Сибирский математический журнал
Январь—февраль, 2013. Том 54, № 1

УДК 512.5

ПРИМИТИВНЫЕ И СОХРАНЯЮЩИЕ МЕРУ СИСТЕМЫ ЭЛЕМЕНТОВ НА МНОГООБРАЗИЯХ МЕТАБЕЛЕВЫХ И МЕТАБЕЛЕВЫХ ПРОКОНЕЧНЫХ ГРУПП

Е. И. Тимошенко

Аннотация. Для свободной метабелевой группы S конечного ранга r, $r \geq 2$, доказано, что система элементов $g_1, \dots, g_n \in S$ при $n = 1$ или $n = r$ сохраняет меру на многообразии всех метабелевых групп тогда и только тогда, когда она примитивна. Аналогичные результаты верны для свободной проконечной группы $\widehat{S}$ и многообразия проконечных метабелевых групп при любом n, $1 \leq n \leq r$. Получены следствия из этих теорем.

Ключевые слова: примитивная система элементов, сохраняющая меру система элементов, метабелева группа, проконечная группа.

К 70-летию Виктора Даниловича Мазурова

Определяется система элементов, сохраняющая меру на некотором многообразии $\mathfrak{M}$ групп и на многообразии проконечных $\mathfrak{M}$-групп. Для многообразия $\mathfrak{M} = \mathfrak{A}^2$ метабелевых групп доказано, что система из одного либо r элементов свободной метабелевой группы S_r ранга r примитивна тогда и только тогда, когда она сохраняет меру на $\mathfrak{A}^2$ (теоремы 1 и 2). Отсюда вытекает, что элемент w из S_r примитивен в группе S_r тогда и только тогда, когда он примитивен в ее проконечном пополнении $\widehat{S}_r$ (следствие 3). Кроме того, элементы из группы S_r составляют ее базис тогда и только тогда, когда они образуют базис ее проконечного пополнения (следствие 4).

Пусть $w = w(x_1, \dots, x_r)$ — некоторый элемент свободной группы F_r с базисом $X = \{x_1, \dots, x_r\}$. Рассмотрим конечную группу G. Обозначим через G^r прямое произведение $\underbrace{G \times \dots \times G}_{r}$. По элементу w определим вербальное отображение φ_w группы G^r в группу G, которое каждому элементу $\bar{g} = (g_1, \dots, g_r)$ группы G^r ставит в соответствие элемент $g = w(g_1, \dots, g_r)$, т. е. значение слова w на $\bar{g}$. Зададим на множестве G^r равномерное распределение, соответствующее случайному выбору элементов $\bar{g}$ из G^r. При этом каждый элемент $\bar{g} \in G^r$ выбирается с вероятностью $|G|^{-r}$. Говорят, что элемент *w сохраняет меру на группе G*, если каждый элемент $g \in G$ появляется в качестве образа при отображении φ_w точно $|G|^{r-1}$ раз, т. е. с вероятностью $|G|^{-1}$. Элемент w, сохраняющий меру на любой конечной группе G, называется *сохраняющим меру*.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–00084) и Министерства образования и науки Российской Федерации (соглашение № 14.B37.21.0359).

Отметим, что свойство элемента w свободной группы сохранять меру не зависит от выбора базиса, через который w записан. Это следует из другого, эквивалентного данному для абстрактных (не топологических) групп определения, которое можно применять и для проконечных групп, заменив свободную группу F_r ее проконечным пополнением, т. е. свободной проконечной группой конечного ранга, и рассматривая любую конечную группу G как проконечную.

Зафиксируем конечную группу G и через $\mathrm{Hom}(F_r, G)$ обозначим множество всех гомоморфизмов из свободной группы F_r в группу G. Выберем из $\mathrm{Hom}(F_r, G)$ гомоморфизм случайным образом. Это значит, что каждый гомоморфизм появляется с одинаковой вероятностью $|G|^{-r}$. Элемент $w \in F_r$ сохраняет меру, если для каждой конечной группы G и каждого случайно выбранного гомоморфизма $\alpha \in \mathrm{Hom}(F_r, G)$ образы $\alpha(w)$ элемента w распределены равномерно в группе G, т. е. каждый образ появляется с вероятностью $|G|^{-1}$.

