea(1-e)=0$, т. е. или $ce=ece$, или $ea=eae$.

В любом случае eHe удовлетворяет $\Phi(x)$ для всех $e^2=e\in H$.

Поскольку a не принадлежит C, он не централизует ненулевой идеал H в R. Значит, существует $h_1\in H$ такой, что $[a,h_1]\neq 0$. Аналогично поскольку либо $c\notin C$, либо $q\notin C$, существуют $h_2,h_3\in H$ такие, что или $[c,h_2]\neq 0$, или $[q,h_3]\neq 0$. Более того, вследствие бесконечномерности H не удовлетворяет многочлену $[x_1,x_2]$, т. е. существуют $h_4,h_5\in H$ такие, что $[h_4,h_5]\neq 0$. По теореме Литофа [14] существует $e^2=e\in H$ такой, что $ah_1,h_1a,ch_2,h_2c,qh_3,h_3q\in eRe$, а также $h_1,h_2,h_3,h_4,h_5\in eRe$; более того, eRe — центральная простая алгебра, конечномерная над своим центром. Так как $[h_3,h_4]\neq 0$, то eRe некоммутативно, и потому $eRe\cong M_t(C)$ для $t\geq 2$. Мы знаем, что $[eae,(eceX+Xeqe)X]$ является обобщенным полиномиальным тождеством на eRe. Тогда из конечномерности и следствия 1 либо $eae\in Z(eRe)$, либо $ece=-eqe\in Z(eRe)$. В первом случае получаем противоречие:

$$ah_1=eah_1=eaeh_1=h_1eae=h_1ae=h_1a.$$

Во втором случае имеем

$$ch_2=ech_2=eceh_2=h_2ece=h_2ce=h_2c,$$

$$qh_3=eqh_3=eqeh_3=h_3eqe=h_3qe=h_3q,$$

что противоречит выбору h_2 и h_3. □

Замечание 3. Ли в [15] доказал, что любое обобщенное дифференцирование может быть продолжено единственным образом до обобщенного дифференцирования U, а потому все обобщенные дифференцирования R будут безоговорочно предполагаться определенными на всем U. В частности, Ли доказал следующий результат.

Теорема 3 [15]. *Любое обобщенное дифференцирование G на плотном правом идеале кольца R может быть единственным образом продолжено на U и имеет вид $G(x)=ax+d(x)$ для некоторых $a\in U$ и дифференцирования d на U.*

Перейдем к доказательству основного результата.

Доказательство теоремы. С учетом цитированной теоремы обозначим через d дифференцирование на U такое, что $G(x)=ax+d(x)$ для некоторого $a\in U$ и всех $x\in R$.

Пусть $f^d(x_1,\dots,x_n), f^{d\delta}(x_1,\dots,x_n)$ — многочлены, полученные из многочлена $f(x_1,\dots,x_n)$ заменой каждого коэффициента α_σ на $d(\alpha_\sigma)$ и $\delta(d(\alpha_\sigma))$ соответственно. Тогда

$$d(f(r_1,\dots,r_n))=f^d(r_1,\dots,r_n)+\sum_i f(r_1,\dots,d(r_i),\dots,r_n),$$

и аналогичное верно для $\delta(d(f(r_1,\dots,r_n)))$.

По замечанию 3 R удовлетворяет

$$\delta((af(x_1,\dots,x_n)+d(f(x_1,\dots,x_n)))f(x_1,\dots,x_n)), \tag{1}$$

т. е. на R выполняется

$$\begin{aligned}\Big(\delta(a)f(x_1,\dots,x_n)+af^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+a\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big(f^{d\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f^{d}(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big(\sum_i f(x_1,\dots,(\delta d)(x_i),\dots,x_n)+\sum_{i\neq j} f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,d(x_j),\dots,x_n)\Big)\\ \times f(x_1,\dots,x_n)+af(x_1,\dots,x_n)\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\\ +\Big(f^{d}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,d(x_i),\dots,x_n)\Big)\\ \times\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big).\end{aligned} \tag{2}$$

Предположим сначала, что δ и d являются внутренними дифференцированиями на R, т. е. существуют $c,b\in U$ такие, что $\delta(x)=[c,x]$ и $d(x)=[b,x]$ для всех $x\in R$. В этом случае из (1) следует, что R удовлетворяет $[c,(a+b)f(x_1,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_n)(-b)]$. По предложению 1 поскольку $\delta\neq 0$ и $G\neq 0$, имеем $b\in C$, т. е. $G(x)=ax$, $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на R и $ca=ac$, откуда $\delta(a)=0$, что и требовалось.

