Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.542

МАКСИМАЛЬНЫЕ ПОДКЛАССЫ ФИТТИНГА КЛАССА ВСЕХ КОНЕЧНЫХ π–ГРУПП

Н. В. Савельева

Аннотация. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем π-*максимальным*, если $\mathfrak{F}$ максимален (по включению) в классе $\mathfrak{E}_\pi$ всех конечных π-групп, где π обозначает непустое множество простых чисел. Установлен критерий π-максимальности для класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ конечных π-групп: доказано, что нетривиальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является π-максимальным в точности тогда, когда найдется простое число $p \in \pi$ такое, что для любой π-группы G индекс $\mathfrak{F}$-радикала $G_\mathfrak{F}$ в группе G равен 1 или p. Отсюда следует известный результат Лауэ о необходимом и достаточном условии максимальности произвольного класса Фиттинга конечных групп в классе $\mathfrak{E}$ всех конечных групп. Полученный критерий π-максимальности также дает подтверждение отрицательного решения вопроса А. Н. Скибы о том, что в локальном классе Фиттинга не существует максимальных по включению подклассов Фиттинга (см. вопрос 13.50, Коуровская тетрадь (нерешенные вопросы теории групп), 14-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1999).

Ключевые слова: класс Фиттинга, максимальный (по включению) подкласс Фиттинга, π-максимальный класс Фиттинга, критерий π-максимальности классов Фиттинга, класс всех конечных π-групп, локальный класс Фиттинга, класс Локетта.

Введение

Максимальные объекты в теории классов групп приобрели особую роль в связи с развитием структурной теории классов Фиттинга. В частности, ряд открытых вопросов теории классов связан с проблемой существования и описания максимальных (по включению) подклассов Фиттинга данного класса Фиттинга. Напомним, что собственный подкласс Фиттинга $\mathfrak{F}$ класса Фиттинга $\mathfrak{H}$ называется *максимальным в* $\mathfrak{H}$ (этот факт обозначается через $\mathfrak{F} < \cdot\mathfrak{H}$), если из включений $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{M} \subseteq \mathfrak{H}$, где $\mathfrak{M}$ — класс Фиттинга, всегда следует, что $\mathfrak{M}$ совпадает либо с $\mathfrak{F}$, либо с $\mathfrak{H}$.

Интенсивное изучение максимальных классов Фиттинга и их роли в теории классов групп начато в середине 70-х годов прошлого столетия в классе $\mathfrak{S}$ всех конечных разрешимых групп благодаря основополагающей работе Брайса и Косси [1], в которой сформулирована проблема: найти критерии максимальности класса Фиттинга $\mathfrak{X}$ в произвольном классе Фиттинга $\mathfrak{Y}$. В общем случае эта проблема остается открытой, и, как отмечено Дерком и Хоуксом (см. [2, с. 735]), является одной из трудных в теории классов. До настоящего времени она решена лишь для случаев $\mathfrak{Y} = \mathfrak{S}$ [1] и $\mathfrak{Y} = \mathfrak{E}$ [3], где $\mathfrak{E}$ — класс всех конечных групп, а для $\mathfrak{Y} \subset \mathfrak{S}$ в [1] найдены отдельно достаточное и необходимое условия для максимальности $\mathfrak{X}$ в $\mathfrak{Y}$. В дальнейшем критерий максимальности Брайса — Косси [1] был расширен в [4] на случай $\mathfrak{Y} = \mathfrak{S}_\pi$, где π обозначает непустое множество простых чисел и $\mathfrak{S}_\pi$ — класс всех конечных разрешимых

π-групп. В данной работе мы называем π-*максимальными классами Фиттинга* максимальные подклассы Фиттинга класса $\mathfrak{E}_\pi$ всех конечных π-групп.

Решению указанной выше проблемы отыскания необходимого и достаточного условия максимальности для случая класса $\mathfrak{E}_\pi$ посвящена настоящая работа. Основной ее результат — теорема 3.2, представляющая критерий π-максимальности. Доказано, что нетривиальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является π-максимальным в точности тогда, когда найдется простое число $p \in \pi$ такое, что для любой π-группы G индекс $\mathfrak{F}$-радикала $G_\mathfrak{F}$ в группе G равен 1 или p. Полученный критерий π-максимальности вслед за результатами работ [4, 5], опровергает гипотезу А. Н. Скибы [6, вопрос 13.50] о том, что в локальном классе Фиттинга не существует максимальных по включению подклассов Фиттинга.

Все рассматриваемые группы считаются конечными, если не оговорено противное. В определениях и обозначениях следуем [2].

1. Предварительные сведения

Приведем вначале некоторые известные определения и результаты теории групп и теории классов групп, которые будем использовать.

