Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 512.816.3

О КВАЗИКОМПАКТНЫХ ОДНОРОДНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

В. В. Горбацевич

Аннотация. Продолжено изучение квазикомпактных однородных пространств. Даны доказательства тех результатов, которые были анонсированы (без доказательств) автором ранее, а также указаны некоторые усиления анонсированных результатов. Изложены новые результаты, в основном касающиеся описания квазикомпактных однородных многообразий с точностью до конечнолистного накрытия.

Ключевые слова: однородное пространство, инвариантная мера, конечнолистное накрытие.

Введение

Рассмотрим однородное пространство $M = G/H$ группы Ли G (где H — замкнутая подгруппа Ли в G). Для случая, когда многообразие M компактно, в последние десятилетия получено много результатов о таких пространствах $M = G/H$, в том числе и о группах Ли G, транзитивных на M, о топологических свойствах этих многообразий M и др. (см., например, обзор [1] и монографию [2]). Автором введен в [3] более общий класс — плезиокомпактных однородных пространств, содержащий все компактные и некоторые некомпактные однородные пространства. Для этого класса однородных пространств получено довольно подробное описание, во многом аналогичное тому, что было сделано для компактных однородных пространств (см. [4, 5] и обзор [6] — продолжение обзора [1]). В частности, класс плезиокомпактных однородных пространств включает в себя все однородные пространства G/H, на которых существует конечная G-инвариантная мера. Для таких однородных пространств некоторые их специфические свойства, не имеющие места, вообще говоря, для произвольных плезиокомпактных однородных пространств и даже для компактных однородных пространств были частично сформулированы и некоторые (немногие) доказаны в кратком сообщении [7].

В данной статье продолжается изучение квазикомпактных однородных пространств. Будут даны прежде всего доказательства результатов, анонсированных в [7], а также указаны некоторые усиления результатов из [7]. Также будут изложены совсем новые результаты, в основном касающиеся описания квазикомпактных однородных многообразий с точностью до конечнолистного накрытия. Многолетняя задержка с публикацией результатов, сформулированных в [7], объясняется тем, что после публикации этой статьи интересы авторы переместились в другие математические области. Но недавно автору удалось

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 11–01–00465а).

существенно дополнить анонсированные результаты из [7] и усовершенствовать их доказательства, что и привело к написанию данной статьи. Перейдем к более подробному описанию содержания статьи.

Замкнутая подгруппа H в группе Ли G называется *квазиравномерной*, если на однородном пространстве $M = G/H$ существует G-инвариантная мера μ, причем $\mu(G/H) < \infty$; однородное пространство в этом случае называется *квазикомпактным*. На однородном пространстве $M = G/H$ G-инвариантная мера существует не всегда, это зависит не только от топологии пространства M, но и от выбора группы Ли, транзитивной на M. Например, на сфере S^2 транзитивны компактная группа Ли $SU(2)$ и содержащая ее группа Ли $SL(2, \mathbf{C})$. Группа Ли $SU(2)$ (точнее, двулистно ею накрываемая группа Ли $SO(3)$) транзитивно действует на S^2 вращениями, а группа $SL(2, \mathbf{C})$ (точнее, двулистно ею накрываемая группа $PSL(2, \mathbf{C})$) — проективными преобразованиями, если рассматривать S^2 как комплексную проективную прямую $\mathbf{C}P^1$. Но первое действие сохраняет естественную меру на S^2, и здесь мы имеем квазикомпактное однородное пространство. Второе действие не сохраняет никакой меры на S^2. Дело в том, что группа Ли $SL(2, \mathbf{C})$ унимодулярна, а стационарная подгруппа H ее транзитивного действия на S^2, которой, как легко понять, является подгруппа верхнетреугольных унимодулярных матриц — двумерная неабелева разрешимая группа Ли, не является, несмотря на унимодулярность (в другом смысле) составляющих ее матриц, унимодулярной группой Ли. Поэтому в силу критерия существования на однородном пространстве инвариантной меры (см., например, [8]) сфера S^2 как однородное пространство группы Ли $SL(2, \mathbf{C})$ не является квазикомпактным (хотя как топологическое пространство она даже компактна!). Отметим, что в некоторых случаях квазикомпактные и плезиокомпактные однородные пространства автоматически будут компактными — так будет, если транзитивная группа Ли разрешима или же стационарная подгруппа почти связна (т. е. имеет конечное число связных компонент). С другой стороны, компактное пространство разрешимой группы Ли всегда квазикомпактно [9]. Это связано с тем, что связная одномерная группа Ли F либо компактна и тогда она изоморфна окружности $S^1 = SO(2)$, либо ее инвариантная мера бесконечна и в этом случае F изоморфна $\mathbf{R}$ (подробности см. в [9]).

