Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 515.122.4+512.54

ГРУППЫ ИЗОМЕТРИЙ ПРОСТРАНСТВ ХЕММИНГА ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЕЙ

Б. В. Олийнык, В. И. Сущанский

Аннотация. Исследуются пространство Хемминга периодических $(0,1)$-последовательностей и континуальное семейство его подпространств, которые однотипно определяются как пределы прямых спектров конечных пространств Хемминга. Эти подпространства образуют полную решетку по включению, изоморфную решетке супернатуральных чисел. Приводится явное описание групп изометрий так сконструированных пространств. При этом возникают конструкции, вполне аналогичные гипероктаэдральным группам, но учитывающие наличие дополнительных структур на основных множествах.

Ключевые слова: пространство Хемминга, пространство Безиковича, группа изометрий, полупрямое произведение, корневое дерево, мера Бернулли.

1. Введение

Пространства Хемминга являются одним из наиболее употребительных примеров конечных метрических пространств, а их группы изометрий (так называемые гипероктаэдральные группы) характеризуют один из нескольких основных типов симметрии конечных структур. Нормализованная метрика Хемминга естественным образом распространяется на множество всех бесконечных $(0,1)$-последовательностей, однако при этом превращается в псевдометрику. Метрическое пространство возникает при переходе к фактор-множеству по отношению эквивалентности — склеиванию последовательностей, расстояние между которыми нулевые. Это пространство, которое называется пространством Безиковича или Безиковича — Хемминга [1, 2], еще с 60-х годов прошлого столетия используется в теории динамических систем и эргодической теории. Здесь в первую очередь надо отметить исследования А. М. Вершика, в которых развита теория убывающих последовательностей измеримых разбиений пространств с мерой [2–4] (см. также [5, 6]). Одним из ключевых моментов этой теории является развитие специальной комбинаторики разбиений, в частности, построение иерархии разбиений и действующих на них групп. Это весьма общая схема, в которую вкладываются также различные предельные конструкции пространств и связанных с ними групп преобразований: индуктивные и проективные пределы, группы, действующие на бесконечных корневых деревьях, и др. В иерархию Вершика вкладываются, например, построения Камерона — Тарзи [7], в которых рассматривается индуктивный предел конечных нормализованных пространств Хемминга со связующими вложениями, определяемыми удвоениями координат $(0,1)$-векторов. При этом предельное пространство естественным образом интерпретируется как пространство конечных объединений полуоткрытых подынтервалов интервала $[0,1)$ с двоично-рациональными концами, причем расстояние между двумя такими объединениями равно сумме длин отрезков, входящих в их симметрическую разность. Такое представление дало возможность исследовать группу изометрий как самого пространства Камерона — Тарзи, так и его пополнения.

Нормализованная метрика Хемминга распространяется на множество периодических $(0,1)$-последовательностей, если расстояние между такими последовательностями определять как нормализованное расстояние между их началами, длины которых кратны периодам этих последовательностей. Так возникающее метрическое пространство изометрично погружается в пространство Безиковича — Хемминга, а поскольку последнее полное, пополнение пространства периодических $(0,1)$-последовательностей совпадает с его замыканием в этом объемлющем пространстве.

Пространство Хемминга периодических $(0,1)$-последовательностей содержит континуальное семейство подпространств, которые однотипно определяются как пределы прямых спектров конечных пространств Хемминга. Эти подпространства естественно параметризуются супернатуральными числами и образуют по включению решетку, изоморфную решетке супернатуральных чисел относительно делимости. Замыкание каждого из таких бесконечных пространств совпадает с замыканием пространства всех периодических $(0,1)$-последовательностей. Целью данной работы является исследование групп изометрий пространств из сконструированного таким образом семейства. При этом возникают групповые конструкции, вполне аналогичные конструкции гипероктаэдральных групп, но учитывающие наличие дополнительных структур на основных множествах.

Опишем содержание работы. В разд. 2 мы определяем пространство Хемминга всех периодических $(0,1)$-последовательностей, выделяем семейство его подпространств, параметризуемых супернатуральными числами, и приводим их независимое описание как индуктивных пределов конечных пространств Хемминга.

В разд. 3 описано вложение пространств Хемминга u-периодических последовательностей (u пробегает множество бесконечных супернатуральных чисел) в пространство Безиковича — Хемминга и их реализация на границах сферически однородных корневых деревьев (теорема 1). Для удобства читателя приводим здесь подробные доказательства всех формулируемых утверждений, хотя некоторые из них имеют фольклорный характер.

В разд. 4 описывается явная конструкция группы изометрий пространства Хемминга u-периодических последовательностей (теорема 2), которая вполне аналогична конструкции гипероктаэдральных групп, но учитывает тот факт, что граница сферически однородного корневого дерева является mm-пространством, т. е. метрическим пространством с заданной на нем мерой Бернулли. Более того, в теореме 3 показываем, как именно эта группа изометрий может быть построена исходя из конечных гипероктаэдральных групп.

Все обозначения, употребляемые в работе, общеприняты. Пользуясь случаем, авторы выражают благодарность А. М. Вершику, Я. В. Лавренюку и В. В. Некрашевичу за полезные обсуждения.

2. Пространства Хемминга периодических $(0,1)$-последовательностей

2.1. Пусть n — фиксированное натуральное число. Напомним, что *метрическим пространством Хемминга* H_n называется множество всех $(0,1)$-последовательностей длины n с метрикой d_{H_n}, определяемой равенством

$$d_{H_n}(\bar{x}, \bar{y}) = \sum_{i=1}^{n} |x_i - y_i|, \tag{1}$$

где $\bar{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_n) \in H_n$. *Нормализованым пространством Хемминга* $\hat{H}_n$ называется пространство, заданное на том же множестве с нормализованной метрикой $\hat{d}_{H_n} = \frac{1}{n} d_{H_n}$.

Бесконечная $(0,1)$-последовательность $\mathbf{a} = (a_1, a_2, \ldots)$ называется *периодической*, если существует такое натуральное число m, что для всех $i \in \mathbb{N}$ имеет место равенство $a_i = a_{i+m}$. Каждое число m с таким свойством называется *периодом последовательности* $\mathbf{a}$. Пусть $\mathscr{H}$ — множество всех периодических $(0,1)$-последовательностей. Определенная выше нормализованная метрика $\hat{d}_{H_n}$, $n \in \mathbb{N}$, может быть естественным образом расширена на множество $\mathscr{H}$. А именно, для последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$ из $\mathscr{H}$, имеющих периоды m и n соответственно, обозначим через l их общий период и положим

$$d_{\mathscr{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{l} \sum_{i=1}^{l} |x_i - y_i|. \tag{2}$$

Понятно, что правая часть равенства (2) не зависит от выбора периодов m, n и l, поэтому можно выбирать число l равным, например, наименьшему общему кратному чисел m и n или их произведению mn. Таким образом, метрика $d_{\mathscr{H}}$ определена корректно.

Определение 1. Метрическое пространство $(\mathscr{H}, d_{\mathscr{H}})$ будем называть *пространством Хемминга периодических* $(0,1)$*-последовательностей.*

2.2. *Супернатуральным числом* (или *числом Стейница*) называется формальное выражение вида $\prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p}$, где $\mathbb{P}$ — множество всех простых чисел, а $k_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$ для любого $p \in \mathbb{P}$. Множество всех супернатуральных чисел обозначим символом $\mathbb{SN}$. В этом множестве определено отношение делимости $|$, а именно супернатуральное число $u = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{k_p}$ делит супернатуральное число $v = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{n_p}$, если $k_p \leq n_p$ для всех $p \in \mathbb{P}$. При этом считается, что символ ∞ больше всех натуральных чисел и нуля. Отношение $|$ — частичный порядок на $\mathbb{SN}$, а частично упорядоченное множество $(\mathbb{SN}, |)$ является полной решеткой с наибольшим (число $I = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^{\infty}$) и наименьшим (число $1 = \prod_{p \in \mathbb{P}} p^0$) элементами. Решетка $(\mathbb{SN}, |)$ является пополнением решетки $(\mathbb{N}, |)$, а решеточные операции $\vee, \wedge$ в $\mathbb{SN}$ являются прямым обобщением соответствующих операций в решетке $\mathbb{N}$. Элементы множества $\mathbb{SN} \setminus \mathbb{N}$ называются *бесконечными супернатуральными числами.*

В пространстве Хемминга всех периодических последовательностей выделяется семейство подпространств, параметризуемое супернатуральными числами. Пусть $u \in \mathbb{SN}$ — некоторое супернатуральное число. Последовательность

a назовем *u-периодической*, если минимальный период этой последовательности является делителем числа u. Подпространство $\mathscr{H}(u)$ всех u-периодических последовательностей из $\mathscr{H}$ будем называть *пространством Хемминга всех u-периодических* $(0,1)$*-последовательностей.* Отметим следующие легко проверяемые свойства этих пространств.