Класс групп $\mathfrak{F}$ называется *классом Фиттинга* или *радикальным классом*, если каждая нормальная подгруппа любой группы G из $\mathfrak{F}$ также принадлежит $\mathfrak{F}$, и из того, что нормальные подгруппы M и N принадлежат $\mathfrak{F}$, всегда следует, что их произведение MN принадлежит $\mathfrak{F}$. Второе условие данного определения означает, что если $\mathfrak{F}$ — произвольный непустой класс Фиттинга, то произведение $G_\mathfrak{F}$ всех нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп из G принадлежит $\mathfrak{F}$ и является наибольшей из нормальных $\mathfrak{F}$-подгрупп группы G. Подгруппу $G_\mathfrak{F}$ группы G называют ее $\mathfrak{F}$-*радикалом*. Известное свойство $\mathfrak{F}$-радикала характеризует следующее утверждение.

Лемма 1.1 (см. [2, IX.1.1 (a)]). *Если $\mathfrak{F}$ — непустой класс Фиттинга и N — субнормальная подгруппа группы G, то $N_\mathfrak{F} = N \cap G_\mathfrak{F}$.*

В терминах радикалов определяются, в частности, нормальные классы Фиттинга и понятие произведения классов Фиттинга. Напомним, что нормальные классы Фиттинга первоначально были определены в классе $\mathfrak{S}$ всех разрешимых групп в терминах инъекторов групп Блессенолем и Гашюцом [7]. Согласно [7] класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ разрешимых групп называется *нормальным*, если в любой разрешимой $\mathfrak{S}$-группе G ее $\mathfrak{F}$-инъекторы являются в ней нормальными подгруппами. Расширяя это понятие, Лауэ определяет (см. [3] или [2, IX.2.13 (b)]) локально нормальные или $\mathfrak{X}$-нормальные классы Фиттинга в терминах радикалов следующим образом. Класс Фиттинга $\mathfrak{F} \neq (1)$ называется (*локально*) *нормальным в классе Фиттинга* $\mathfrak{X}$ (обозначается $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{X}$) или $\mathfrak{X}$-нормальным, если $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{X}$ и в любой группе $G \in \mathfrak{X}$ ее $\mathfrak{F}$-радикал $G_\mathfrak{F}$ является $\mathfrak{F}$-максимальной подгруппой в G.

Произведением классов Фиттинга $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ называется класс $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = (G \in \mathfrak{E} \mid G/G_\mathfrak{X} \in \mathfrak{Y})$, который также является классом Фиттинга (см. [2, с. 566]). Кроме того, для произвольных классов групп $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ через $\mathrm{Ext}_\mathfrak{X}\,\mathfrak{Y}$ обозначается совокупность всех групп, у которых имеется нормальная $\mathfrak{X}$-подгруппа и фактор-группа по ней принадлежит $\mathfrak{Y}$.

Прежде чем сформулировать некоторые свойства произведений классов Фиттинга, напомним, что класс групп $\mathfrak{X}$ называется *гомоморфом* или Q-*замкнутым* классом, если каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{X}$ принадлежит $\mathfrak{X}$.

Лемма 1.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1) (*см.* [2, с. 566]) *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{Y} \neq \varnothing$, то $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.*

2) *Если $\mathfrak{X}$ и $\mathfrak{Y}$ — классы Фиттинга, причем $\mathfrak{Y}$ является гомоморфом, то имеет место равенство $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{Y}$.*

Доказательство утверждения 2 осуществляется непосредственной проверкой. Действительно, из определения произведения классов Фиттинга легко видеть, что $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} \subseteq \mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{Y}$. Остается показать справедливость обратного включения.

Пусть $G \in \mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{Y}$. Тогда из определения $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{Y}$ следует существование нормальной подгруппы $N \in \mathfrak{X}$ такой, что $G/N \in \mathfrak{Y}$. Поскольку $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга, по определению понятия $\mathfrak{X}$-радикала получаем $N \subseteq G_{\mathfrak{X}}$. Тогда $G/G_{\mathfrak{X}} \cong (G/N)/(G_{\mathfrak{X}}/N)$. Отсюда с учетом того, что класс Фиттинга $\mathfrak{Y}$ является гомоморфом и $G/N \in \mathfrak{Y}$, заключаем, что $G/G_{\mathfrak{X}} \in \mathfrak{Y}$ и $G \in \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$. Следовательно, $\mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{Y} \subseteq \mathfrak{X}\mathfrak{Y}$.

Таким образом, $\mathfrak{X}\mathfrak{Y} = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{X}}\,\mathfrak{Y}$, что и требовалось доказать.