Понятие элемента $w \in F_r$, сохраняющего меру, можно обобщить на множество элементов из F_r следующим образом. Рассмотрим некоторый упорядоченый набор (систему) элементов $\{w_1, \ldots, w_l\}$, $1 \leq l \leq r$, из группы F_r. Определим вербальное отображение $\varphi_{\{w_1,\ldots,w_l\}}$ группы G^r в группу G^l, которое каждому элементу $\bar{g} = (g_1, \ldots, g_n) \in G^r$ ставит в соответствие элемент $(w_1(g_1, \ldots, g_r), \ldots, w_l(g_1, \ldots, g_r))$ из группы G^l. Система элементов $\{w_1, \ldots, w_l\}$ *сохраняет меру на группе* G, если каждый элемент $\bar{g} \in G^l$ появляется в качестве образа при отображении $\varphi_{\{w_1,\ldots,w_l\}}$ точно $|G|^{r-l}$ раз, т. е. с вероятностью $|G|^{-l}$. Система элементов $\{w_1, \ldots, w_l\}$, $l \leq r$, сохраняющая меру на любой конечной группе G, называется *сохраняющей меру.*

Так же, как и для одного элемента, сохраняющего меру, определение системы элементов, сохраняющей меру, можно сформулировать в терминах гомоморфизмов и применять его для проконечных групп.

Система элементов $\{w_1, \ldots, w_l\}$, $1 \leq l \leq r$, из группы F_r называется *сохраняющей меру*, если при случайном выборе гомоморфизмов α из $\mathrm{Hom}(F_r, G)$ образы $\{\alpha(w_1), \ldots, \alpha(w_l)\}$ равномерно распределены в группе G^l.

Элемент v группы F_r называется *примитивным,* если его можно включить в некоторый базис группы F_r.

Понятие примитивного элемента обобщается на случай системы элементов из F_r. Система элементов $\{v_1, \ldots, v_l,\}$ свободной группы F_r называется *примитивной*, если ее можно дополнить до базиса группы F_r.

В [1] сформулирована гипотеза, высказанная несколькими авторами, о связи между примитивными элементами и элементами, сохраняющими меру.

Гипотеза 1. *Система элементов $\{v_1, \ldots, v_l\}$, $1 \leq l \leq r$, свободной группы F_r примитивна тогда и только тогда, когда она сохраняет меру.*

В [1] гипотеза получила подтверждение для $l \geq r - 1$, а позднее в [2] — для $l = 1$. В частности, для свободной группы множество примитивных элементов совпадает с множеством элементов, сохраняющих меру.

Предположим, что в качестве конечных групп G рассматриваются только группы из некоторого многообразия $\mathfrak{M}$. Пусть $V = V(\mathfrak{M})$ — вербальная подгруппа из F_r, соответствующая этому многообразию. Так как все значения элементов $v \in V$ на группе G равны единице, в качестве $\{v_1, \ldots, v_l\}$ в определении систем элементов, сохраняющих меру, можно рассматривать элементы из свободной группы $F_r(\mathfrak{M}) = F_r/V$ многообразия $\mathfrak{M}$.

Заменяя в определении систем элементов, сохраняющих меру, произвольную конечную группу G произвольной конечной группой из многообразия $\mathfrak{M}$, а свободную группу F_r — относительно свободной группой $F_r(\mathfrak{M})$, приходим к понятию систем элементов из $F_r(\mathfrak{M})$, *сохраняющих меру на многообразии* $\mathfrak{M}$.

Таким образом, сохраняющие меру системы элементы — это те системы элементов свободной группы, которые сохраняют меру на многообразии всех групп.

По аналогии с определением систем примитивных элементов группы F_r можно определить *примитивные системы элементов* в группе $F_r(\mathfrak{M})$ как те системы, которые можно включить в какой-то базис этой группы.

Сформулированную ранее гипотезу можно выдвинуть для многообразия групп $\mathfrak{M}$.

Гипотеза 2. *Система элементов* $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \le l \le r$, *относительно свободной группы* $F_r(\mathfrak{M})$ *примитивна тогда и только тогда, когда она сохраняет меру на многообразии* $\mathfrak{M}$.

Докажем, что эта гипотеза справедлива для многообразия метабелевых групп $\mathfrak{A}^2$ при $l = 1$, $l = r$ и любого конечного r.

Очевидно, что имеют место следующие леммы.