Для завершения доказательства рассмотрим случай, когда по крайней мере одно из δ или d не является внутренним дифференцированием на R, и докажем, что это предположение ведет к противоречию.

Предположим, что δ и d линейно C-независимы по модулю D_{int} (множество внутренних дифференцирований U).

По [16] и (2) R удовлетворяет

$$\begin{aligned}\Big(\delta(a)f(x_1,\dots,x_n)+af^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+a\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big(f^{d\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f^{d}(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big(\sum_i f(x_1,\dots,z_i,\dots,x_n)+\sum_{i\neq j} f(x_1,\dots,y_i,\dots,t_j,\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\ +af(x_1,\dots,x_n)\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\\ +\Big(f^{d}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,t_i,\dots,x_n)\Big)\\ \times\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big),\end{aligned}$$

т. е. на R выполняется $f(x_1,\dots,z_i,\dots,x_n)f(x_1,\dots,x_n)$ для всех i. В частности, R удовлетворяет $f(x_1,\dots,x_n)^2$. Это приводит к противоречию с тем, что $f(x_1,\dots,x_n)$ — полиномиальное тождество на R.

Предположим, что существуют $\alpha, \beta \in C$ и $q \in U$ такие, что $\alpha\delta + \beta d = ad(q)$ — внутреннее дифференцирование, индуцированное q. Разобьем наш случай на три подслучая.

Случай 1: $\alpha = 0$. В этом случае $d(x) = [c, x]$ для всех $x \in R$, где $c = \beta^{-1}q$. Более того, δ не является внутренним дифференцированием. По (1) R удовлетворяет

$$\begin{gathered}\Big(\delta(a)f(x_1,\dots,x_n)+af^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+a\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big([\delta(c),f(x_1,\dots,x_n)]+\Big[c,f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big]\Big)\\ \times f(x_1,\dots,x_n)+(af(x_1,\dots,x_n)+[c,f(x_1,\dots,x_n)])\\ \times\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big),\end{gathered}$$

а поскольку δ не является внутренним, на R выполняется обобщенное тождество

$$\begin{gathered}\Big(\delta(a)f(x_1,\dots,x_n)+af^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+a\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big([\delta(c),f(x_1,\dots,x_n)]+\Big[c,f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big]\Big)\\ \times f(x_1,\dots,x_n)+(af(x_1,\dots,x_n)+[c,f(x_1,\dots,x_n)])\\ \times\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big).\end{gathered}$$

Таким образом, R удовлетворяет смешанной компоненте

$$\begin{gathered}(af(y_1,x_2,\dots,x_n)+[c,f(y_1,x_2,\dots,x_n)])f(x_1,\dots,x_n)\\ +(af(y_1,x_2,\dots,x_n)+[c,f(x_1,\dots,x_n)])f(y_1,x_2,\dots,x_n).\end{gathered}$$

В частности, на R справедливо

$$((a+c)f(x_1,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_n)(-c))f(x_1,\dots,x_n).$$

Согласно результату из [3] в силу того, что $f(x_1,\dots,x_n)$ не является центральным на R, получаем противоречие: $a = 0$ и $c \in C$, т. е. $G = 0$.

Случай 2: $\beta = 0$. В этом случае $\delta(x) = [b, x]$ для всех $x \in R$, где $b = \alpha^{-1}q \notin C$. Более того, d не является внутренним дифференцированием. По (1) R удовлетворяет

$$\begin{gathered}([b,a]f(x_1,\dots,x_n)+a[b,f(x_1,\dots,x_n)])f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big[b,f^{d}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,d(x_i),\dots,x_n)\Big]f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big(af(x_1,\dots,x_n)+f^{d}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,d(x_i),\dots,x_n)\Big)\\ \times[b,f(x_1,\dots,x_n)]. \qquad (3)\end{gathered}$$

Поскольку d не является внутренним, из [16] и (3) следует, что на R выполняется обобщенное тождество

$$\begin{gathered}([b,a]f(x_1,\dots,x_n)+a[b,f(x_1,\dots,x_n)])f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big[b,f^d(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big]f(x_1,\dots,x_n)\\ +\Big(af(x_1,\dots,x_n)+f^d(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)[b,f(x_1,\dots,x_n)],\end{gathered}$$