Пусть $\mathbb{P}$ обозначает множество всех простых чисел, $\varnothing \neq \pi \subseteq \mathbb{P}$ и $\pi' = \mathbb{P} \setminus \pi$. Всякое отображение $f : \mathbb{P} \to \{\text{классы Фиттинга}\}$ называют *функцией Хартли* или H-*функцией*. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ называется *локальным*, если существует такая H-функция f, что

$$\mathfrak{F} = \mathfrak{E}_{\pi} \cap \big(\bigcap_{p\in\pi} f(p)\mathfrak{N}_p\mathfrak{E}_{p'}\big),$$

где $\pi = \mathrm{Supp}(f) = \{p \in \mathbb{P} \mid f(p) \neq \varnothing\}$ — носитель f. Легко видеть, что класс Фиттинга $\mathfrak{E}_{\pi}$ локален, поскольку определяется с помощью H-функции f такой, что

$$f(p) = \begin{cases} \mathfrak{E}_{\pi}, & \text{если } p \in \pi, \\ \varnothing, & \text{если } p \in \pi'. \end{cases}$$

В ходе доказательства основного результата будем использовать свойства операторов * и $_{\star}$, называемых *операторами Локетта*. Операторы * и $_{\star}$ определены в [8] следующим образом. Каждому непустому классу Фиттинга $\mathfrak{F}$ посредством оператора * сопоставляется класс $\mathfrak{F}^{\star}$ как наименьший из классов Фиттинга, содержащий $\mathfrak{F}$, такой, что для всех групп G и H имеет место равенство $(G \times H)_{\mathfrak{F}^{\star}} = G_{\mathfrak{F}^{\star}} \times H_{\mathfrak{F}^{\star}}$. Класс $\mathfrak{F}_{\star}$ определяется как пересечение всех таких классов Фиттинга $\mathfrak{X}$, для которых $\mathfrak{X}^{\star} = \mathfrak{F}^{\star}$.

Если $\mathfrak{F}$ совпадает с $\mathfrak{F}^{\star}$, то $\mathfrak{F}$ называется *классом Локетта.*

Семейство классов Локетта обширно. В частности, всякий локальный класс Фиттинга разрешимых групп является классом Локетта [9]. Кроме того, классами Локетта являются радикальные формации произвольных групп, что подтверждает нижеследующая лемма. Напомним, что класс групп $\mathfrak{F}$ называется *формацией*, если каждая фактор-группа любой группы из $\mathfrak{F}$ принадлежит $\mathfrak{F}$ и из $H/A \in \mathfrak{F}$ и $H/B \in \mathfrak{F}$ всегда следует $H/A \cap B \in \mathfrak{F}$. Формация $\mathfrak{F}$ называется *радикальной*, если $\mathfrak{F}$ является также и классом Фиттинга.

Лемма 1.3 (см. [2, X.1.25]). *Всякий Q-замкнутый класс Фиттинга является классом Локетта.*

Приведем также некоторые известные свойства операторов Локетта, необходимые нам в дальнейшем.

Лемма 1.4 (см. [2, X.1.8]). *Если $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{H}$ — непустые классы Фиттинга, * и $_\star$ — операторы Локетта, то*

1) $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^\star$;

2) из $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{H}$ следует $\mathfrak{F}^\star \subseteq \mathfrak{H}^\star$.

Следующий известный результат с помощью оператора Локетта * дает описание необходимого и достаточного условия локальной нормальности классов Фиттинга.

Лемма 1.5 (см. [2, X.3.3]). *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нормален в нетривиальном классе Локетта $\mathfrak{X}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{F}^\star$ является $\mathfrak{X}$-нормальным.*

Для доказательства основного результата нам также потребуются понятие сплетения групп и некоторые его свойства.

Напомним, что если G — группа со своими подгруппами A и B такими, что $A \trianglelefteq AB = G$ и $A \cap B = 1$, то G называется *полупрямым произведением групп* A и B (этот факт обозначается через $G = [A]B$). Элементы из B через сопряженность индуцируют автоморфизм на группе A, т. е. $A^b = A$ для всех $b \in B$. Пусть G, H — некоторые группы и $H = \{h_1, h_2, \dots, h_n\}$. Положим $B = \times_{i=1}^n G_{h_i}$, где $G_{h_i} \cong G$. Если H действует на B следующим образом:

$$(g_{h_1}, g_{h_2}, \dots, g_{h_n})^h = (g_{h_1 h^{-1}}, g_{h_2 h^{-1}}, \dots, g_{h_n h^{-1}}),$$

где $(g_{h_1}, g_{h_2}, \dots, g_{h_n}) \in B$ и $h \in H$, то *регулярным сплетением* $G \wr H$ группы G с группой H называется полупрямое произведение групп B и H с определенным выше действием H на B, т. е. $G \wr H = [H]B$. В этом случае $G^\natural = B$ называется *базисной группой сплетения* $G \wr H$.