Гладкое многообразие M будем называть *квазикомпактным*, если существует некоторое транзитивное действие связной группы Ли G, относительно которого M становится квазикомпактным однородным пространством группы Ли G. На одном и том же однородном многообразии существуют обычно много разных (даже только эффективных) транзитивных действий групп Ли. Для понятия квазикомпактного многообразия важен лишь сам факт существования указанной группы Ли G.

Отметим, что отношение квазиравномерности на парах (группа Ли, ее замкнутая подгруппа) транзитивно [8, 5].

В [3–5] рассмотрен более широкий, чем квазикомпактные, класс плезиокомпактных однородных пространств. Однородное пространство G/H называется *плезиокомпактным*, если в группе Ли G существует замкнутая подгруппа P, содержащая H и такая, что пространство G/P компактно (т. е. P равномерна в G), а однородное пространство P/H квазикомпактно.

В § 1 доказана возможность перехода от исходного транзитивного действия на квазикомпактном однородном пространстве к правильному действию (теорема 1), обладающему полезными дополнительными свойствами. Доказана теорема 2, касающаяся строения стационарной подгруппы для квазикомпактного однородного пространства.

В § 2 получены результаты о строении квазикомпактных однородных пространств, принадлежащих некоторым специальным классам. В § 3 описаны квазикомпактные однородные многообразия размерности ≤ 6. В § 4 изучена фундаментальная группа квазикомпактных однородных пространств, описаны ее строение и связанные с ней конструкции.

Группы Ли в статье обозначаются заглавными латинскими буквами. Для связной группы Ли G ее разложение Леви будет обозначаться обычно через $G = S \cdot R$, где R — радикал, а S — подгруппа Леви (или полупростая часть, возможно, с индексами) в группе Ли G. Для произвольной связной полупростой группы Ли S будет использоваться очевидное разложение $S = S_{\text{н}} \cdot S_{\text{к}}$ в почти прямое произведение (пересечение факторов конечно) нормальных подгрупп Ли $S_{\text{н}}$ и $S_{\text{к}}$, где $S_{\text{к}}$ — наибольшая связная компактная нормальная подгруппа Ли, а $S_{\text{н}}$ — дополнительная к ней в S связная полупростая нормальная подгруппа Ли ($S_{\text{н}}$ полупроста и не имеет компактных факторов). Через G_0 обозначается связная компонента единицы группы Ли G, а через $N_G(H)$ — нормализатор в G некоторой ее подгруппы H.

Решеткой в группе Ли G называется дискретная квазиравномерная подгруппа, а *равномерной решеткой* — дискретная подгруппа с компактным фактор-пространством. Две (абстрактные) группы называются *соизмеримыми*, если в них существуют подгруппы конечных индексов, изоморфные между собой. Нам понадобится более общее понятие — слабая соизмеримость групп. Две группы Γ и Γ' называются *слабо соизмеримыми*, если в них существуют подгруппы Γ_1 и Γ_1' конечных индексов, а в тех — конечные нормальные подгруппы Φ и Φ' соответственно такие, что фактор-группы Γ_1/Φ_1 и Γ_1'/Φ_1' между собой изоморфны.

Под многообразием будем понимать (обычно связное) гладкое многообразие. Через $M' \to M \to M''$ обозначается гладкое локально тривиальное расслоение гладкого многообразия M над базой M'' со слоем M'.

§ 1. Общие результаты о квазикомпактных однородных пространствах

Пусть $M = G/H$ — квазикомпактное однородное пространство связной группы Ли G. Транзитивное действие группы Ли G на M называется *правильным*, если $N_G(H_0) \cdot S = G$, где S — подгруппа Леви в G. Как известно (см. [4]), всегда возможен переход от произвольного транзитивного действия к правильному (если при этом от M при необходимости перейти к некоторому многообразию M', его конечнолистно накрывающему). Докажем, что для квизикомпактного случая этот результат может быть усилен (в частности, G'/H' тоже будет квазикомпактно).