Лемма 1. *Пусть* A_r *— свободная абелева группа ранга* r. *Система элементов* $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \le l \le r$, *из группы* A_r *сохраняет меру на многообразии абелевых групп* $\mathfrak{A}$ *тогда и только тогда, когда она примитивна.*

Лемма 2. *Пусть* S_r *— свободная метабелева группа ранга* r. *Если система элементов* $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \le l \le r$, *этой группы сохраняет меру на многообразии метабелевых групп* $\mathfrak{A}^2$, *то образ этой системы элементов в абелевой группе* $A_r = S_r/S_r'$ *является примитивной системой.*

Хорошо известно, что подгруппа Фраттини нильпотентной группы содержит ее коммутант. Это означает, что элементы $g_1, \dots, g_r$ нильпотентной группы G порождают ее тогда и только тогда, когда они порождают абелеву группу $G_{ab} = G/G'$. Значит, из лемм 1 и 2 получаем

Следствие 1. *Пусть* $\mathfrak{N}_c$ *— многообразие всех нильпотентных групп ступени нильпотентности не выше* c. *Система элементов* $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \le l \le r$, *группы* $F_r(\mathfrak{N}_c)$, $r \ge 2$, *сохраняет меру на многообразии* $\mathfrak{N}_c$ *тогда и только тогда, когда она примитивна.*

Будем использовать производные Фокса при дальнейших доказательствах. Напомним их определение.

В свободной группе F_r зафиксируем некоторый базис $X = \{x_1, \dots, x_r\}$. На групповом кольце $\mathbb{Z}F_r$ определены левые производные Фокса ∂_i, $i = 1, \dots, r$, в базисе X. Они однозначно заданы условиями

$$\partial_i x_j = \delta_{ij}, \quad \partial_i(u+v) = \partial_i u + \partial_i v, \quad \partial_i(uv) = \partial_i(u)\varepsilon(v) + u\partial_i(v), \quad u, v \in \mathbb{Z}F_r, \tag{1}$$

где ε — естественный гомоморфизм $\varepsilon : \mathbb{Z}F_r \to \mathbb{Z}$, а δ_{ij} — символ Кронекера. Для производных Фокса имеет место основное тождество

$$\partial_1 v(x_1 - 1) + \dots + \partial_r v(x_r - 1) = v - 1, \quad v \in F_r. \tag{2}$$

Многообразие всех абелевых групп экспоненты $n \ge 0$ обозначим через $\mathfrak{A}_n$. Пусть $A(n)$ — свободная группа многообразия $\mathfrak{A}_n$ с базисом $\{a_1, \dots, a_r\}$, $\mathbb{Z}_m$ — кольцо вычетов по модулю m. Рассмотрим гомоморфизм $\phi : \mathbb{Z}F_r \to \mathbb{Z}_m A(n)$, индуцированный естественным гомоморфизмом колец $\mathbb{Z} \to \mathbb{Z}_m$ и гомоморфизмом групп $F_r \to A(n)$, при котором $x_i \to a_i$. Используя ϕ, продолжим дифференцирования ∂_i до отображений в кольцо $\mathbb{Z}_m A(n)$. Полученные отображения $\mathbb{Z}F_r \to \mathbb{Z}_m A(n)$ будем называть *дифференцированиями из* $\mathbb{Z}F_r$ *в* $\mathbb{Z}_m A(n)$ и обозначать через ∂_i^*.

Пусть $R = F_r''(F_r')^m(F_r^n)'[F_r', F^n]F_r^{mn}$. Все дифференцирования ∂_i^* аннулируют идеал $\mathbb{Z}F_r(R-1)\mathbb{Z}F_r$. Это означает, что отображения ∂_i^* фактически определены на групповом кольце $\mathbb{Z}(F_r/R)$. Легко видеть, что группа F_r/R изоморфна свободной группе ранга r многообразия $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$. Обозначим эту группу через $S_{m,n}$. Таким образом, ∂_i^* — дифференцирования, определенные на кольце $\mathbb{Z}S_{m,n}$ со значениями в $\mathbb{Z}_m A(n)$.

В [3] (см. также [4]) доказана следующая

Теорема (критерий примитивности). *Пусть* $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \le l \le r$, *— система элементов группы* $S_{m,n}$, $m, n \ge 2$, $J(v) = (\partial_j^* v_i)_{l \times r}$ *— матрица, составленная из значений производных Фокса от элементов* v_i *в кольце* $\mathbb{Z}_m A(n)$. *Система элементов* $\{v_1, \dots, v_l\}$ *примитивна тогда и только тогда, когда*

(1) *существует матрица* $B_{r \times l}$ *над кольцом* $\mathbb{Z}_m A(n)$ *такая, что* $J(v) \cdot B = E_{l \times l}$ *— единичная матрица;*

(2) *образы элементов* $v_1, \dots, v_l$ *в группе* $A(n)$ *образуют примитивную систему.*

Из этой теоремы получаем, что элемент $g \in S_{m,n}$, примитивный по модулю коммутанта $S'_{m,n}$, можно включить в базис группы $S_{m,n}$ тогда и только тогда, когда вектор $(\partial_1^* g, \dots, \partial_r^* g)$ унимодулярен, т. е. порождает идеал, совпадающий со всем кольцом $\mathbb{Z}_m A(n)$.