Лемма 1. (1) *Если u — натуральное число, то $\mathscr{H}(u)$ изометрично нормализованному пространству Хемминга $\widehat{H}_u$.*

(2) *Имеет место равенство $\mathscr{H}(I) = \mathscr{H}$.*

(3) *Соотношение $\mathscr{H}(u) \subseteq \mathscr{H}(v)$ выполняется тогда и только тогда, когда $u|v$.*

(4) *Для любого супернатурального числа u множество значений $\mathrm{Dist}(\mathscr{H}(u), d_{\mathscr{H}})$ метрики $d_{\mathscr{H}}$ пространства $\mathscr{H}(u)$ определяется равенством*

$$\mathrm{Dist}(\mathscr{H}(u), d_{\mathscr{H}}) = \mathbb{Q}_u \cap [0,1],$$

где $\mathbb{Q}_u$ — множество рациональных дробей, знаменатель которых является делителем u.

(5) *Если $u \neq v$, то пространства $\mathscr{H}(u)$ и $\mathscr{H}(v)$ не изометричны.*

(6) *Пространства $\mathscr{H}(u)$, $u \in \mathbb{SN}$, по включению образуют решетку, которая изоморфна решетке супернатуральных чисел относительно делимости.*

2.3. Каждое из пространств $\mathscr{H}(u)$, $u \in \mathbb{SN}$, может быть охарактеризовано независимо с помощью понятия индуктивного предела метрических пространств. Для любых натуральных чисел k, l, s таких, что $k|l$ и $l = k \cdot s$, определим вложение f_s пространства $\widehat{H}_k$ в пространство $\widehat{H}_l$, полагая для произвольного вектора $\bar{x} = (x_1, \dots, x_k) \in \widehat{H}_k$

$$f_s(x_1, \dots, x_k) = (\underbrace{x_1, \dots, x_k | x_1, \dots, x_k | \dots | x_1, \dots, x_k}_{k \cdot s}). \tag{3}$$

Вложение f_s является изометрией, которую будем называть *диагональным вложением* кратности s.

Пусть теперь $\tau = (m_1, m_2, \dots)$ — строго возрастающая делимая последовательность натуральных чисел, т. е. $m_i | m_{i+1}$ для всех $i \in \mathbb{N}$. Последовательность τ задает прямой спектр нормализованных пространств Хемминга

$$\Sigma(\tau) = \langle \widehat{H}_{m_i}, f_{s_i} \rangle_{i \in \mathbb{N}} \tag{4}$$

с диагональными вложениями f_{s_i} кратностей $s_i = \frac{m_i}{m_{i-1}}$ $(i > 2)$, определяемыми равенствами (3). Предельное пространство

$$\mathscr{H}(\tau) = \varinjlim \langle \widehat{H}_{m_i}, f_{s_i} \rangle \tag{5}$$

спектра (4) может быть отождествленно с пространством периодических последовательностей, периоды которых являются делителями членов последовательности τ. Супернатуральное число, которое возникает при рассмотрении бесконечного произведения

$$m_1 \cdot \frac{m_2}{m_1} \cdot \frac{m_3}{m_2} \cdot \frac{m_4}{m_3} \cdot \dots,$$

назовем *характеристикой последовательности* τ и обозначим через $\mathrm{char}(\tau)$. Натуральное число является делителем членов последовательности τ в том и только том случае, когда оно является делителем супернатурального числа $\mathrm{char}(\tau)$. Заметим также, что пространство $\mathscr{H}(\tau)$ естественным образом можно рассматривать как подпространство пространства $\mathscr{H}$. Отсюда сразу же вытекает

Лемма 2. *Для любой строго возрастающей делимой последовательности τ пространство $\mathscr{H}(\tau)$, рассматриваемое как подпространство в $\mathscr{H}$, совпадает с подпространством $\mathscr{H}(u)$, где $u = \mathrm{char}(\tau)$.*

Пространство $\mathscr{H}(\tau)$ будем называть *пространством Хемминга всех u-периодических* $(0,1)$*-последовательностей.* Прямым следствием лемм 1 и 2 является

Лемма 3. *Пространства $\mathscr{H}(\tau)$ и $\mathscr{H}(\varsigma)$, определяемые делимыми последовательностями τ и ς, изометричны тогда и только тогда, когда* $\mathrm{char}(\tau) = \mathrm{char}(\varsigma)$.

Таким образом, семейство попарно не изометричных пространств вида $\mathscr{H}(\tau)$, где τ — некоторая строго возрастающая делимая последовательность, однозначно параметризуется супернатуральными числами. На самом деле такая параметризация может быть определена для более широкого класса индуктивных пределов конечных пространств Хемминга. Эти пределы определяются типами соединительных вложений, которые строятся по разбиениям множеств индексов. Более точно, пусть k, s — некоторые натуральные числа, $\pi = \langle R_1, R_2, \ldots, R_k \rangle$ — разбиение множества индексов $\{1, 2, \ldots, ks\}$ на k подмножеств мощности s.

Определение 2. *π-Вложением пространства Хемминга $\widehat{H}_k$ в пространство $\widehat{H}_{ks}$* называется отображение $f_\pi : \widehat{H}_k \to \widehat{H}_{ks}$, определяемое для любого $\bar{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_k)$ условием

$$f_\pi(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (y_1, y_2, \ldots, y_{ks}),$$

где для всех $i \in R_j$ координаты y_i равны x_j $(1 \leq j \leq k)$.

Каждое π-вложение является изометрическим вложением нормализованного пространства Хемминга $\widehat{H}_k$ в пространство $\widehat{H}_{ks}$. Пусть $\tau = (m_1, m_2, \ldots)$ — строго возрастающая делимая последовательность натуральных чисел, причем $m_{i+1} = m_i s_{i+1}$, π_i — разбиение множества индексов $\{1, 2, \ldots, m_{i+1}\}$ на s_i-элементные подмножества. Этот набор данных однозначно определяет прямой спектр пространств Хемминга $\langle \widehat{H}_{m_i}, f_{\pi_i} \rangle_{i \in \mathbb{N}}$, т. е. можно рассматривать предельное пространство этого спектра.

Лемма 4. *Для любой последовательности разбиений π_i, $i \in \mathbb{N}$, предельное пространство $\varinjlim \langle \widehat{H}_{m_i}, f_{\pi_i} \rangle$ изометрично пространству $\mathscr{H}(\tau)$.*

Доказательство. Произвольное вложение f_π пространства $\widehat{H}_k$ в пространство $\widehat{H}_{ks}$, определяемое разбиением π множества индексов $\{1, 2, \ldots, ks\}$, может быть получено из диагонального вложения $f_s : \widehat{H}_k \to \widehat{H}_{ks}$ фиксированной перестановкой координат векторов ν. Пусть $\psi_{k,s} : \widehat{H}_k \to \widehat{H}_{ks}$ — преобразование пространства $\widehat{H}_{ks}$, определяемое этой перестановкой, т. е.

$$\psi_{k,s}(x_1, x_2, \ldots, x_{ks}) = (x_{\nu(1)}, x_{\nu(2)}, \ldots, x_{\nu(ks)}).$$

Преобразование $\psi_{k,s}$ — изометрия $\widehat{H}_{ks}$, причем диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \widehat{H}_k & \xrightarrow{f_s} & \widehat{H}_{ks} \\ {\scriptstyle \mathrm{id}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \psi_{k,s}} \\ \widehat{H}_k & \xrightarrow{f_\pi} & \widehat{H}_{ks} \end{array}$$

коммутативна (id — тождественное преобразование). Поэтому коммутативной будет также следующая бесконечная диаграмма, построенная по прямым спектрам $\langle \widehat{H}_{m_i}, f_{s_i}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$ и $\langle \widehat{H}_{m_i}, f_{\pi_i}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$:

$$\begin{tikzcd} \widehat{H}_{m_1} \arrow[r, "f_{s_1}"] \arrow[d, "\mathrm{id}"'] & \widehat{H}_{m_2} \arrow[r, "f_{s_2}"] \arrow[d, "\psi_{m_1,s_1}"] & \widehat{H}_{m_3} \arrow[r, "f_{s_3}"] \arrow[d, "\psi_{m_2,s_2}"] & \ldots \\ \widehat{H}_{m_1} \arrow[r, "f_{\pi_1}"] & \widehat{H}_{m_2} \arrow[r, "f_{\pi_2}"] & \widehat{H}_{m_3} \arrow[r, "f_{\pi_3}"] & \ldots\ . \end{tikzcd}$$

Поскольку все связывающие морфизмы ψ_{m_i,s_i} $(i \in \mathbb{N})$ являются изометриями, предельные пространства рассматриваемых прямых спектров изометричны.