Теорема 1. *Пусть $M = G/H$ — квазикомпактное однородное пространство связной группы Ли G. Тогда существует квазикомпактное однородное пространство $M' = G'/H'$, конечнолистно накрывающее M и такое, что $N_{G'}(H_0) \cdot S_{\text{к}}' = G'$, где $S_{\text{к}}'$ — компактная часть подгруппы Леви S' группы Ли G'.*

Доказательство. Так как наше однородное пространство $M = G/H$, в частности, плезиокомпактно, существует однородное пространство $M' = G'/H'$, конечнолистно накрывающее M (как многообразие) и такое, что действие G' на M' правильно, т. е. $N_{G'} \cdot S' = G'$, где S' — подгруппа Леви в G' [4]. Покажем, что для квазикомпактного G/H конструкция из [4] приводит к квазикомпактному же однородному пространству G'/H'. Для это используем результаты и методы из [4].

Можно считать, что группа Ли G односвязна (заменив ее в случае необходимости универсальной накрывающей группы, тоже транзитивной на M). В [4] построено «алгебраическое расщепление» произвольной односвязной группы Ли G — вложение G в расщепимую группу Ли $\mathscr{A}(G)$ специального вида (подробнее см. [4]). Именно в пределах этой группы Ли $\mathscr{A}(G)$ и производится переход от G к другой подгруппе Ли $G' \subset \mathscr{A}(G)$. При этом, заменяя в случае необходимости стационарную подгруппу H подгруппой конечного индекса (что эквивалентно переходу от $M = G/H$ к многообразию M', его конечнолистно накрывающему), получаем, что новая группа Ли G' тоже содержит подгруппу H (точнее, некоторую ее подгруппу H' конечного индекса). Далее доказывается, что многообразия G/H и G'/H' диффеоморфны. Получаем транзитивное действие группы Ли G' на многообразии M', конечнолистно накрывающем исходное многообразие M. Но транзитивное действие G' на M' оказывается уже правильным (именно для этого подгруппа G в $\mathscr{A}(G)$ заменялась подходящей подгруппой $G' \subset \mathscr{A}(G)$). Важную роль в этой конструкции в [4] играла связная нормальная подгруппа Ли $W \subset \mathscr{A}(G)$, содержащаяся и в G, и в G', причем подгруппа $\overline{H' \cdot W}$ (замыкание подгруппы $H' \cdot W$ в $\mathscr{A}(G)$) нормальна в G и G'. При этом фактор-группы Ли $G/\overline{H' \cdot W}$ и $G'/\overline{H' \cdot W}$ абелевы.

Так как по условию подгруппа H квазиравномерна, она квазиравномерна и как подгруппа группы Ли $\overline{H' \cdot W}$. Далее, поскольку $G'/\overline{H' \cdot W}$ — абелева группа Ли, а $\overline{H' \cdot W}$ плезиоравномерна в G' (см. об этом [4]), группа Ли $G'/\overline{H' \cdot W}$ должна быть компактной группой Ли (ибо абелева плезиокомпактная группа Ли всегда компактна). Следовательно, подгруппа $\overline{H' \cdot W}$ квазиравномерна в G', но тогда и подгруппа H' квазиравномерна в G' (так как свойство квазиравномерности подгрупп Ли транзитивно). Доказали, что однородное пространство G'/H' квазикомпактно, причем транзитивное действие на нем группы Ли G' правильное. Этим доказана первая часть утверждения теоремы 1. Теперь остается доказать, что $N_{G'}(H_0) \cdot S'_{\text{к}} = G'$ (это существенно сильнее утверждения о правильности транзитивного действия группы Ли G').