Следующая лемма характеризует известные свойства сплетений групп.

Лемма 1.6. *Справедливы следующие утверждения.*

1) (см. [2, A.18.2 (a)]) *Пусть группы G, W, X, Y таковы, что $W = X \wr G$ и $Y \trianglelefteq X$. Тогда $W/Y^\natural \cong (X/Y) \wr G$.*

2) (см. [2, X.2.2]) *Пусть $\mathfrak{F}$ — класс Фиттинга и группа $G \in \mathfrak{E}$. Если группа $G/G_\mathfrak{F}$ неабелева, то $(G \wr H)_\mathfrak{F} < G^\natural$ для всех групп $H \in \mathfrak{E}$.*

Сформулируем также свойства прямых произведений групп, которые будем использовать применительно к базисным группам сплетений.

Лемма 1.7 (см. [10, с. 29, 30]). *Пусть группа G такова, что $G = G_1 \times \dots \times G_n$, и пусть N — нормальная подгруппа группы G. Тогда справедливы следующие утверждения:*

1) если $N = N_1 \times \dots \times N_n$ и $N_i = N \cap G_i$ $(i = 1, \dots, n)$, то $G/N \cong G_1/N_1 \times \dots \times G_n/N_n$;

2) если $G_1, \dots, G_n$ — неабелевы простые группы, то найдется такое множество $J \subseteq \{1, \dots, n\}$, что $N = \times_{j \in J} G_j$ и $G_k \cap N = 1$, где $k \notin J$.

2. Вспомогательные результаты

Напомним вначале, что если M — непустое подмножество группы G, то *централизатором* $C_G(M)$ множества M в группе G называется совокупность всех элементов группы G, перестановочных с каждым элементом множества M, т. е. $C_G(M) = \{g \in G \mid gm = mg \ \forall m \in M\}$. Говорят (см., например, [10, с. 60]), что множество $B \subseteq G$ *централизует непустое подмножество* A *группы* G, если $B \subseteq C_G(A)$. Централизатор $C_G(G)$ называется *центром группы* G и обозначается через $Z(G)$.

Класс Фиттинга $\mathfrak{X}$ называется (см. [3, определение 3.4]) *лежащим централью ниже класса Фиттинга* $\mathfrak{Y}$, если $\mathfrak{X} \subseteq \mathfrak{Y}$ и для любой группы G имеет место

$$G_{\mathfrak{Y}}/G_{\mathfrak{X}} \leq Z(G/G_{\mathfrak{X}}).$$

Лемма 2.1 [3]. *Пусть $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ — классы Фиттинга и $\mathfrak{G} \subseteq \mathfrak{K}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\operatorname{Aut} G$ *централизует* $G_{\mathfrak{K}}/G_{\mathfrak{G}}$ *для любой группы* G*;*

2) $\mathfrak{G}$ *лежит централью ниже* $\mathfrak{K}$*;*

3) $\mathfrak{G}^{\star} = \mathfrak{K}^{\star}$.

Для доказательства следующего вспомогательного результата нам понадобится понятие группы Лауша [11] (см. также [3] или [2, X.4.2]).

Пусть $\mathfrak{X}$ — класс Фиттинга и A — некоторая (необязательно конечная) группа. Если каждая группа $G \in \mathfrak{X}$ является гомоморфизмом $d_G : G \to A$ таким, что для двух групп $G, H \in \mathfrak{X}$ найдется мономорфизм $\alpha : G \to H$, причем $G\alpha \trianglelefteq\trianglelefteq H$ и $gd_G = g\alpha d_H$ для всех $g \in G$, то группа $A = \{gd_G \mid g \in G,\ G \in \mathfrak{X}\}$ называется $\mathfrak{X}$-*лаушевой*.

Убедимся теперь в справедливости следующего утверждения.

Лемма 2.2. *Пусть $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ — классы Фиттинга и $\mathfrak{G} \subset \mathfrak{K} \subseteq \mathfrak{E}_\pi$, где π — непустое множество простых чисел. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) $\mathfrak{G}$ *лежит централью ниже* $\mathfrak{K}$ *и максимален в* $\mathfrak{K}$*;*

2) *существует простое число $p \in \pi$ такое, что $|G_{\mathfrak{K}}/G_{\mathfrak{G}}| \in \{1, p\}$ для любой π-группы G.*

Доказательство. Следуя доказательству леммы 3.12 в [3], достаточно показать, что $p \in \pi$. Действительно, если A — $\mathfrak{K}$-лаушева группа простого порядка p, то в любой $\mathfrak{K}$-группе G найдется фактор-группа порядка p, т. е. p является делителем порядка группы G. Но $G \in \mathfrak{K}$, что влечет $p \in \pi(\mathfrak{K})$. Поскольку по условию G — π-группа, то $p \in \pi$.