Кроме того, система элементов $\{v_1, \dots, v_r\}$ образует базис группы $S_{m,n}$ тогда и только тогда, когда элементы $v_1, \dots, v_r$ порождают группу $S_{m,n}$ по модулю ее коммутанта и матрица $J(v) = (\partial_j^* v_i)_{r \times r}$ обратима.

Лемма 3. *Пусть* $v(y_1, \dots, y_r) = y_1 c$ *— элемент из свободной группы* $S_{m,n}$ *ранга* r, $r \ge 2$, *многообразия* $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$, $m, n \ge 2$, c *— элемент из коммутанта* $[S_{m,n}, S_{m,n}]$ *и* $Y = \{y_1, \dots, y_r\}$ *— базис этой группы. Пусть* $A(n)$ *— свободная группа многообразия* $\mathfrak{A}_n$ *с базисом* $\{a_1, \dots, a_r\}$. *Для* $i = 1, \dots, r$ *обозначим через* $\partial_i^* v(b_1, \dots, b_r)$ *значение производной Фокса* $\partial_i^* v$ *на элементе* $(b_1, \dots, b_r) \in A(n) \times \dots \times A(n)$. *Предположим, что вектор*

$$(\partial_1^* v(1, a_2, \dots, a_r), \dots, \partial_r^* v(1, a_2, \dots, a_r))$$

унимодулярен. Тогда вектор

$$(\partial_1^* v(a_1, a_2, \dots, a_r), \dots, \partial_r^* v(a_1, a_2, \dots, a_r))$$

также унимодулярен.

Доказательство. Так как вектор $(\partial_1^* v(1, a_2, \dots, a_r), \dots, \partial_r^* v(1, a_2, \dots, a_r))$ унимодулярен, найдутся элементы $\alpha_i \in \mathbb{Z}_m A(n)$, $i = 1, \dots, r$, такие, что

$$\alpha_1 \partial_1^* v(1, a_2, \dots, a_r) + \dots + \alpha_r \partial_r^* v(1, a_2, \dots, a_r) = 1.$$

Элементы $\partial_i^* v(a_1, a_2, \dots, a_r) - \partial_i^* v(1, a_2, \dots, a_r)$ делятся на $a_1 - 1$, поэтому

$$\alpha_1 \partial_1^* v(a_1, a_2, \dots, a_r) + \dots + \alpha_r \partial_r^* v(a_1, a_2, \dots, a_r) = 1 + \beta(a_1 - 1) \tag{3}$$

для некоторого $\beta \in \mathbb{Z}_m A(n)$. Из основного тождества (2) получаем

$$(a_1 - 1)\partial_1^* v(a_1, \dots, a_r) + \dots + (a_r - 1)\partial_r^* v(a_1, a_2, \dots, a_r) = a_1 - 1. \tag{4}$$

Из (3) и (4) следует утверждение леммы.

С учетом критерия примитивности получим

Следствие 2. *Элемент v, удовлетворяющий условиям леммы 3, примитивен в группе $S_{m,n}$.*

Теорема 1. *Пусть S — свободная метабелева группа ранга $r \geq 2$. Элемент v сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$ всех метабелевых групп тогда и только тогда, когда он примитивен.*

Доказательство. Предположим, что элемент $v \in S$ примитивен. Свойство элемента сохранять меру на многообразии не зависит от выбора базиса группы S. Значит, примитивный элемент v сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$.

Предположим, что элемент v сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$, но не является примитивным элементом свободной метабелевой группы S.

Для целого l, $1 \leq l \leq r$, определим на любой относительно свободной группе $F_r(\mathfrak{M})$ ранга r предикат $\mathrm{Pr}_l(g_1, \ldots, g_l)$. Он принимает истинное значение тогда и только тогда, когда $\{g_1, \ldots, g_l\}$ — примитивная система элементов группы $F_r(\mathfrak{M})$.

В [5] доказано, что группа S аппроксимируется конечными группами $S_{m,n} = F_r(\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n)$ относительно предиката Pr_l для любого l, $1 \leq l \leq r$. Это означает, что для любой непримитивной системы элементов $\{w_1, \ldots, w_l\}$ группы S можно найти значения $n, m > 1$ такие, что при естественном гомоморфизме группы S на группу $S_{n,m}$ образ системы элементов $\{w_1, \ldots, w_l\}$ образует непримитивную систему элементов в группе $S_{m,n}$.