Пример 1. *Дублированием* назовем отображение $\varphi_k : \widehat{H}_k \to \widehat{H}_{2k}$, определяемое равенством

$$\varphi_k(x_1, x_2, \ldots, x_k) = (x_1, x_1, x_2, x_2, \ldots, x_k, x_k).$$

Дублирование φ_k является π_k-вложением для $s = 2$ и разбиения

$$\pi_k = \{\{1, 2\}, \{3, 4\}, \ldots, \{2k-1, 2k\}\}$$

множества индексов $\{1, \ldots, 2k\}$. Прямой спектр $\Phi = \langle \widehat{H}_{2^l}, \varphi_{2^l}\rangle_{l\in\mathbb{N}}$ нормализованных пространств Хемминга определяет счетное метрическое пространство, являющееся объектом исследований в [7], как интересное обобщение конечных пространств Хемминга на бесконечномерный случай.

3. Изометрические вложения пространств Хеммига периодических $(0, 1)$-последовательностей

3.1. Вложение в пространство Безиковича. Пусть $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ — пространство всех бесконечных (вправо) $(0, 1)$-последовательностей. Определим в нем функцию расстояния, полагая для любых последовательностей $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots)$ и $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \ldots)$

$$\hat{d}_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \limsup_{n\to\infty} \hat{d}_{H_n}((x_1, \ldots, x_n), (y_1, \ldots, y_n)). \tag{6}$$

Определенное равенством (6) отображение $\hat{d}_B$ является псевдометрикой, т. е. существуют различные последовательности $\mathbf{x}$ и $\mathbf{y}$, для которых $\hat{d}_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Псевдометрика (6) задает на $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ отношение эквивалентности $\sim_{\hat{d}_B}$, определенное условием $\mathbf{x} \sim_{\hat{d}_B} \mathbf{y}$ тогда и только тогда, когда $\hat{d}_B(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$. Пусть $\mathscr{X}_B = \{0, 1\}^{\mathbb{N}}/ \sim_{\hat{d}_B}$ — фактор-множество по этому отношению эквивалентности. Функция $\hat{d}_B$ индуцирует метрику d_B на $\mathscr{X}_B$, а метрическое пространство $(\mathscr{X}_B, d_B)$ называется *пространством Безиковича* или *Безиковича — Хемминга* (см., например, [1, 2]). Переход от $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$ до $\mathscr{X}_B$ осуществляется путем склеивания в одну точку всех последовательностей, расстояние между которыми равно нулю. В частности, все почти нулевые последовательности (и не только они) склеиваются в одну точку. Пространство Безиковича имеет следующие свойства.

Лемма 5 [1]. *Метрическое пространство $(\mathscr{X}_B, d_B)$ является полным несепарабельным и не локально компактным пространством.*

Обозначим символом $[\mathbf{x}]$ класс эквивалентности отношения $\sim_{\hat{d}_B}$, содержащий последовательность $\mathbf{x} \in \{0, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Несложно проверяется

Предложение 1. *Отображение* $h : \mathbf{x} \to [\mathbf{x}]$ *является изометрическим вложением пространства* $\mathscr{H}$ *периодических* $(0,1)$*-последовательностей в пространство Безиковича* $\mathscr{X}_B$.

Поскольку пространство Безиковича $(\mathscr{X}_B, d_B)$ является полным пространством, пополнение $\mathscr{C}\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{H}$ всех периодических $(0,1)$-последовательностей изометрично замыканию $\mathscr{W}$ образа $\mathscr{H}$ при вложении h. Пространство $\mathscr{H}$ очевидным образом инвариантно относительно сдвига, т. е. преобразования

$$\sigma : \mathscr{X}_B \to \mathscr{X}_B, \quad \sigma(x_1, x_2, x_3, \dots) = (x_2, x_3, \dots).$$

Поэтому подпространство $\mathscr{W} \subset \mathscr{X}_B$ также инвариантно относительно сдвига, а поскольку оно компактно, то является естественным полигоном для динамических систем на $(0,1)$-последовательностях.

Отметим, что для любого бесконечного супернатурального числа u образ подпространства $\mathscr{H}(u)$ пространства $\mathscr{H}$ при отображении h также инвариантно относительно сдвига, а замыкания всех этих пространств совпадают и равны $\mathscr{W}$.

3.2. Представление периодических пространств Хемминга на границах сферически однородных корневых деревьев. Пусть T — локально конечное корневое дерево, т. е. дерево с фиксированной вершиной — корнем дерева, из каждой вершины которого выходит конечное число ребер. Множество вершин дерева T с корнем v_0 естественным образом разбивается на *уровни* (*сферы*): n-й уровень L_n состоит из вершин, которые соединены с корнем v_0 путем длины $n \geq 0$.

Корневое дерево (T, v_0) называется *сферически однородным*, если степени всех вершин одного уровня равны между собой. Такое дерево однозначно с точностью до изоморфизма корневых деревьев определяется своим *сферическим индексом* (или *индексом ветвления*) — последовательностью натуральных чисел $[s_1; s_2; \dots,]$ таких, что s_1 — степень корня v_0, а для всех $i > 1$ число $s_i + 1$ — степень вершин уровня L_{i-1}. Если дерево (T, v_0) имеет сферический индекс $[s_1; s_2; \dots,]$, то последовательность $m_k = |L_k|$, $k \geq 1$, мощностей его уровней делима, поскольку $m_k = s_1 \cdot s_2 \cdot \dots \cdot s_k$.

Границей ∂T дерева T называется множество бесконечных путей без повторений, начинающихся в корневой вершине v_0 (такие пути называются *концами* T). На границе ∂T вводится структура метрического пространства. А именно, для любых двух путей $\gamma_1, \gamma_2 \in \partial T$ расстояние между ними определяется равенством

$$\rho(\gamma_1, \gamma_2) = \begin{cases} \frac{1}{k+1}, & \text{если } \gamma_1 \neq \gamma_2, \\ 0, & \text{если } \gamma_1 = \gamma_2, \end{cases} \tag{7}$$

где k — номер уровня, на котором пути γ_1 и γ_2 расходятся. Пространство $(\partial T, \rho)$ является ультраметрическим, вполне несвязным компактом диаметра 1.

Пусть $\tau = (m_1, m_2, \dots)$ — строго возрастающая делимая последовательность, $[s_1; s_2; \dots,]$ — последовательность ее частных, т. е.

$$s_1 = m_1, \quad s_i = \frac{m_i}{m_{i-1}}, \quad i \geq 2. \tag{8}$$

Символом T_τ обозначим сферически однородное корневое дерево сферического индекса $[s_1; s_2; \dots,]$, а символом ρ_τ — метрику на ∂T_τ, определенную равенством (7). Группа автоморфизмов дерева T_τ действует на нем сферически транзитивно, т. е. сохраняется каждый из уровней T_τ, а на уровнях действие транзитивно. При этом группа $\operatorname{Aut} T_\tau$ изоморфна бесконечно итерированному сплетению симметрических групп степеней $s_1, s_2, \dots$:

$$\operatorname{Aut} T_\tau \simeq \wr_{i=1}^{\infty} S_{s_i}$$

(см., например, [8]). Каждый автоморфизм α дерева T_τ действует как изометрия на границе $(\partial T_\tau, \rho_\tau)$, и наоборот, т. е. имеет место равенство

$$\operatorname{Iso}(\partial T_\tau, \rho_\tau) = \operatorname{Aut} T_\tau.$$

Действие $\operatorname{Aut} T_\tau$ на границе ∂T_τ транзитивно. При $\tau_1 \neq \tau_2$ пространства ∂T_{τ_1} и ∂T_{τ_2} неизометричны, а их группы изометрий неизоморфны.