3. Критерий π-максимальности

Пусть π — непустое множество простых чисел и $\mathfrak{E}_\pi$ — класс всех π-групп.

Определение 3.1. Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ назовем

1) π-*максимальным*, если $\mathfrak{F} < \cdot\mathfrak{E}_\pi$;

2) π-*нормальным*, если $\mathfrak{F} \trianglelefteq \mathfrak{E}_\pi$.

Следующая теорема является основным результатом настоящей работы и представляет критерий π-максимальности.

Теорема 3.2. *Нетривиальный класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ является π-максимальным тогда и только тогда, когда найдется простое число $p \in \pi$ такое, что индекс $|G : G_{\mathfrak{F}}|$ принадлежит $\{1,\ p\}$ для любой группы $G \in \mathfrak{E}_\pi$.*

Доказательство. Пусть $\varnothing \subset \mathfrak{F} \neq (1)$ — класс Фиттинга π-групп и π обозначает множество простых чисел, содержащее в себе простое число p такое, что индекс $|G : G_{\mathfrak{F}}|$ равен 1 или p для любой π-группы G. Согласно лемме 2.2 это означает π-максимальность класса $\mathfrak{F}$.

Докажем справедливость обратного утверждения. Пусть класс Фиттинга $\varnothing \subset \mathfrak{F} \neq (1)$ максимален в классе $\mathfrak{E}_\pi$ всех π-групп.

Выберем π-группу G минимального порядка из класса $\mathfrak{E}_\pi \setminus \mathfrak{F}$. Такой выбор возможен, так как ввиду π-максимальности класс $\mathfrak{E}_\pi \setminus \mathfrak{F}$ непуст. Тогда все собственные подгруппы группы G принадлежат $\mathfrak{F}$.

Заметим, что $G_{\mathfrak{F}}$ является максимальной нормальной подгруппой в G. Действительно, если допустить, что в группе G найдутся две максимальные нормальные подгруппы $M_1 \neq M_2$, то по определению класса Фиттинга следует, что $M_1, M_2 \in \mathfrak{E}_\pi$. Ввиду того, что $|M_1| < |G|$ и $|M_2| < |G|$, выполняется условие индукции. По индукции $M_1 \in \mathfrak{F}$ и $M_2 \in \mathfrak{F}$. Но тогда по определению класса Фиттинга $M_1M_2 \in \mathfrak{F}$. Так как M_1 и M_2 — максимальные нормальные подгруппы и их произведение — нормальная $\mathfrak{F}$-подгруппа, ввиду максимальности $G = M_1M_2 \in \mathfrak{F}$; противоречие. Значит, существует единственная максимальная нормальная подгруппа $M_1 = M_2 = M \in \mathfrak{F}$. Но тогда по определению $\mathfrak{F}$-радикала $M = G_{\mathfrak{F}}$.

Следовательно, $G/G_{\mathfrak{F}}$ — простая группа. Тогда возможен один из двух случаев: либо $G/G_{\mathfrak{F}}$ — простая неабелева (а значит, нециклическая) группа, либо $G/G_{\mathfrak{F}}$ — простая абелева, т. е. циклическая, группа.

Случай 1. Группа $G/G_{\mathfrak{F}}$ простая нециклическая. Обозначим $K = G/G_{\mathfrak{F}}$ и рассмотрим сплетение групп $G \wr K$. Тогда

$$G \wr K/G^\natural \cong K \in \mathfrak{H},$$

где $\mathfrak{H}$ — класс Фиттинга всех тех групп, которые являются прямым произведением простых нециклических групп.

Отметим, что $(G_{\mathfrak{F}})^\natural$ — $\mathfrak{F}$-группа, причем $(G_{\mathfrak{F}})^\natural \triangleleft G^\natural$. Тогда по утверждению 1 леммы 1.7 с учетом определения класса $\mathfrak{H}$ заключаем, что

$$G^\natural/(G_{\mathfrak{F}})^\natural = \times_{i=1}^n G/ \times_{i=1}^n G_{\mathfrak{F}} \cong \times_{i=1}^n (G/G_{\mathfrak{F}}) = \times_{i=1}^n K \in \mathfrak{H},$$

где n — число сомножителей прямого произведения $G^\natural$.

Таким образом, $G^\natural/(G_{\mathfrak{F}})^\natural \in \mathfrak{H}$.