Известно, что для квазикомпактного однородного пространства G'/H' в $N_{G'}(H'_0)$ содержится $S_{\text{н}}$ — некомпактная часть полупростой подгруппы Леви $S' \subset G'$ (см. [9, 10], хотя в этих работах термин «квазикомпактность» не использовался). Имеем $S' = S'_{\text{к}} \cdot S'_{\text{н}}$. Поэтому

$$N_{G'}(H'_0) \cdot S'_{\text{к}} = N_{G'}(H'_0) \cdot S'_{\text{н}} \cdot S'_{\text{к}} = N_{G'}(H'_0) \cdot S' = G'.$$

Доказали требуемое: $N_{G'}(H'_0) \cdot S'_{\text{к}} = G'$. Доказательство теоремы 1 закончено.

Отметим, что в доказательстве теоремы 1 содержится неявно утверждение о том, что подгруппа Ли $N_{G'}(H'_0)$ почти связна, т. е. имеет конечное число связных компонент (ибо группа Ли $S_{\text{к}}$ компактна).

Теорема 1 позволяет для квазикомпактных однородных пространств ввести и использовать целый набор расслоений, введенных ранее автором в компактном и плезиокомпактном случаях (см. например, обзоры [1, 6]): натуральное, структурное и борелевское. Так как получаемые при этом результаты совершенно параллельны установленным ранее в указанных выше случаях, здесь не будем останавливаться на этом. Нас больше интересуют результаты, специфические именно для квазикомпактных однородных пространств и не имеющие, вообще говоря, аналогов в компактном и плезиокомпактном случаях.

Следствие 1. *Пусть $M = G/H$ — квазикомпактное однородное пространство связной группы Ли G, для которой компактная компонента $S_{\text{к}}$ подгруппы Леви $S \subset G$ тривиальна (при этом обычно говорят, что G не имеет компактных полупростых факторов). Тогда существует конечнолистно накрывающее M однородное пространство вида $G^\star/\Gamma^\star$, где $\Gamma^\star$ — решетка в некоторой связной группе Ли $G^\star$ (такое однородное пространство автоматически квазикомпактно).*

Доказательство сразу следует из теоремы 1. В рассматриваемом сейчас случае $S'_{\text{н}} = S_{\text{н}} = \{e\}$ и потому $N_{G'}(H'_0) = G'$, т. е. связная подгруппа H'_0 нормальна в G'. Положим $G^\star = G'/H'_0, \Gamma^\star = H'/H'_0$ (это будет квазиравномерная дискретная подгруппа, т. е. решетка в $G^\star$) и получим искомое однородное пространство $M' = G^\star/\Gamma^\star$.

Отметим, что аналогичный результат при более сильных ограничениях на G ранее был доказан в [10] (где предполагалось отсутствие любых, а не только полупростых, как у нас, компактных фактор-групп).

Покажем теперь, какова роль условия компактности подгруппы Леви для транзитивных действий групп Ли.

Предложение 1. *Пусть $M = G/H$ — плезиокомпактное однородное пространство группы Ли G. Если подгруппа Леви S группы Ли G компактна, то однородное пространство G/H квазикомпактно.*

Доказательство. Пусть $P = H \cdot N_G(H_0)$ — замкнутая подгруппа Ли в G (при этом можно группу Ли G предполагать односвязной), причем содержащая нильрадикал N группы Ли G (см. [4]). Рассмотрим однородное пространство G/P, тогда $G/P = G'/P'$, где $G' = G/N, P' = P/N$. Так как подгруппа Леви группы Ли G по условию компактна, а индуцированное действиями на радикале R группы Ли S действие на R/N, как известно, тривиально, то G' — редуктивная группа Ли. Имеем разложение Леви $G' = S \times A$ (прямое произведение), где $A = R/N$ — односвязная абелева группа Ли, перестановочная с S. Ввиду компактности S на однородном пространстве G'/P' имеется, очевидно, конечная инвариантная мера.

С другой стороны, рассмотрим однородное пространство P/H. Имеем $P/H = G^\star/\Gamma^\star$, где $G^\star = P/H_0$, а $\Gamma^\star = H/H_0$ — решетка. Но тогда однородное пространство P/H тоже квазикомпактно. Отсюда вытекает, что и исходное пространство G/H квазикомпактно (в силу транзитивности свойства квазиравномерности подгрупп).