Для заданной вершины v корневого дерева T_τ *цилиндрическим множеством* C_v, соответствующим вершине v, называется множество всех концов корневого дерева T, проходящих через вершину v:

$$C_v = \{\gamma \in \partial T_\tau \mid v \in \gamma\}.$$

Метрика ρ_τ индуцирует топологию на границе ∂T_τ. Открыто-замкнутыми подмножествами в этой топологии являются конечные объединения цилиндрических множеств и только они.

На σ-алгебре открыто-замкнутых множеств пространства ∂T_τ вводится вероятностная борелевская мера — мера Бернулли μ, которая определяется условием

$$\mu(C_v) = \frac{1}{n_v}, \tag{9}$$

где n_v — число вершин дерева T_τ на уровне, содержащем вершину v. Мера μ является единственной вероятностной мерой на ∂T_τ, которая инвариантна относительно действия группы изометрий $\operatorname{Iso}(\partial T_\tau, \rho_\tau)$. Кроме того, пространство $(\partial T_\tau, \mu)$ изоморфно как пространство с мерой пространству $([0,1], l)$, где l — мера Лебега (см., например, [8]).

С помощью меры μ на множестве ΩT_τ всех открыто-замкнутых подмножеств границы ∂T_τ определим метрику d_μ, полагая для любых открыто-замкнутых множеств A, B границы ∂T_τ

$$d_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B). \tag{10}$$

Из определения меры μ следует, что только пустое подмножество может иметь меру 0, поэтому метрика d_μ определена корректно.

Теорема 1. *Пусть $\tau = (m_1, m_2, \dots)$ — строго возрастающая делимая последовательность натуральных чисел, $[s_1; s_2; \dots,]$ — последовательность ее частных, определенных формулами* (8), *T_τ — сферически однородное корневое дерево сферического индекса $[s_1; s_2; \dots,]$ и u — супернатуральное число такое, что* $\operatorname{char}(\tau) = u$. *Тогда пространство Хемминга $\mathscr{H}(u)$ всех u-периодических* $(0,1)$-*последовательностей изометрично пространству ΩT_τ всех открыто-замкнутых подмножеств границы ∂T_τ с метрикой d_μ, определенной равенством* (10).

Доказательство. Пусть $\mathscr{C}_k$ — множество всевозможных объединений цилиндрических множеств C_v, определяемых вершинами дерева T_τ уровня $k \geq 1$, которое рассматривается как метрическое пространство с метрикой (10). Поскольку при $v_1 \neq v_2$ имеем $C_{v_1} \neq C_{v_2}$, множества C_v, $v \in L_k$, образуют разбиение границы ∂T_τ на m_k подмножеств. Поэтому $|\mathscr{C}_k| = 2^{m_k}$. Занумеруем вершины из L_k, т. е. предположим, что $L_k = \{v_1, \dots, v_{m_k}\}$.

Если $A = \bigcup\limits_{i \in I_A} C_{v_i}$ и $B = \bigcup\limits_{j \in I_B} C_{v_j}$, где $I_A, I_B \subseteq \{1, \dots, m_k\}$, то

$$A \triangle B = \bigcup_{i \in I_A} \bigcup_{i \in I_B} (C_{v_i} \triangle C_{v_j}).$$

Но для симметрических разностей из правой части этого равенства

$$C_{v_i} \triangle C_{v_j} = \begin{cases} \varnothing, & \text{если } i = j, \\ C_{v_i} \cup C_{v_j}, & \text{если } i \neq j. \end{cases}$$

Поэтому $A \triangle B$ также является объединением цилиндрических множеств, определяемых вершинами из L_k, причем согласно определению меры μ имеем

$$\mu(A \triangle B) = \frac{|I_A \triangle I_B|}{m_k}.$$

Каждому множеству Y из $\mathscr{C}_k$ однозначно соответствует характеристический вектор $\chi(Y)$, т. е. $(0,1)$-вектор длины m_k, l-я координата которого равна 1 в том и только том случае, когда $C_{v_l} \subseteq Y$. Отображение $\chi : \mathscr{C}_k \to \widehat{H}_{m_k}$ является биекцией, и для любых $A, B \in \mathscr{C}_k$ имеем

$$d_\mu(A, B) = \mu(A \triangle B) = \frac{|I_A \triangle I_B|}{m_k} = \hat{d}_{H_{m_k}}(\chi(A), \chi(B)).$$

Следовательно, пространство $(\mathscr{C}_k, d_\mu)$ изометрично нормализованному пространству Хемминга $\widehat{H}_{m_k}$.

Каждое цилиндрическое множество k-го уровня разбивается в объединение s_{k+1} цилиндрических подмножеств $(k+1)$-го уровня дерева T_τ. Тем самым задана инъекция ϖ_k множества $\mathscr{C}_k$ в множество $\mathscr{C}_{k+1}$ так, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{C}_k & \xrightarrow{\varpi_k} & \mathscr{C}_{k+1} \\ \chi \big\downarrow & & \big\downarrow \chi \\ \widehat{H}_{m_k} & \xrightarrow{\phi_k} & \widehat{H}_{m_{k+1}} \end{array}$$

коммутативна, где $\varphi_k : \widehat{H}_{m_k} \to \widehat{H}_{m_{k+1}}$ — повторение кратности s_{k+1}, т. е.

$$\varphi_k(x_1, \dots, x_{m_k}) = (\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{s_{k+1}}, \dots, \underbrace{x_{m_k}, \dots, x_{m_k}}_{s_{k+1}}).$$

Отсюда получаем, что объединение возрастающей цепи пространств $\mathscr{C}_1 \subset \mathscr{C}_2 \subset \mathscr{C}_3 \dots$, являющееся пространством всех открыто-замкнутых подмножеств границы ∂T_τ с метрикой d_μ, изометрично прямому пределу пространств $\widehat{H}_{m_1} \hookrightarrow \widehat{H}_{m_2} \hookrightarrow \dots$, которое, в свою очередь, с учетом леммы 4 изометрично пространству Хемминга $\mathscr{H}(\tau)$ всех u-периодических $(0,1)$-последовательностей. Теорема доказана.

Следствие 1. *Пополнение пространства $\mathscr{H}(\tau)$ изометрично пространству всех измеримых подмножеств (с точностью до множеств меры нуль) пространства $(\partial T_\tau, \mu)$ с метрикой d_μ, определяемой равенством* (10).

Пространство $(\partial T_\tau, \mu)$ является стандартным вероятностным пространством, поэтому пополнение пространства $\mathscr{H}(\tau)$ не зависит от выбора делимой последовательности $\tau = (m_1, m_2, \dots)$. Таким образом, имеем

Следствие 2. *Для любой бесконечной строго возрастающей делимой последовательности τ пополнение пространства $\mathscr{H}(\tau)$ изометрично пополнению $\mathscr{C}\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{H}$ всех периодических $(0,1)$-последовательностей.*

4. Группа изометрий пространства Хемминга $H(u)$

4.1. Группа изометрий $\operatorname{Iso} H_n$ пространства Хемминга H_n изоморфна (см., например, [9]) подстановочному сплетению $Z_2 \wr S_n$ симметрической группы степени n и циклической группы Z_2, действующей на множестве $\{0,1\}$ регулярно. Иными словами, элементами этой группы являются пары вида $[\alpha, g]$, где $\alpha \in S_n$, $g : \{1, 2, \dots, n\} \to Z_2$ — произвольное отображение, причем такая пара действует на $(0,1)$-вектор $\bar{x} = (x_1, \dots, x_n) \in H_n$ согласно равенству

$$x^{[\alpha,g]} = \bigl(x_{1^\alpha}^{g(1)}, x_{2^\alpha}^{g(2)}, \dots, x_{n^\alpha}^{g(n)}\bigr).$$

Группа подстановок $\operatorname{Iso} H_n$ является группой автоморфизмов n-мерного куба и n-мерного октаэдра, поэтому называется *(n-мерной) гипероктаэдральной группой.* Аналогичную конструкцию можно рассматривать для симметрических групп над произвольными множествами: если $S(Y)$ — симметрическая группа над множеством Y, то $Z_2 \wr S(Y)$ — это группа, элементами которой являются пары вида $[\alpha, g]$, $\alpha \in S(Y)$, $g \in Z_2^Y$, причем действие такой пары на элементы множества $\{0,1\}^Y$ определяется условием

$$h(t)^{[\alpha,g]} = [h(t^\alpha)]^{g(t)}, \quad h(t) \in \{0,1\}^Y. \tag{11}$$

В результате получаем группу подстановок $(Z_2 \wr S(Y), \{0,1\}^Y)$, которая может рассматриваться как обобщение гипероктаэдральных групп конечных размерностей на бесконечномерный случай. Однако так определенная группа для наших целей слишком «большая». Интерес представляют случаи, когда на множестве Y задана структура топологического (в частности, метрического) пространства или пространства с мерой, а конструкция определяется с учетом этой дополнительной структуры.