т. е. R удовлетворяет

$$[b,f(y_1,x_2,\dots,x_n)]f(x_1,\dots,x_n)+f(y_1,x_2,\dots,x_n)[b,f(x_1,\dots,x_n)].$$

В частности, на R выполнено

$$[b,f(x_1,\dots,x_n)]f(x_1,\dots,x_n)+f(x_1,\dots,x_n)[b,f(x_1,\dots,x_n)].$$

В этом случае из [1] и того, что $b\notin C$ и $\mathrm{char}(R)\neq 2$, получаем центральность $f(x_1,\dots,x_n)^2$ на R. Это означает, что R — PI-кольцо, т. е. существует поле F такое, что $U=M_m(F)$ (по хорошо известной теореме Познера). Более того, U, R и $M_m(F)$ удовлетворяют тем же самым обобщенным полиномиальным тождествам. В частности, $M_m(F)$ удовлетворяет (3), а поскольку $f(x_1,\dots,x_n)^2$ централен на $M_m(F)$, вычисления дают, что

$$\begin{gathered}\delta(a)f(x_1,\dots,x_n)^2+\Big[b,\Big(f^d(x_1,\dots,x_n)\\ +\sum_i f(x_1,\dots,d(x_i),\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\Big]\end{gathered}$$

является обобщенным дифференциальным тождеством на $M_m(F)$. Так как d не является внутренним, снова получаем, что $M_m(F)$ удовлетворяет

$$\delta(a)f(x_1,\dots,x_n)^2+\Big[b,\Big(f^d(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\Big].$$

В частности, на $M_m(F)$ выполнено

$$\Big[b,\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)f(x_1,\dots,x_n)\Big].$$

При $y_i=[b,x_i]$ на $M_m(F)$ справедливо

$$\Big[b,\sum_i f(x_1,\dots,[b,x_i],\dots,x_n)f(x_1,\dots,x_n)\Big],$$

т. е.

$$[b,[b,f(x_1,\dots,x_n)]f(x_1,\dots,x_n)].$$

Вычисления дают, что $[b,-f(x_1,\dots,x_n)bf(x_1,\dots,x_n)]$ — обобщенное тождество на $M_m(F)$. Поскольку $f(x_1,\dots,x_n)$ не является центральным, по [6] существуют $u_1,\dots,u_n\in M_m(F)$ и $\alpha\in F-\{0\}$ такие, что $f(u_1,\dots,u_n)=\alpha e_{kl}\in S$ при $k\neq l$. Таким образом, $-be_{kl}be_{kl}+e_{kl}be_{kl}b=0$, откуда (k,l)-элемент матрицы b нулевой, т. е. b — это диагональная матрица, допустим, $b=\sum b_ie_{ii}$ при $b_i\in F$. Пусть φ — автоморфизм $M_m(F)$. Тогда то же самое справедливо для $\varphi(b)$, поскольку, как и выше, для всех $r_1,\dots,r_n\in M_m(F)$ выполняется $0=[\varphi(b),-f(x_1,\dots,x_n)\varphi(b)f(x_1,\dots,x_n)]$. Следовательно, $\varphi(b)$ должна быть диагональной матрицей. В частности, выберем $\varphi(x) = (1 + e_{ij})x(1 - e_{ij})$ при $i \neq j$. Тогда (i, j)-элемент матрицы $\varphi(b)$ нулевой, т. е. $b_j - b_i = 0$ для всех $i \neq j$, что означает центральность b на $M_m(F)$; противоречие.

Случай 3: $\alpha \neq 0$ и $\beta \neq 0$. В этом случае $d = \gamma\delta + ad(p)$, где $\gamma = -\alpha^{-1}\beta \neq 0$ и $ad(p)$ является внутренним дифференцированием, индуцированным элементом $p = \alpha^{-1}q$. Более того, δ не является внутренним дифференцированием R.