Транзитивное действие группы Ли G на ее однородном пространстве M называется несократимым, если оно локально эффективно и в G нет собственных подгрупп, транзитивных на M. Ясно, что от произвольного транзитивного действия можно перейти к несократимому (с помощью подходящей факторизации и перехода к подходящей транзитивной подгруппе Ли). Укажем некоторые особенности стационарной подгруппы для несократимых транзитивных действий на квазикомпактных однородных пространствах (которые для компактных и плезиокомпактных пространств, вообще говоря, неверны).

Теорема 2. *Пусть $M = G/H$ — квазикомпактное однородное пространство группы Ли G, причем действие G на M несократимо. Тогда H_0 содержится в коммутанте $[\widehat{G}, \widehat{G}]$ группы Ли $\widehat{G} = S_{\text{к}} \cdot R$, где R — радикал группы Ли G, а*

$S_{\text{к}}$ — компактная часть подгруппы Леви в G. При этом $H_0 \cap R \subset N$, где N — нильрадикал группы Ли G.

Доказательство. Подгруппа Ли $\widehat{G} = S_{\text{к}} \cdot R$ замкнута и нормальна в G. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\pi : G \to G/\widehat{G}$ с ядром $\widehat{G}$. Группа Ли $G/\widehat{G}$, очевидно, локально изоморфна полупростой группе Ли $S_{\text{н}}$ (некомпактной компоненты подгруппы Леви S группы Ли G). Из [10] следует, что подгруппа $\pi(H_0)$ нормальна в $\pi(G) = G/\widehat{G}$. Поэтому существует дополнительная к $\pi(H_0)$ нормальная подгруппа $S^\star \subset \pi(G)$ (т. е. $\pi(G) = \pi(H_0) \cdot S^\star$ и пересечение $S^\star \cap \pi(H_0)$ дискретно). Положим $G^\star = \pi^{-1}(S^\star)$. Ясно, что $G^\star \cdot H = G$, т. е. подгруппа Ли $G^\star \subset G$ транзитивна на G/H. Из несократимости действия группы Ли G на многообразии M следует, что $G^\star = G$, но тогда $\pi(H_0) = \{e\}$, т. е. $H_0 \subset \widehat{G}$.

Рассмотрим теперь коммутант $[\widehat{G}, \widehat{G}]$ группы Ли $\widehat{G}$, являющийся замкнутой нормальной подгруппой Ли в $\widehat{G}$. Пусть $\mu : \widehat{G} \to \widehat{G}/[\widehat{G}, \widehat{G}]$ — естественный эпиморфизм на абелеву группу Ли. Подгруппа Ли $\mu(H_0)$ связна и имеет дополнительную к ней связную подгруппу A в абелевой группе Ли $\mu(\widehat{G})$. Имеем $N_G(H_0) \supset S_{\text{н}}$ (как отмечалось выше, это доказано в [10]). Поэтому действие группы Ли $S_{\text{н}}$ на $\mu(\widehat{G})$, индуцированное действием $S_{\text{н}}$ на $\widehat{G}$ сопряжениями, сохраняет подгруппу Ли $\mu(H_0)$. Но тогда и дополнение A для $\mu(H_0)$ можно выбрать $S_{\text{н}}$-инвариантным. Положим $G_1 = \mu^{-1}(A)$, тогда G_1 — замкнутая подгруппа Ли в $\widehat{G}$, причем $S_{\text{н}}$ ее нормализует. Положив теперь $G^{\star\star} = S_{\text{н}} \cdot G_1$, получим, очевидно, подгруппу Ли в G, причем транзитивную на M. В силу несократимости действия G на M отсюда следует, что $G^{\star\star} = G$. Но тогда $\mu(H_0) = \{e\}$, т. е. $H_0 \subset [\widehat{G}, \widehat{G}]$.

Наконец, имеем $H_0 \cap K \subset [G, G] \cap R$, но, как хорошо известно, $[G, G] \cap K \subset N$ (для любой группы Ли G) и потому $H_0 \cap R \subset N$. Теорема 2 полностью доказана.

В условиях теоремы 2 имеем, в частности, включение $H_0 \subset S_{\text{к}} \cdot R$. Оказывается, что то же иногда верно и без условия несократимости действия группы Ли G на M (которое предполагалось выполненным в теореме 2). Покажем это.