Подберем такие значения n, m для непримитивного элемента $v \in S$.

Так как элемент v сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$, он сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}$. По лемме 2 образ элемента v примитивен в группе S/S'. Значит, в группе S можно выбрать базис $Y = \{y_1, \ldots, y_r\}$ так, что элемент v записывается в виде $v = y_1 c$, $c \in S'$.

Пусть T — свободная аддитивная группа многообразия $\mathfrak{A}_m$ с базисом

$$\{t_i a \mid a \in A(n),\ 1 \leq i \leq r\}.$$

Зададим действие элементов группы $A(n)$ на группе T следующим образом:

$$t_i a \cdot b = t_i ab, \quad b \in A(n).$$

Относительно этого действия группа T наделена структурой правого $\mathbb{Z}_m A(n)$-модуля. Рассмотрим полупрямое произведение $T \ltimes A(n)$. Обозначим эту группу через $G_{m,n}$. Заметим, что она изоморфна дискретному сплетению абелевых групп $A(n)$ и $A(m)$. Таким образом, $G_{m,n}$ — конечная группа из многообразия $\mathfrak{A}^2$.

Элемент v сохраняет меру на группе $G_{m,n}$. В частности, уравнение $v(x_1, \ldots, x_r) = 1$ должно иметь точно $|G_{m,n}|^{r-1}$ решений в группе $G_{m,n}$.

Произвольный элемент $g \in G_{n,m}$ записывается в виде

$$g = \tau \cdot b, \quad \tau \in T,\ b \in A(n).$$

Пусть

$$\{\tau_1 \cdot b_1, \ldots, \tau_r \cdot b_r\} \tag{5}$$

— упорядоченный набор элементов из $G_{m,n}$. Легко проверить, что

$$v(\tau_1 \cdot b_1, \ldots, \tau_r \cdot b_r) = (\tau_1 \cdot \partial_1^*(b_1, \ldots, b_r) + \cdots + \tau_r \cdot \partial_r^*(b_1, \ldots, b_r)) \cdot v(b_1, \ldots, b_r). \tag{6}$$

Элементы (5) являются решением уравнения $v(x_1, \ldots, x_r) = 1$ тогда и только тогда, когда

$$v(b_1, \ldots, b_r) = 1 \tag{7}$$

в группе $A(n)$ и

$$\tau_1 \cdot \partial_1^*(b_1, \ldots, b_r) + \cdots + \tau_r \cdot \partial_r^*(b_1, \ldots, b_r) = 0 \tag{8}$$

в группе T.

Уравнение (7) имеет точно $|A(n)|^{r-1}$ решений в группе $A(n)$, а именно все наборы элементов

$$\{1, b_2, \ldots, b_r\}, \quad b_j \in A(n), \tag{9}$$

и только они являются решениями уравнения (7). Это следует из вида элемента v.

Значит, для каждого из наборов (9) уравнение (8) при $b_1 = 1$ имеет точно $|T|^{r-1}$ решений относительно $\{\tau_1, \ldots, \tau_r\}$. Только в таком случае уравнение $v(x_1, \ldots, x_r) = 1$ имеет точно $|G_{m,n}|^{r-1}$ решений в группе $G_{n,m}$.

Пусть $\mathbf{T} = T \oplus \cdots \oplus T$ — прямая сумма r экземпляров модуля T. Рассмотрим отображения $\phi = \phi_{\{1, b_2, \ldots, b_r\}}$ модуля $\mathbf{T}$ на модуль T, определенное следующим образом для любого набора $\{1, b_2, \ldots, b_r\}$:

$$(\tau_1, \ldots, \tau_r)\phi = \tau_1 \cdot \partial_1^* v(1, b_2, \ldots, b_r) + \cdots + \tau_r \cdot \partial_r^* v(1, b_2, \ldots, b_r).$$

Ядро гомоморфизма ϕ совпадает с множеством решений уравнения (8). Поэтому элемент v охраняет меру на группе $G_{m,n}$ тогда и только тогда, когда ϕ — отображение на весь модуль T. Значит, для некоторых τ_i разрешимо уравнение

$$\tau_1 \cdot \partial_1^* v(1, b_2, \ldots, b_r) + \cdots + \tau_r \cdot \partial_r^* v(1, b_2, \ldots, b_r) = t_1 \cdot 1.$$

Тем самым вектор $(\partial_1^* v(1, b_2, \ldots, b_r), \ldots, \partial_r^* v(1, b_2, \ldots, b_r))$ унимодулярен для любых наборов $\{b_2, \ldots, b_r\}$, в частности, для набора $\{a_2, \ldots, a_r\}$. По следствию 2 элемент v примитивен в $S_{m,n}$; противоречие, доказывающее теорему.