По (1) на R выполнено

$$\begin{aligned}
\Big(\delta(a)f(x_1,\dots,x_n)+af^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+a\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\
+\Big(\gamma f^{\delta^2}(x_1,\dots,x_n)+\gamma\sum_i f(x_1,\dots,\delta^2(x_i),\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\
+\Big(\gamma\sum_{i\neq j} f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,\delta(x_j),\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\
+\Big([\delta(p),f(x_1,\dots,x_n)]+\Big[p,f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big]\Big)\\
\times f(x_1,\dots,x_n)+(af(x_1,\dots,x_n)\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\\
+\Big(\gamma f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\gamma\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\\
\times\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big)\\
[p,f(x_1,\dots,x_n)]\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,\delta(x_i),\dots,x_n)\Big).
\end{aligned}$$

Так как δ не является внутренним, из [16] следует, что R удовлетворяет

$$\begin{aligned}
\Big(\delta(a)f(x_1,\dots,x_n)+af^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+a\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\
+\Big(\gamma f^{\delta^2}(x_1,\dots,x_n)+\gamma\sum_i f(x_1,\dots,z_i,\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\
+\Big(\gamma\sum_{i\neq j} f(x_1,\dots,y_i,\dots,y_j,\dots,x_n)\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\
+\Big([\delta(p),f(x_1,\dots,x_n)]+\Big[p,f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big]\Big)f(x_1,\dots,x_n)\\
+(af(x_1,\dots,x_n)\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\\
+\Big(\gamma f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\gamma\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\\
\times\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big)\\
[p,f(x_1,\dots,x_n)]\Big(f^{\delta}(x_1,\dots,x_n)+\sum_i f(x_1,\dots,y_i,\dots,x_n)\Big).
\end{aligned}$$

В частности, на R выполнено $\gamma f(y_1, x_2, \dots, x_n)f(x_1, \dots, x_n)$. Таким образом, $f(x_1, \dots, x_n)^2$ — тождество на R, так как $\gamma \neq 0$. Это снова влечет противоречие с тем, что $f(x_1, \dots, x_n)$ является тождеством на R. □

ЛИТЕРАТУРА

1. *Lee T. K., Shiue W. K.* Derivations cocentralizing polynomials // Taiwanese J. Math. 1998. V. 2, N 4. P. 457–467.

2. *Carini L., De Filippis V.* On some central differential identities in prime rings // Aligarh Bull. Math. 2006. V. 25, N 2. P. 51–58.

3. *Argac N., Demir C.* Prime rings with generalized derivations on right ideals // Algebra Coll. 2011. V. 18, N 1. P. 987–998.

4. *De Filippis V.* A product of two generalized derivations on polynomials in prime rings // Collect. Math. 2010. V. 61, N 3. P. 303–322.

5. *Chuang C. L.* The additive subgroup generated by a polynomial // Isr. J. Math. 1987. V. 59. P. 98–106.

6. *Leron U.* Nil and power central polynomials in rings // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 202. P. 297–103.

7. *Beidar K. I.* Rings with generalized identities III // Moscow Univ. Math. Bull. 1978. V. 33. P. 53–58.

8. *Chuang C. L.* GPIs having coefficients in Utumi quotient rings // Proc. Amer. Math. Soc. 1988. V. 103, N 3. P. 723–728.

9. *Erickson T. S., Martindale W. S. III, Osborn J. M.* Prime nonassociative algebras // Pacific J. Math. 1975. V. 60. P. 49–63.

10. *Martindale W. S. III.* Prime rings satisfying a generalized polynomial identity // J. Algebra. 1969. V. 12. P. 576–584.

11. *Lanski C.* An Engel condition with derivation // Proc. Amer. Math. Soc. 1993. V. 118, N 3. P. 731–734.

12. *Jacobson N.* Structure of rings. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1964.

13. *Wong T. L.* Derivations with power central values on multilinear polynomials // Algebra Colloq. 1996. V. 3, N 4. P. 369–378.

14. *Faith C., Utumi Y.* On a new proof of Litoff's theorem // Acta Math. Acad. Sci. Hung. 1963. V. 14. P. 369–371.

15. *Lee T. K.* Generalized derivations of left faithful rings // Comm. Algebra. 1999. V. 27, N 8. P. 4057–4073.

16. *Харченко В. К.* Дифференциальные тождества первичных колец // Алгебра и логика. 1979. Т. 17, № 2. С. 220–238.

Статья поступила 25 августа 2011 г.

Luisa Carini (Карини Луиза)
Department of Mathematics, University of Messina,
Messina, 98166 Italy
`lcarini@unime.it`

Vincenzo De Filippis (де Филиппис Винченцо)
DI.S.I.A., Faculty of Engineering, University of Messina
Messina, 98166 Italy
`defilippis@unime.it`