(i) Пусть Y — топологическое пространство, $\operatorname{Homeo}(Y)$ — группа гомеоморфизмов пространства Y, $\operatorname{Fun}(Y, Z_2)$ — группа всех отображений из Y в Z_2 с покомпонентным сложением $\oplus$ по модулю 2, т. е.

$$(h_1 \oplus h_2)(x) = h_1(x) \oplus h_2(x), \quad x \in Y, \tag{12}$$

для любых $h_1, h_2 \in \operatorname{Fun}(Y, Z_2)$. Обозначим символом $\operatorname{Fun}_C(Y, Z_2)$ подгруппу $\operatorname{Fun}(Y, Z_2)$, состоящую из всех непрерывных отображений из Y в Z_2. Группа $\operatorname{Homeo}(Y)$ действует на $\operatorname{Fun}_C(Y, Z_2)$ обобщенными сдвигами: для любых $g \in \operatorname{Homeo}(Y)$, $h \in \operatorname{Fun}_C(Y, Z_2)$ полагаем

$$h^g(x) = h(x^g), \quad x \in Y. \tag{13}$$

Действие (13) является автоморфизмом группы $\operatorname{Fun}_C(Y, Z_2)$. Следовательно, можно рассмотреть полупрямое произведение

$$\operatorname{Fun}_C(Y, Z_2) \rtimes \operatorname{Homeo}(Y), \tag{14}$$

которое естественно считать топологическим аналогом сплетения $Z_2 \wr S(Y)$.

(ii) Пусть $(Y, \mathscr{F}, \mu)$ — пространство с мерой, $\operatorname{Fun}_\mu(Y, Z_2)$ — группа измеримых отображений из Y в Z_2 с групповой операцией (12). Группа $\operatorname{Aut}(Y, \mu)$ действует на группе $\operatorname{Fun}_\mu(Y, Z_2)$ автоморфизмами согласно равенству (13), поэтому естественно возникает полупрямое произведение

$$\operatorname{Fun}_\mu(Y, Z_2) \rtimes \operatorname{Aut}(Y, \mu), \tag{15}$$

которое можно считать измеримым аналогом сплетения $Z_2 \wr S(Y)$.

(iii) Пусть (Y, ρ, μ) — пространство с метрикой ρ и мерой μ. Определим $\mathrm{Aut}_C(Y, \mu)$ как пересечение групп $\mathrm{Homeo}(Y)$ и $\mathrm{Aut}(Y, \mu)$. Поскольку все непрерывные функции из $\mathrm{Fun}(Y, Z_2)$ измеримы, группа $\mathrm{Aut}_C(Y, \mu)$ действует автоморфизмами на группе $\mathrm{Fun}_C(Y, Z_2)$, т. е. можно сконструировать полупрямое произведение

$$\mathrm{Fun}_C(Y, Z_2) \rtimes \mathrm{Aut}_C(Y, \mu), \tag{16}$$

которое является непрерывно-измеримым аналогом сплетения $Z_2 \wr S(Y)$.

Полупрямые произведения (14)–(16) действуют на множествах $\mathrm{Fun}_C(Y, \{0, 1\})$ и $\mathrm{Fun}_\mu(Y, \{0, 1\})$ согласно равенству (13). В результате получаем группы преобразований, которые естественно рассматривать как соответствующие аналоги (топологический, измеримый, непрерывно-измеримый) гипероктаэдральных групп. В дальнейшем понадобятся только полупрямые произведения (15), (16). Чтобы подчеркнуть, что эти конструкции вполне аналогичны сплетению, будем обозначать их символами $Z_2 \wr_\mu \mathrm{Aut}(Y, \mu)$ и $Z_2 \wr_{C\mu} \mathrm{Aut}_C(Y, \mu)$ соответственно.

4.2. Исследуем теперь строение группы изометрий пространства Хемминга $\mathscr{H}(u)$, где u — некоторое супернатуральное число.

Теорема 2. *Пусть u — произвольное супернатуральное число, и пусть $\tau = (m_1, m_2, \dots)$ — строго возрастающая делимая последовательность натуральных чисел такая, что $\mathrm{char}(\tau) = u$. Группа изометрий пространства Хемминга $\mathscr{H}(u)$ изоморфна как группа преобразований непрерывно-измеримому аналогу* (16) *гипероктаэдральной группы:*

$$\mathrm{Iso}\, \mathscr{H}(u) \simeq Z_2 \wr_{C\mu} \mathrm{Aut}_C(\partial T_\tau, \mu), \tag{17}$$

где T_τ — сферически однородное корневое дерево и μ — мера Бернулли, определенная равенством (9) *на σ-алгебре открыто-замкнутых множеств пространства ∂T_τ.*

Для доказательства теоремы понадобятся два вспомогательных утверждения комбинаторного характера о пространствах Хемминга.

Для любых точек x, y некоторого метрического пространства (Y, ρ) *интервалом* с концами x, y называется множество $[x, y] = \{z \in Y \mid \rho(x, z) + \rho(z, y) = \rho(x, y)\}$.

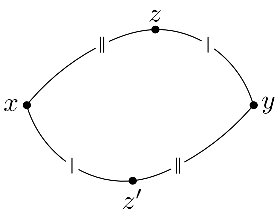

Рис. 1.

Лемма 6. *Пусть $u \in \mathbb{SN}$, $\mathscr{H}(u)$ — пространство u-периодических* $(0,1)$*-последовательностей. Для любых $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z}$ таких, что $\mathbf{z} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, существует единственная точка $\mathbf{z_1} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, для которой выполнены равенства (рис.* 1)

$$\begin{gathered} d_{\mathscr{H}}(\mathbf{z}, \mathbf{z_1}) = d_{\mathscr{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad d_{\mathscr{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z_1}) = d_{\mathscr{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{z_1}), \\ d_{\mathscr{H}}(\mathbf{x}, \mathbf{z_1}) = d_{\mathscr{H}}(\mathbf{y}, \mathbf{z}). \end{gathered} \tag{18}$$

Доказательство. Поскольку $\mathscr{H}(u)$ является объединением возрастающей цепи конечных пространств Хемминга, в нем будет выполняться каждое свойство конечных систем точек при условии, что оно выполняется в конечных пространствах H_m начиная с некоторого натурального числа m. Поэтому достаточно убедиться в существовании и единственности точки $\mathbf{z_1}$ в условиях леммы для конечных пространств Хемминга. Пусть $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ — точки пространства H_m. Предположим сначала, что $d_{H_m}(\bar{x}, \bar{y}) = m$. Тогда $[\bar{x}, \bar{y}] = H_m$ и для точки $\bar{z}$ существует единственная антиподальная точка $\bar{z}_1$, т. е. такая, что $d_{H_m}(\bar{z}, \bar{z}_1) = m$. Точка $\bar{z}_1$ удовлетворяет всем равенствам (18). Предположим теперь, что $d_{H_m}(\bar{x}, \bar{y}) = k < m$. Тогда векторы $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ имеют $m-k$ общих координат. Спроецируем эти векторы на пространство H_k так, чтобы векторы $\bar{x}, \bar{y}$ не имели общих координат. Согласно доказанному выше точка $\bar{t}$, антиподальная к проекции $\bar{z}$ в H_k, удовлетворяет равенствам вида (18) и единственным образом определяется этими условиями. Дописывая в вектор t общие с векторами $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ координаты с номерами, по которым осуществлялось проектирование, получим точку $\bar{z}_1 \in H_m$, удовлетворяющую равенствам (18). Она является единственно возможной в силу однозначности конструкции.