Теорема 2. *Пусть S — свободная метабелева группа ранга $r \geq 2$. Элементы $v_1, \ldots, v_r$ сохраняют меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$ всех метабелевых групп тогда и только тогда, когда они образуют базис группы S.*

Доказательство. Предположим, что элементы $v_1, \ldots, v_r$ образуют базис группы S. Свойство системы элементов сохранять меру не зависит от выбора базиса группы S. Значит, система элементов $v_1, \ldots, v_r$ сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$.

Обратно, пусть система элементов $\{v_1, \ldots, v_r\}$ сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$. Тогда образ этой системы элементов в группе $S_{ab} = S/S'$ сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}$ всех абелевых групп. Поэтому образы элементов $v_1, \ldots, v_r$ в свободной абелевой группе S_{ab} составляют базис. Следовательно, можно выбрать базис $Y = \{y_1, \ldots, y_r\}$ группы S так, что для всех $i = 1, \ldots, r$ имеет место $v_i = y_i c_i$, где c_i — элементы из коммутанта S'.

Предположим, что система элементов $\{v_1 = y_1 c_1, \ldots, v_r = y_r c_r\}$ не образует базиса группы S. Тогда из [5] следует, что найдутся такие натуральные m, n, что образы элементов y_i в группе $S_{m.n}$ также не образуют базиса.

Группа $S_{m,n}$ конечна и принадлежит многообразию $\mathfrak{A}^2$. Поэтому среди наборов $\{v_1(g_1, \ldots, g_r), \ldots, v_r(g_1, \ldots, g_r)\}$ точно один раз встретится любой набор элементов группы $S_{m,n}$. Пусть z_i — образ элемента y_i при естественном гомоморфизме группы S на группу $S_{m,n}$. Обозначим через Z базис $\{z_1, \ldots, z_r\}$. Покажем, что набор элементов $\{z_1, \ldots, z_r\}$ появиться в результате подстановки не может.

Напомним правило дифференцирования сложной функции (см., например, [3, 4]).

Пусть $h(x_1, \dots, x_r)$ — элемент из целочисленного группового кольца свободной группы F_r с базисом $\{x_1, \dots, x_r\}$, $g_1, \dots, g_r$ — элементы группы F_r. Используем обозначения: $h(g_1, \dots, g_r)$ — образ элемента h под действием эндоморфизма $\rho = \{x_i \to g_i\}$, $\partial h/\partial g_i$ — образ элемента $\partial_i h$ под действием эндоморфизма ρ. Тогда

$$\partial_i h(g_1, \dots, g_r) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial h}{\partial g_j} \cdot \partial_i g_j.$$

Предположим, что для некоторых $g_i \in S_{m,n}$ имеет место

$$v_i(g_1, \dots, g_r) = z_i \tag{10}$$

при всех $i = 1, \dots, r$.

Так как элементы v_i сравнимы с элементами y_i по модулю коммутанта S', из (10) следует, что все элементы g_i должны быть сравнимы с элементами z_i по модулю коммутанта $S'_{m,n}$.

Найдем значения производных Фокса от элементов $v_i(g_1, \dots, g_r)$ в кольце $\mathbb{Z}_m(A(n))$. Из (10) получаем

$$\partial_i^* v_i(g_1, \dots, g_r) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^* v_i}{\partial g_j} \cdot \partial_i^* g_j = 1, \quad \partial_p^* v_i(g_1, \dots, g_r) = \sum_{j=1}^{r} \frac{\partial^* v_i}{\partial g_p} \cdot \partial_p^* g_j = 0 \tag{11}$$

при $p, i = 1, \dots, r$, $p \neq i$.

Эндоморфизм ρ индуцирует тождественный автоморфизм на группе $A(n) = S_{m,n}/S'_{m,n}$, поэтому $\partial^* v_i/\partial g_j = \partial_j^* v_i(a_1, \dots, a_r) = \partial_j^* v_i$. Ввиду (11) получаем, что матрица $J(v) = (\partial_j^* v_i)_{r\times r}$ обратима над кольцом $\mathbb{Z}_m(A(n)$. Критерий примитивности утверждает, что в таком случае система элементов $\{v_1, \dots, v_r\}$ образует базис в группе $S_{m,n}$; противоречие, доказывающее теорему.