Далее убедимся, что $(G_{\mathfrak{F}})^\natural$ совпадает с $(G^\natural)_{\mathfrak{F}}$. А именно, если положить $(G_{\mathfrak{F}})^\natural \neq (G^\natural)_{\mathfrak{F}}$, то получим $(G_{\mathfrak{F}})^\natural < (G^\natural)_{\mathfrak{F}}$ и тогда

$$(G_{\mathfrak{F}})^\natural \triangleleft (G^\natural)_{\mathfrak{F}} \triangleleft G^\natural.$$

Следовательно,

$$(G^\natural)_{\mathfrak{F}}/(G_{\mathfrak{F}})^\natural \triangleleft G^\natural/(G_{\mathfrak{F}})^\natural = \times_{i=1}^n K.$$

Отсюда

$$G^\natural/(G_{\mathfrak{F}})^\natural/(G^\natural)_{\mathfrak{F}}/(G_{\mathfrak{F}})^\natural \cong G^\natural/(G^\natural)_{\mathfrak{F}}.$$

Но так как $G \notin \mathfrak{F}$, то $G^\natural/(G^\natural)_{\mathfrak{F}} \neq 1$.

Поскольку $(G_{\mathfrak{F}})^\natural \triangleleft (G^\natural)_{\mathfrak{F}} \triangleleft G^\natural$, можно построить участок композиционного ряда между $(G_{\mathfrak{F}})^\natural$ и $G^\natural$, который проходит через $(G^\natural)_{\mathfrak{F}}$. Начнем с $\times_{i=1}^n G_{\mathfrak{F}}$, заменив последний сомножитель $G_{\mathfrak{F}}$ на G, т. е. $\times_{i=1}^n G_{\mathfrak{F}} \triangleleft\cdot \times_{i=1}^{n-1} G_{\mathfrak{F}} \times G$. Будем заменять каждый раз последний сомножитель $G_{\mathfrak{F}}$ на G, пока не дойдем до $\times_{i=1}^n G$. Получим ряд, в котором предыдущая группа является максимальной нормальной в следующей, т. е. фактор-группа $G/G_{\mathfrak{F}} = K$ простая. Все построенные подгруппы не принадлежат классу $\mathfrak{F}$ ввиду условия $G \notin \mathfrak{F}$. Следовательно, остается принять $(G_{\mathfrak{F}})^\natural = (G^\natural)_{\mathfrak{F}}$.

Из равенства $(G_{\mathfrak{F}})^\natural = (G^\natural)_{\mathfrak{F}}$ следует, что $G^\natural/(G_{\mathfrak{F}})^\natural = G^\natural/(G^\natural)_{\mathfrak{F}}$. Последнее с учетом условия $G^\natural/(G^\natural)_{\mathfrak{F}} \in \mathfrak{H}$ по определению произведения классов Фиттинга означает, что $G^\natural \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Но $\mathfrak{H}$ — Q-замкнутый класс Фиттинга, так как по утверждению 2 леммы 1.7 нормальная подгруппа прямого произведения простых нециклических групп является прямым произведением простых нециклических групп. Тогда по утверждению 2 леммы 1.2 получаем, что $\mathfrak{F}\mathfrak{H} = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}}\, \mathfrak{H}$ и $(\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{H} = \mathrm{Ext}_{\mathfrak{F}\mathfrak{H}}\, \mathfrak{H}$.

Итак, $G \wr K/G^\natural \in \mathfrak{H}$, где $G^\natural \in \mathfrak{F}\mathfrak{H}$. Отсюда $G \wr K \in (\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{H}$.

Ввиду утверждения 2 леммы 1.6 из того, что группа $G/G_\mathfrak{F}$ неабелева, следует $(G \wr K)_\mathfrak{F} < G^\natural$.

Имеем $(G_\mathfrak{F})^\natural \trianglelefteq (G^\natural)_\mathfrak{F} \triangleleft G^\natural \triangleleft G \wr K$. Из того, что $G^\natural \triangleleft G \wr K$, по лемме 1.1 получаем $(G^\natural)_\mathfrak{F} = G^\natural \cap (G \wr K)_\mathfrak{F}$. С учетом доказанного ранее соотношения $(G \wr K)_\mathfrak{F} < G^\natural$ имеем $G^\natural \cap (G \wr K)_\mathfrak{F} = (G \wr K)_\mathfrak{F}$. Поэтому $(G^\natural)_\mathfrak{F} = (G \wr K)_\mathfrak{F}$.