Замечание 1. Если условия леммы для точек $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}, \bar{z}_1$ пространства H_m (или $\mathscr{H}(u)$) выполнены, то будем говорить, что точка $\bar{z}_1$ *определяется* тройкой точек $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}]$. Заметим, что если точка $\bar{z}_1$ определяется точками $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$, то в силу антиподальности пространства Хемминга H_m точки x, y, z определяются тройками точек $[\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{y}]$, $[\bar{z}, \bar{z}_1, \bar{x}]$, $[\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}_1]$ соответственно.

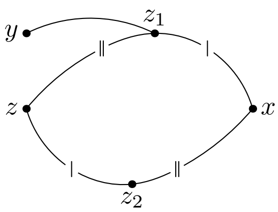

Рис. 2.

Лемма 7. *Для любых трех точек* $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \mathscr{H}(u)$ *существуют однозначно определенные точки* $\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2} \in \mathscr{H}(u)$ *такие, что* $\mathbf{z_1}, \mathbf{z_2} \in [\mathbf{x}, \mathbf{z}]$, $\mathbf{z_1} \in [\mathbf{x}, \mathbf{y}]$, $\mathbf{x} \in [\mathbf{y}, \mathbf{z_2}]$, *причем точка* $\mathbf{z_2}$ *определяется тройкой точек* $[\mathbf{x}, \mathbf{z}, \mathbf{z_1}]$ *(рис.* 2*).*

Доказательство. Как и при доказательстве предыдущей леммы, достаточно рассмотреть случай конечных пространств Хемминга. Пусть m — фиксированное натуральное число. Поскольку пространство Хемминга H_m однородно, утверждение леммы достаточно доказать в случае, когда вектор $\bar{x} \in H_m$ нулевой. Пусть $\bar{y} = (y_1, \ldots, y_m)$, $\bar{z} = (z_1, \ldots, z_m)$, и пусть $\bar{z}_1$ — покомпонентное произведение векторов $\bar{y}$, $\bar{z}$. Тогда, очевидно, $\bar{z}_1 \in [\bar{x}, \bar{y}]$, $\bar{z}_1 \in [\bar{x}, \bar{z}]$, причем $\bar{z}_1$ определяется по $\bar{y}$ и $\bar{z}$ однозначно. Точку $\bar{z}_2$ зададим как определеную тройкой точек $[\bar{x}, \bar{z}, \bar{z}_1]$. Тогда в силу замечания 1 точка $\bar{x}$ определяется тройкой $[\bar{z}_1, \bar{z}_2, \bar{z}]$, а значит, $\bar{x} \in [\bar{z}_1, \bar{z}_2]$. Поскольку $\bar{z}_1 \in [\bar{y}, \bar{x}]$, то $\bar{x} \in [\bar{y}, \bar{z}_2]$, и все требования леммы выполнены.

Изометрия g метрического пространства (Y, d_Y) называется *инволюцией*, если $g^2 = \mathrm{id}$, причем расстояние $d_Y(x, x^g)$ не зависит от выбора точки x.

Любая функция $f \in \mathrm{Fun}_C(\partial T, Z_2)$ действует на множестве ΩT_τ всех открыто-замкнутых подмножеств пространства ∂T_τ следующим образом. Функция f определяет разбиение ∂T_τ на два подмножества O_f и J_f:

$$O_f = \{\gamma \in \partial T_\tau \mid f(\gamma) = 0\}, \quad J_f = \{\gamma \in \partial T_\tau \mid f(\gamma) = 1\}.$$

Непрерывность f означает, что подмножества O_f и J_f являются открыто-замкнутыми. Для любого подмножества $A \in \Omega T_\tau$ полагаем $A^f = A \triangle J_f$.

Отображение $w_f : A \to A^f$, $A \in \Omega T_\tau$, определено коректно, так как $A \triangle J_f$ открыто-замкнутое. Кроме того, оно является биекцией на ΩT_τ и сохраняет метрику d_μ. Поскольку для любых $A \in \Omega T_\tau$, $f, g \in \mathrm{Fun}_C(\partial T, Z_2)$ имеем

$$(A^f)^g = (A \triangle J_f) \triangle J_g = A \triangle (J_f \triangle J_g) = A^{fg},$$

получили действие $\mathrm{Fun}_C(\partial T, Z_2)$ на ΩT_τ. Так как для любых $A \in \Omega T_\tau$, $f \in \mathrm{Fun}_C(\partial T, Z_2)$ справедливы равенства

$$A^{f^2} = A\triangle(J_f\triangle J_f) = A,$$

то $f^2 = \mathrm{id}$. Кроме того, поскольку для любых $A \in \Omega T_\tau$ и $f \in \mathrm{Fun}_C(\partial T, Z_2)$ верны равенства

$$A\triangle A^f = A\triangle(A\triangle J_f) = J_f,$$

расстояние $d_\mu(A, A^f) = \mu(A\triangle A^f) = \mu(J_f)$ не зависит от выбора A. Следовательно, любой элемент f из $\mathrm{Fun}_C(\partial T, Z_2)$ действует на ΩT_τ как трансляция. Будем называть эти трансляции *стандартными трансляциями* пространства ΩT_τ.

Доказательство теоремы 2. Согласно теореме 1 охарактеризовать группу изометрий пространства Хемминга $\mathscr{H}(u)$ — это то же самое, что исследовать группу изометрий пространства ΩT_τ открыто-замкнутых подмножеств границы ∂T_τ сферически однородного дерева T_τ с метрикой d_μ, определенной равенством (10), где $\tau = (m_1, m_2, \dots)$ — строго возрастающая делимая последовательность натуральных чисел такая, что $\mathrm{char}(\tau) = u$.

Убедимся сначала, что каждая трансляция пространства ΩT_τ стандартна. Заметим, что группа стандартных трансляций действует на пространстве ΩT_τ регулярно, т. е. для любых $A, B \in \Omega T_\tau$ существует и единствена стандартная трансляция f такая, что $A^f = B$. Поэтому достаточно доказать, что для произвольных $A, B \in \Omega T_\tau$ существует только одна трансляция, переводящая A в B. Пусть g — некоторая трансляция пространства ΩT_τ такая, что $A^g = B$. Рассмотрим образы других точек X из ΩT_τ. Возможны следующие случаи.

(i) $X \in [A, B]$. В этом случае поскольку g — трансляция, выполняются равенства

$$\begin{aligned} d_\mu(A, X^g) &= d_\mu(A^g, X) = d_\mu(B, X),\\ d_\mu(B, X^g) &= d_\mu(B^g, X) = d_\mu(A, X),\\ d_\mu(X, X^g) &= d_\mu(A, A^g) = d_\mu(A, B). \end{aligned} \tag{19}$$

Из первых двух равенств (19) следует, что $X^g \in [A, B]$. Учитывая лемму 6, отсюда получаем, что существует в точности одна точка с такими свойствами, т. е. X^g в этом случае определяется единственным образом.

(ii) $A \in [X, B]$ (или $B \in [A, X]$). Поскольку g — трансляция, имеют место соотношения

$$d_\mu(X^g, X) = d_\mu(A, B), \quad d_\mu(X^g, A) = d_\mu(X, B), \quad d_\mu(X^g, B) = d_\mu(X, A).$$

Согласно лемме 6 и в этом случае X^g определяется единственным образом как точка, определяемая тройкой точек $[X, B, A]$ (или $[X, B, A]$).

(iii) Точки X, A, B таковы, что ни одна из них не принадлежит отрезку, концами которого являются две другие. Иными словами, условия (i), (ii) не имеют места. Воспользуемся леммой 7, применяя ее к точкам A, B, X. Согласно этой лемме существуют однозначно определенные точки Z_1 и Z_2 (см. рис. 2) такие, что $Z_1, Z_2 \in [A, X]$, $Z_1 \in [A, B]$, $X \in [B, Z_2]$, причем Z_2 определяется тройкой точек $[A, X, Z_1]$. Тогда точка X определяется тройкой точек $[Z_1, Z_2, A]$ и согласно пп. (i), (ii) точки Z_1^g, Z_2^g определены однозначно. Кроме того, поскольку g —

изометрия, имеют место равенства

$$d_\mu\big(Z_1^g, X^g\big) = d_\mu(Z_1, X) = d_\mu(A, Z_2) = d_\mu\big(B, Z_2^g\big),$$
$$d_\mu\big(Z_2^g, X^g\big) = d_\mu(Z_2, X) = d_\mu(A, Z_1) = d_\mu\big(B, Z_1^g\big),$$
$$d_\mu(B, X^g) = d_\mu(A, X) = d_\mu(Z_1, Z_2) = d_\mu\big(Z_1^g, Z_2^g\big),$$

из которых следует, что точка X^g определяется тройкой точек $\big[Z_1^g, Z_2^g, B\big]$, т. е. в этом случае образ X^g определен однозначно по заданным X, A, B.