Применим полученные результаты к проконечным метабелевым группам. Напомним, что топологическая группа, представимая в виде проективного предела конечных групп, называется *проконечной.* Необходимые сведения о проконечных группах можно найти в [6, 7]. Класс проконечных групп совпадает с классом компактных вполне несвязных хаусдорфовых групп.

Свободная проконечная группа $\widehat{F}_r$ с конечным множеством свободных порождающих $\mathscr{X} = \{\chi_1, \dots, \chi_r\}$ — это проконечная группа, для которой зафиксировано отображение $j : \mathscr{X} \to \widehat{F}_r$ со следующим универсальным свойством: для любого отображения $\xi : \mathscr{X} \to \mathscr{P}$ множества $\mathscr{X}$ в произвольную проконечную группу $\mathscr{P}$ существует единственный (непрерывный) гомоморфизм $\mu : \widehat{F}_r \to \mathscr{P}$, для которого $\xi = \mu \cdot j$. Образ $j(\mathscr{X})$ называется *базисом группы* $\widehat{F}_r$. Все базисы группы $\widehat{F}_r$ равномощны. Элемент $w \in \widehat{F}_r$ называется *примитивным*, если его можно включить в некоторый базис. Известно, что группа $\widehat{F}_r$ является проконечным пополнением свободной группы F_r.

Пусть класс групп $\mathscr{G}$ замкнут относительно взятия подгрупп, фактор-групп и конечных прямых произведений. Проконечная группа $\mathscr{P}$, равная проективному пределу групп из класса $\mathscr{G}$, называется *проконечной* $\mathscr{G}$*-группой.*

Если в качестве $\mathscr{G}$ взять многообразие всех метабелевых групп $\mathfrak{A}^2$, то получим многообразие проконечных $\mathfrak{A}^2$-групп. Свободная группа ранга r этого многообразия — профинитное пополнение свободной метабелевой группы S_r. Обозначим эту группу через $\widehat{S}_r$.

В [1] авторы приводят неопубликованное доказательство C. Meiri следующего утверждения.

Утверждение (C. Meiri). *Пусть $w \in \widehat{F}_r$. Элемент w примитивен тогда и только тогда, когда он сохраняет меру.*

Это утверждение справедливо для систем элементов. Точнее, система элементов $\{w_1, \dots, w_l\}$, $1 \le l \le r$, примитивна в свободной проконечной группе $\widehat{F}r$ ранга r, когда она сохраняет меру.

Доказательство C. Meiri проходит и для группы $\widehat{S}_r$. Точнее, имеет место

Утверждение 1. *Система элементов $\{w_1, \dots, w_l\}$, $1 \le l \le r$, свободной проконечной $\mathfrak{A}^2$-группы $\widehat{S}_r$ примитивна тогда и только тогда, когда она сохраняет меру на многообразии проконечных $\mathfrak{A}^2$-групп.*

Доказательство. Приведем лишь набросок доказательства. Достаточно убедиться, что любую сохраняющую меру систему элементов $\{w_1, \dots, w_l\}$, $1 \le l \le r$, свободной проконечной $\mathfrak{A}^2$-группы $\widehat{S}_r$ можно дополнить до базиса этой группы.

Для любой системы элементов $\{v_1, \dots, v_l\}$, $1 \le l \le r$, группы $\widehat{S}_r$, любой конечной группы G и любой системы элементов $\{g_1, \dots, g_l\}$ элементов из G определим множество гомоморфизмов $\widehat{S}_r \to G$:

$$H_{\{v_1,\dots,v_l\}}(G; g_1, \dots, g_l) = \{\alpha \in \mathrm{Hom}(\widehat{S}_r, G) \mid \alpha(v_1) = g_1, \dots, \alpha(v_l) = g_l\},$$

и множество эпиморфизмов $\widehat{S}_r \twoheadrightarrow G$:

$$E_{\{v_1,\dots,v_l\}}(G; g_1, \dots, g_l) = \{\alpha \in \mathrm{Epi}(\widehat{S}_r, G) \mid \alpha(v_1) = g_1, \dots, \alpha(v_l) = g_l\}.$$

Индукцией по порядку группы $|G|$ нетрудно доказать, что для любой примитивной системы элементов $\{y_1, \dots, y_l\}$ группы $\widehat{S}_r$ и любой системы элементов $\{w_1, \dots, w_l\}$ этой группы, сохраняющей меру на многообразии проконечных $\mathfrak{A}^2$-групп, имеет место равенство

$$|E_{\{y_1,\dots,y_l\}}(G; g_1, \dots, g_l)| = |E_{\{w_1,\dots,w_l\}}(G; g_1, \dots, g_l)|.$$