Как показано выше, $(G_\mathfrak{F})^\natural = (G^\natural)_\mathfrak{F} = (G \wr K)_\mathfrak{F}$. Но по утверждению 1 леммы 1.6 имеет место

$$(G \wr K)/(G_\mathfrak{F})^\natural \cong (G/G_\mathfrak{F}) \wr K.$$

Тогда из $(G_\mathfrak{F})^\natural = (G \wr K)_\mathfrak{F}$ получаем

$$(G \wr K)/(G \wr K)_\mathfrak{F} = (G \wr K)/(G_\mathfrak{F})^\natural \cong (G/G_\mathfrak{F}) \wr K \cong K \wr K \notin \mathfrak{H}.$$

Следовательно, $(G \wr K)/(G \wr K)_\mathfrak{F} \notin \mathfrak{H}$, что влечет $G \wr K \notin \mathfrak{F}\mathfrak{H}$.

Таким образом, из условий $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}$ и $G \wr K \in (\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{H} \setminus \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ с учетом утверждения 1 леммы 1.2 заключаем, что $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}\mathfrak{H}$ и $\mathfrak{F}\mathfrak{H} \subset (\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{H}$. Отсюда $\mathfrak{F} \subsetneq \mathfrak{F}\mathfrak{H} \subsetneq (\mathfrak{F}\mathfrak{H})\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{E}_\pi$; противоречие с максимальностью $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{E}_\pi$.

Остается рассмотреть

Случай 2. Группа $G/G_\mathfrak{F}$ простая циклическая. В этом случае найдется простое число $p \in \pi$ такое, что $G/G_\mathfrak{F} \cong Z_p$, и тогда $G \in \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$, где $\mathfrak{N}_p$ обозначает класс Фиттинга всех p-групп. Так как $G \notin \mathfrak{F}$ ввиду выбора группы G, снова по утверждению 1 леммы 1.2 получаем $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}\mathfrak{N}_p$. Отсюда в силу π-максимальности класса $\mathfrak{F}$ следует справедливость равенства $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{E}_\pi$.

Заметим, что класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ нормален в классе Фиттинга $\mathfrak{E}_\pi$. Действительно, по условию $\mathfrak{F} \neq (1)$ и из $\mathfrak{F}\mathfrak{N}_p = \mathfrak{E}_\pi$ вытекает, что $X/X_\mathfrak{F} \in \mathfrak{N}_p$ для любой π-группы X. Если U — $\mathfrak{F}$-максимальная подгруппа группы X, то $X_\mathfrak{F}$ — собственная нормальная подгруппа группы U. Тогда из $X_\mathfrak{F} \triangleleft U$ ввиду нильпотентности группы $X/X_\mathfrak{F}$ следует $U/X_\mathfrak{F} \triangleleft\triangleleft X/X_\mathfrak{F}$ и $U \triangleleft\triangleleft X$. Применяя лемму 1.1, имеем $U_\mathfrak{F} = U \cap X_\mathfrak{F}$. Но так как $X_\mathfrak{F} \triangleleft U$, то $U \cap X_\mathfrak{F} = X_\mathfrak{F}$. Значит, $X_\mathfrak{F} = U_\mathfrak{F}$. Поскольку $U \in \mathfrak{F}$, то $U_\mathfrak{F} = U$. Полученное противоречие означает π-нормальность класса Фиттинга $\mathfrak{F}$.

С учетом леммы 1.4 о свойствах операторов Локетта имеем $\mathfrak{F} \subseteq \mathfrak{F}^\star \subseteq \mathfrak{E}_\pi$. Но тогда ввиду π-максимальности класса $\mathfrak{F}$ либо $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^\star$, либо $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{E}_\pi$. Равенство $\mathfrak{F} = \mathfrak{F}^\star$ означает, что $\mathfrak{F}$ является классом Локетта. Кроме того, $\mathfrak{F} \triangleleft \mathfrak{E}_\pi$. Но с учетом леммы 1.5 легко видеть, что единственным классом, который является одновременно π-нормальным классом и классом Локетта, является только сам класс $\mathfrak{E}_\pi$. Однако $\mathfrak{F} \neq \mathfrak{E}_\pi$ ввиду π-максимальности класса $\mathfrak{F}$. Следовательно, остается принять, что $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{E}_\pi$.

Хорошо известно, что класс Фиттинга $\mathfrak{E}_\pi$ является формацией (см., например, [12, с. 33]), а значит, Q-замкнут. Тогда по лемме 1.3 класс $\mathfrak{E}_\pi$ является классом Локетта. Значит, $\mathfrak{E}_\pi = (\mathfrak{E}_\pi)^\star$. Отсюда ввиду доказанного выше равенства $\mathfrak{F}^\star = \mathfrak{E}_\pi$ получаем $\mathfrak{F}^\star = (\mathfrak{E}_\pi)^\star$.