Таким образом, g совпадает с некоторой стандартной трансляцией, а поскольку она выбиралась произвольным образом, каждая трансляция пространства ΩT_τ стандартна. Поэтому все трансляции пространства ΩT_τ образуют нормальную подгруппу в $\operatorname{Iso}\Omega T_\tau$.

Пусть g — произвольная изометрия пространства ΩT_τ, причем $g(\varnothing) = A$. Тогда существует единственная стандартная трансляция $h \in \operatorname{Fun}_C(\partial T, Z_2)$ такая, что $gh^{-1}(\varnothing) = \varnothing$, т. е. gh^{-1} содержится в стабилизаторе G_0 точки $\varnothing$ из ΩT_τ. Поскольку $G_0 \cap \operatorname{Fun}_C(\partial T, Z_2) = \mathrm{id}$, группа изометрий пространства ΩT_τ раскладывается в полупрямое произведение

$$\operatorname{Iso}\Omega T_\tau \simeq \operatorname{Fun}_C(\partial T, Z_2) \rtimes G_0$$

подгруппы G_0 и нормального делителя $\operatorname{Fun}_C(\partial T, Z_2)$.

Таким образом, достаточно убедиться, что стабилизатор G_0 совпадает с группой $\operatorname{Aut}_C(\partial T_\tau, \mu) = \operatorname{Homeo}(\partial T_\tau) \cap \operatorname{Aut}(\partial T_\tau, \mu)$, т. е. что преобразование g пространства ∂T_τ, для которого $g(\varnothing) = \varnothing$, является изометрией пространства ΩT_τ в том и только том случае, когда оно непрерывно и сохраняет меру.

Пусть g — изометрия ΩT_τ такая, что $g(\varnothing) = \varnothing$. Поскольку g и g^{-1} являются изометриями, они переводят открыто-замкнутые подмножества границы ∂T_τ в открыто-замкнутые же подмножества, а следовательно, непрерывны. Поэтому $g \in \operatorname{Homeo}(\partial T_\tau)$. Кроме того, g действует на ∂T_τ, переводя множества меры нуль в множества меры нуль. Отсюда получаем, что g при действии на ∂T_τ сохраняет меру Бернулли, т. е. $g \in \operatorname{Aut}(\partial T_\tau, \mu)$. Следовательно, имеет место включение $G_0 \subseteq \operatorname{Homeo}(\partial T_\tau) \cap \operatorname{Aut}(\partial T_\tau, \mu)$.

Пусть теперь $g \in \operatorname{Homeo}(\partial T_\tau) \cap \operatorname{Aut}(\partial T_\tau, \mu)$. Поскольку $g \in \operatorname{Homeo}(\partial T_\tau)$, то g и g^{-1} непрерывны и, следовательно, переводят открыто-замкнутые подмножества ∂T_τ в открыто-замкнутые, т. е. определяют биективные преобразования пространства ΩT_τ. С другой стороны, так как $g \in \operatorname{Aut}(\partial T_\tau, \mu)$, то g сохраняет меру открыто-замкнутых подмножеств из ∂T_τ и множества меры нуль переводит в множества меры нуль. Следовательно, g сохраняет расстояние d_μ в пространстве ΩT_τ, а значит, является изометрией пространства ΩT_τ. Таким образом, $\operatorname{Aut}_C(\partial T_\tau, \mu) \subseteq G_0$, и имеет место требуемое равенство. Теорема доказана.

Поскольку для любой бесконечной строго возрастающей делимой последовательности τ пополнение пространства Хемминга τ-периодических последовательностей изометрично пополнению $\mathscr{C}\mathscr{H}$ пространства $\mathscr{H}$ всех периодических $(0,1)$-последовательностей, далее группа изометрий пространства $\mathscr{C}\mathscr{H}$ может быть охарактеризована следующим образом.

Следствие 3. *Группа изометрий* $\operatorname{Iso}\mathscr{C}\mathscr{H}$ *пополнения* $\mathscr{C}\mathscr{H}$ *пространства* $\mathscr{H}$ *всех периодических* $(0,1)$*-последовательностей изоморфна как группа преобразований измеримому аналогу* (15) *гипероктаэдральной группы:*

$$\operatorname{Iso}\mathscr{H} \simeq Z_2 \wr_\mu \operatorname{Aut}(\partial T, \mu),$$

где T — некоторое сферически однородное корневое дерево, сферический индекс которого является строго возрастающей последовательностью, а μ — мера Бернулли, определенная равенством (9) *на σ-алгебре открыто-замкнутых множеств пространства ∂T.*

Доказательство. Заметим вначале, что, поскольку пространство $\mathscr{C}\mathscr{H}$ является пополнением пространства $\mathscr{H}$, для него также будут справедливы леммы 6 и 7. Кроме того, согласно предложению 1 пополнение пространства $\mathscr{H}$ изометрично пространству ΘT всех измеримых подмножеств (с точностью до множеств меры нуль) пространства $(\partial T, \mu)$ с метрикой d_μ, определяемой равенством (10). Проведя рассуждения, аналогичные доказательству теоремы 2, получим, что группа изометрий пространства ΘT раскладывается в полупрямое произведение

$$\operatorname{Iso}\Theta T \simeq \operatorname{Fun}_C(\partial T, Z_2) \rtimes G_0$$

подгруппы G_0 (стабилизатора точки $\varnothing$) и нормального делителя $\operatorname{Fun}_C(\partial T, Z_2)$. Поэтому достаточно убедиться, что преобразование g пространства ∂T, для которого $g(\varnothing) = \varnothing$, является изометрией пространства ΘT в том и только том случае, когда оно сохраняет меру. Это следует непосредственно из определения метрики d_μ.

4.3. Группа непрерывных сохраняющих меру автоморфизмов пространства с мерой $(\partial T_\tau, \mu)$, где $\tau = (m_1, m_2, \dots)$ — строго возрастающая делимая последовательность натуральных чисел, может быть охарактеризована следующим образом. Пусть $S_{m_1}, S_{m_2}, \dots$ — последовательность симметрических групп степеней $m_1, m_2, \dots$. Поскольку число m_i равно количеству вершин i-го уровня L_i дерева T_τ, группа S_{m_i} действует подстановками на множестве L_i. При этом само дерево определяет вложение S_{m_i} в $S_{m_{i+1}}$, которое является строго диагональным вложением в смысле [10], т. е. образ S_{m_i} на L_{i+1} действует естественно на каждой из своих орбит. В самом деле, если подстановка $\pi \in S_{m_i}$ определяет перестановку

$$\hat{\pi} : v_i \to v_{\pi(i)}, \quad i = 1, 2, \dots,$$

вершин из L_i, то ей соответствует подстановка $\delta_{r_i}(\pi)$ вершин $(i+1)$-го уровня, возникающая при перестановке с помощью $\hat{\pi}$ корневых поддеревьев T_τ с корнями из L_i. Отображение δ_{r_i} является вложением S_{m_i} в $S_{m_{i+1}}$. Таким образом, возникает прямой спектр симметрических групп $\langle S_{m_i}, \delta_{r_i}\rangle_{i\in\mathbb{N}}$, предельная группа

$$S(\tau) = \varinjlim \langle S_{m_i}, \delta r_i\rangle$$

которого естественным образом действует на границе дерева ∂T_τ. Группа $S(\tau)$ принадлежит классу так называемых однородно симметрических групп [10] и однозначно с точностью до изоморфизма определяется супернатуральным числом $\operatorname{char}(\tau)$.

На группе гомеоморфизмов $\operatorname{Homeo}(\partial T_\tau)$ определяется стандартная метрика

$$\tilde{\rho}_\tau(g, f) = \max_{x\in\partial T_\tau} \rho_\tau(x^g, x^f) \tag{20}$$

для всех $g, f \in \operatorname{Homeo}(\partial T_\tau)$.