Тогда для любой $N \lhd_o \widehat{S}_r$ получим

$$|E_{\{y_1,\dots,y_l\}}(\widehat{S}_r/N; w_1N, \dots, w_lN)| = |E_{\{w_1,\dots,w_l\}}(\widehat{S}_r/N; w_1N, \dots, w_lN)| \ge 1,$$

так как естественный эпиморфизм $\widehat{S}_r \twoheadrightarrow \widehat{S}_r/N$ принадлежит $E_{\{w_1,\dots,w_l\}}(\widehat{S}_r/N; w_1N, \dots, w_lN)$ и $|\widehat{S}_r/N| < \infty$.

Выберем α из $E_{\{y_1,\dots,y_l\}}(\widehat{S}_r/N;\ w_1N, \dots, w_lN)$. Получим, что для любой открытой нормальной подгруппы $N \lhd_o \widehat{S}_r$ найдутся элементы $w_{l+1,N} = \alpha(y_{l+1})$, $\dots, w_{r,N} = \alpha(y_r)$, зависящие от N, такие, что элементы

$$w_1 \cdot N, \dots, w_l \cdot N, w_{l+1,N} \cdot N, \dots, w_{r,N} \cdot N$$

порождают группы $\widehat{S}_r/N$ (при $l = r$ только элементы $w_1 \cdot N, \dots, w_r \cdot N$ порождают $\widehat{S}_r/N$). Далее, используя компактность группы $\widehat{S}_r$, выбираем элементы $w_{l+1}, \dots, w_r$ сразу для всех открытых нормальных подгрупп. Следовательно, элементы $w_1, \dots, w_r$ образуют базис группы $\widehat{S}_r$, первые l элементов которого совпадают с исходной системой элементов, сохраняющих меру. Поэтому $\{w_1, \dots, w_l\}$ — примитивная система элементов. Утверждение доказано.

Из этого утверждения и теоремы 1 получаем

Следствие 3. *Пусть элемент w принадлежит свободной метабелевой группе S_r и $\widehat{S}_r$ — ее проконечное пополнение. Элемент w примитивен в S_r тогда и только тогда, когда он примитивен в $\widehat{S}_r$.*

Доказательство. Если элемент w примитивен в S_r, то его можно включить в некоторый базис этой группы. Любой базис группы S_r служит базисом для $\widehat{S}_r$.

Обратно, пусть $w \in S_r$ примитивен в $\widehat{S}_r$. По утверждению 1 он сохраняет меру на многообразии проконечных $\mathfrak{A}^2$-групп. Поэтому он сохраняет меру на многообразии $\mathfrak{A}^2$. Значит, по теореме 1 он примитивен в S_r.

Из теоремы 2 и утверждения 1 получаем аналогичное утверждение для метабелевых групп.

Следствие 4. *Пусть элементы $\{w_1, \dots, w_r\}$ выбраны из свободной метабелевой группы S_r. Они образуют базис группы S_r тогда и только тогда, когда являются базисом ее проконечного пополнения $\widehat{S}_r$.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Puder D.* On primitive words. II: measure preservation // arXiv:1104.3991v2[math.GR] 21 Apr. 2011. P. 1–31.
2. *Puder D., Pazanchevski O.* Measure preserving words are primitive // arXiv:1202.32691v1 [math.GR] 15 Feb. 2012. P. 1–39.
3. *Гупта Ч. К., Тимошенко Е. И.* Примитивные системы элементов в многообразии $\mathfrak{A}_m\mathfrak{A}_n$: критерий и индуцирование // Алгебра и логика. 2001. Т. 40, № 5. С. 513–530.
4. *Тимошенко Е. И.* Эндоморфизмы и универсальные теории разрешимых групп. Новосибирск: Изд-во Новосибирск. гос. тех. ун-та, 2011. (Сер. Монографии НГТУ).
5. *Gupta C. K., Roman'kov V. A.* Finite separability of tameness and primitivity in certain relatively free groups // Comm. Algebra. 1995. V. 23, N 11. P. 4101–4108.
6. *Wilson J.* Profinite groups. Oxford: Clarendon Press, 1998.
7. *Общая алгебра.* Справочная математическая библиотека (ред. Л. А. Скорняков). М.: Наука, 1990. Т. 1.

Статья поступила 14 февраля 2012 г.

Тимошенко Евгений Иосифович
Новосибирский гос. технический университет,
кафедра алгебры и математической логики,
пр. К. Маркса, 20, Новосибирск 630092
algebra@nstu.ru