Таким образом, имеем $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{E}_\pi$ и $(\mathfrak{E}_\pi)^\star = \mathfrak{F}^\star$, что по лемме 2.1 означает, что класс Фитинга $\mathfrak{F}$ лежит центрально ниже $\mathfrak{E}_\pi$. Отсюда с учетом π-максимальности класса Фиттинга $\mathfrak{F}$ по лемме 2.2 следует, что $|G : G_\mathfrak{F}| \in \{1, p\}$ для некоторого простого числа $p \in \pi$ и для любой группы $G \in \mathfrak{E}_\pi$.

Теорема доказана.

В случае, когда множество π совпадает с множеством всех простых чисел, из теоремы 3.2 вытекает известный результат Лауэ, сформулированный ниже.

Следствие 3.3 [3]. *Класс Фиттинга $\mathfrak{F}$ максимален в классе Фиттинга $\mathfrak{E}$ всех групп тогда и только тогда, когда найдется простое число p такое, что индекс $|G : G_{\mathfrak{F}}| \in \{1, p\}$ для любой группы $G \in \mathfrak{E}$.*

Замечание. Как показано в [13], в классе $\mathfrak{N}_p$ всех p-групп не существует нетривиальных максимальных подклассов Фиттинга. Поэтому если $|\pi| > 1$ и $3 \in \pi \subseteq \mathbb{P}$, то ввиду построенного примера IX.2.14(b) в [2] по теореме 3.2 заключаем, что в классе $\mathfrak{E}_\pi$ существуют нетривиальные максимальные подклассы. Более того, $\mathfrak{E}_\pi$ — локальный класс Фиттинга, и если $\pi \subset \mathbb{P}$, то $\mathfrak{E}_\pi \neq \mathfrak{E}$. Следовательно, из теоремы 3.2 вытекает отрицательное решение вопроса А. Н. Скибы, формулировку которого приводим ниже.

Вопрос (А. Н. Скиба [6, вопрос 13.50]). *Пусть $\mathfrak{F}$ — локальный класс Фиттинга. Верно ли, что частично упорядоченное по включению множество классов Фиттинга, входящих в $\mathfrak{F}$ и отличных от $\mathfrak{F}$, не имеет максимальных элементов?*

Отметим также, что для случаев $\mathfrak{F} \in \{\mathfrak{S}, \mathfrak{E}\}$ и $\mathfrak{F} = \mathfrak{S}_\pi$ отрицательное решение указанного вопроса А. Н. Скибы получено соответственно в [5] и [4].

ЛИТЕРАТУРА

1. *Bryce R. A., Cossey J.* Maximal Fitting classes of finite soluble groups // Bull. Austral. Math. Soc. 1974. V. 10. P. 169–175.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. *Laue H.* Über nichtaflösbare normale Fittingklassen // J. Algebra. 1977. V. 45, N 2. P. 274–283.
4. *Савельева Н. В., Воробьев Н. Т.* Максимальные подклассы локальных классов Фиттинга // Сиб. мат. журн. 2008. Т. 49, № 6. С. 1411–1419.
5. *Воробьев Н. Т.* О проблеме существования максимальных классов Фиттинга // Веснік дзяржаўнага універсітэта імя П. М. Машэрава. 1997. № 4. С. 60–61.
6. *Коуровская тетрадь* (нерешенные вопросы теории групп). 14-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1999.
7. *Blessenohl D., Gaschütz W.* Über normale Schunk- und Fittingklassen // Math. Z. 1970. Bd 118. S. 1–8.
8. *Lockett F. P.* The Fitting class $\mathfrak{F}^\star$ // Math. Z. 1974. Bd 137. S. 131–136.
9. *Воробьев Н. Т.* О проблеме Лауша в теории нормальных классов Фиттинга // Докл. АН БССР. 1991. Т. 35, № 6. С. 485–487.
10. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups. An introduction. New York: Springer-Verl., 2004.
11. *Lausch H.* On normal Fitting classes // Math. Z. 1973. Bd 130, Heft 1. S. 67–72.
12. *Шеметков Л. А.* Формации конечных групп. М.: Наука, 1978.
13. *Савельева Н. В., Воробьев Н. Т.* О проблеме существования максимальных подклассов минимального π-нормального класса Фиттинга // Вес. Нац. акад. навук Беларусі. Сер. фіз.-мат. навук. 2009. № 1. С. 29–37.

Статья поступила 29 октября 2012 г.

Савельева Наталья Валентиновна,
Брестский гос. университет им. А. С. Пушкина,
бул. Космонавтов, 21, Брест 224000, Беларусь
natallia.savelyeva@gmail.com