Лемма 8 [11]. *Для произвольной строго возрастающей делимой последовательности $\tau = (m_1, m_2, \dots)$ группа $S(\tau)$ является всюду плотной подгруппой группы $\operatorname{Aut}_C(\partial T_\tau)$ с топологией, индуцированной метрикой $\tilde{\rho}_\tau$.*

С другой стороны, действуя на вершинах i-го уровня дерева T_τ перестановками, симметрическая группа S_{m_i} переставляет подмножества вершин, т. е.

действует на точках пространства Хемминга H_{m_i}. При таком действии она является частью группы изометрий этого пространства, т. е. сплетения $Z_2 \wr S_{m_i}$, действующего на цилиндрических подмножествах i-го уровня границы дерева ∂T_τ. При переходе к $(i+1)$-му уровню получаем вложение $Z_2 \wr S_{m_i}$ в $Z_2 \wr S_{m_{i+1}}$, при котором S_{m_i} погружается в $S_{m_{i+1}}$ так, как это описано выше, а подгруппа трансляций, изоморфная $\underbrace{Z_2 \times \cdots \times Z_2}_{m_i}$, погружается в подгруппу $\underbrace{Z_2 \times \cdots \times Z_2}_{m_{i+1}}$ согласно правилу

$$(x_1, x_2, \dots, x_{m_i}) \hookrightarrow (\underbrace{x_1, \dots, x_1}_{r_i}, \underbrace{x_2, \dots, x_2}_{r_i}, \dots, \underbrace{x_{m_i}, \dots, x_{m_i}}_{r_i}).$$

Элементы объединения возрастающей цепи подгрупп $\underbrace{Z_2 \times \cdots \times Z_2}_{m_i}$ можно охарактеризовать как преобразования из границы дерева ∂T_τ в Z_2, для каждого из которых существует разбиение пространства ∂T_τ на конечное число шаров таких, что на каждом шаре преобразование принимает постоянное значение. Поскольку пространство ∂T_τ компактно, такие преобразования являются непрерывными функциями из ∂T_τ в Z_2, т. е. принадлежат $\mathrm{Fun}_C(\partial T, Z_2)$. Таким образом, объединение возрастающей цепи подгрупп $Z_2 \wr S_{m_i}$ изоморфно полупрямому произведению $\mathrm{Fun}_C(\partial T, Z_2) \rtimes S(\tau)$.

На группе $\mathrm{Fun}_C(\partial T_\tau, Z_2)$ определим метрику

$$\varrho_\tau(g, f) = \max_{x \in \partial T_\tau} (x^g + x^f),$$

которая индуцирует дискретную топологию на $\mathrm{Fun}_C(\partial T_\tau, Z_2)$. Из приведенных рассуждений и леммы 8 следует

Теорема 3. *Пусть $\tau = (m_1, m_2, \dots)$ — строго возрастающая делимая последовательность натуральных чисел. Тогда группа изометрий пространства Хемминга τ-периодических последовательностей $\mathrm{Iso}\,\mathscr{H}(\tau)$ является замыканием индуктивного предела групп изометрий конечных пространств Хемминга $\mathrm{Iso}\,\mathscr{H}_{m_i}$, рассматриваемого как подгруппа в группе $\mathrm{Fun}_C(\partial T_\tau, Z_2) \rtimes \mathrm{Homeo}(\partial T_\tau)$ в топологии, являющейся тихоновским произведением топологий, индуцированных метриками ϱ_τ и $\tilde{\rho}_\tau$.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно показать, что для любой изометрии $f \in \mathrm{Iso}\,\mathscr{H}(\tau)$ существует последовательность $\{f_n, n \geq 1\}$ элементов индуктивного предела групп изометрий конечных пространств Хемминга такая, что $\lim\limits_{n\to\infty} f_n = f$ в пространстве $\mathrm{Fun}_C(\partial T_\tau, Z_2) \rtimes \mathrm{Homeo}\,\partial T_\tau$. Поскольку группа $\mathrm{Fun}_C(\partial T_\tau, Z_2) \rtimes \mathrm{Homeo}(\partial T_\tau)$ является полупрямым произведением групп, любой элемент группы изометрий пространства Хемминга τ-периодических последовательностей $\mathrm{Iso}\,\mathscr{H}(\tau)$ можно представить в виде пары элементов из $\mathrm{Fun}_C(\partial T_\tau, Z_2)$ и $\mathrm{Homeo}(\partial T_\tau)$, а учитывая теорему 2 — из $\mathrm{Fun}_C(\partial T_\tau, Z_2)$ и $\mathrm{Homeo}(\partial T_\tau) \cap \mathrm{Aut}(\partial T_\tau, \mu)$. Следовательно, существует единственное разложение изометрии $f = (g, h)$ такое, что $g \in \mathrm{Fun}_C(\partial T_\tau, Z_2)$, $h \in \mathrm{Homeo}(\partial T_\tau) \cap \mathrm{Aut}(\partial T_\tau, \mu)$. Тогда существование последовательности $\{f_n, n \geq 1\}$ эквивалентно существованию двух последовательностей $\{g_n, n \geq 1\}$ и $\{h_n, n \geq 1\}$ из групп $\mathrm{Fun}_C(\partial T_\tau, Z_2)$ и $\mathrm{Homeo}(\partial T_\tau) \cap \mathrm{Aut}(\partial T_\tau, \mu)$ соответственно таких, что $\lim\limits_{n\to\infty} g_n = g$, $\lim\limits_{n\to\infty} h_n = h$. Из приведенных перед теоремой рассуждений следует, что индуктивный предел групп изометрий конечных пространств Хемминга можно охарактеризовать как полупрямое произведение групп $\mathrm{Fun}_C(\partial T, Z_2)$ и

$S(\tau)$. Поэтому существование последовательности $\{g_n, n \geq 1\}$ очевидно, а существование $\{h_n, n \geq 1\}$ вытекает из леммы 8.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Blanchard F., Formenti E., Kurka P.* Cellular automata in Cantor, Besicovitch and Weil topological spaces // Complex Syst. 1997. V. 11. P. 107–123.

2. *Вершик А. М.* Теория убывающих последовательностей измеримых разбиений // Алгебра и анализ. 1994. Т. 6, № 4. С. 1–68.

3. *Вершик А. М.* Убывающие последовательности измеримых разбиений и их применения // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 4. С. 748–751.

4. *Вершик А. М.* Метрика Канторовича: начальная история и малоизвестные применения // Зап. научн. сем. ПОМИ. 2004. Т. 312. С. 69–85. (Теория представлений, динамические системы. XI, специальный выпуск).

5. *Гусева О. В.* Классификация последовательностей измеримых разбиений // Вестн. ЛГУ. 1965. Т. 1, № 1. С. 14–23.

6. *Рубштейн Б. А.* Об убывающих последовательностях измеримых разбиений // Докл. АН СССР. 1972. Т. 205, № 3. С. 526–530.

7. *Cameron P. J., Tarzi S.* Limits of cubes // Topology Appl. 2008. V. 155. P. 1454–1461.

8. *Григорчук Р. И., Некрашевич В. В., Сущанский В. И.* Автоматы, динамические системы и группы // Тр. Мат. ин-та РАН им. В. А. Стеклова. 2000. Т. 231. С. 134–214.

9. *Калужнин Л. А., Сущанский В. И., Устименко-Бакумовский В. А.* Экспоненцирование в теории групп подстановок и ее приложениях // Мат. VI Всесоюз. конф. по теории групп. Киев: Ин-т математики АН УССР, 1979. С. 135–145.

10. *Kroshko N. V., Sushchansky V. I.* Direct limits of symmetric and alternating groups with strictly diagonal embeddings // Arch. Math. 1998. V. 71, N 3. P. 173–182.

11. *Лавренюк Я. В., Некрашевич В. В.* Групи зберігаючих міру гомеоморфізмів множини Кантора // Доп. НАН України. 2008. № 6. С. 28–31.

Статья поступила 23 октября 2012 г.

Сущанский Виталий Иванович
Institute of Mathematics, Silesian University of Technology
ul. Kaszubska, 23, Gliwice 44-100, Poland
vitaliy.sushchanskyy@polsl.pl

Олийнык Богдана Витальевна
Киевский национальный университет им. Т. Шевченко,
механико-математический факультет,
ул. Владимирская, 64, Киев 01601, Украина
bogdana.oliynyk@gmail.com