Пусть $M = G/H$ — некоторое квазикомпактное однородное пространство группы Ли G, и предположим, что связная компонента единицы H_0 стационарной подгруппы H разрешима. Тогда и подгруппа $\overline{(H \cdot R)}$ тоже разрешима (где R — радикал группы Ли G). Поэтому $\overline{(H \cdot R)} \subset S_{\text{к}} \cdot R$. В частности, имеем (при указанном выше ограничении на H_0) включение $H_0 \subset S_{\text{к}} \cdot R$.

Связная группа Ли G называется *группой Ли типа* (I), если для любого $g \in G$ все собственные значения линейного оператора Ad_g по модулю равны единице (Ad — присоединенное представление группы Ли G). Строение групп Ли типа (I) можно подробно описать (см., например, [11]); с его помощью из теоремы 2 получаем

Следствие 2. *В условиях теоремы 2 подгруппа H_0 является группой Ли типа (I).*

Доказательство. Пусть $H_0 = S' \cdot R'$ — разложение Леви для связной группы Ли H_0. Из теоремы 2 следует, что, во-первых, подгруппа Леви S' компактна, а во-вторых, $R' \subset S_{\text{к}} \cdot N$. Из этих двух утверждений вытекает, что H_0 — группа Ли типа (I) (см. [11]).

§ 2. О некоторых классах квазикомпактных однородных пространств

Для произвольного квазикомпактного однородного пространства $M = G/H$ существуют два расслоения: $M_a \to M' \to M_a$ и $M_r \to M_a \to M_s$, где M' — некоторое однородное пространство, конечнолистно накрывающее M (см. для более общего случая [4]). Первое расслоение называется *натуральным*, его база — асферичное многообразие, а слой — почти односвязное однородное пространство (некоторой компактной полупростой группы Ли). Второе расслоение называется *структурным*, здесь расслаивается база M_a натурального расслоения. База структурного расслоения — локально-симметрическое риманово многообразие отрицательной кривизны и конечного объема, а слой — компактное солвмногообразие (однородное пространство некоторой разрешимой группы Ли), имеющее вид R/Γ, где Γ — равномерная решетка в односвязной разрешимой группе Ли R (подробнее об этих расслоениях см. [1, 4]).

Можно выделить (как и в компактном и в плезиокомпактном случаях) три широких класса квазикомпактных однородных пространств M: асферичные (для них все гомотопические группы $\pi_i(M)$ при $i \geq 2$ тривиальны или, что эквивалентно, слой натурального расслоения M_{c} вырождается в точку), разрешимые (для них фундаментальная группа $\pi_1(M)$ разрешима или, что эквивалентно, M_s — точка) и полупростые (для них M_r вырождается в точку или, что эквивалентно, в группе $\pi_1(M)$ нет бесконечных разрешимых нормальных подгрупп). Ниже приведены результаты, позволяющие выделить квазикомпактные однородные пространства указанных трех классов среди всех плезиокомпактных однородных пространств. Все эти три класса соответствуют вырождениям в точку одной из указанных выше трех компонент M_c, M_s, M_r.

Предложение 2. *Пусть M — асферичное плезиокомпактное однородное пространство. Тогда существует квазикомпактное однородное пространство вида $M' = G'/\Gamma'$ (где Γ' — решетка в некоторой асферичной группе Ли G'), конечнолистно накрывающее многообразие M.*

Доказательство получается из следствия 1, если учесть, что для плезиокомпактного (а тем более для нашего квазикомпактного) однородного пространства транзитивная и локально эффективная группа Ли асферична и потому не имеет нетривиальных компактных полупростых факторов.

Для случая разрешимых квазикомпактных однородных пространств в [3] доказано

Предложение 3. *Если $M = G/H$ — плезиокомпактное однородное пространство, причем действие связной группы Ли G на M локально эффективно, то M квазикомпактно и разрешимо тогда и только тогда, когда $S_{\text{н}} = \{e\}$ (где $S_{\text{н}}$ — некомпактная часть подгруппы Леви S в G).*

При этом имеется специальная конструкция разрешимых однородных пространств (элементарные однородные пространства), дающая полное описание компактных разрешимых однородных многообразий.

Перейдем к рассмотрению полупростых квазикомпактных однородных пространств $M = G/H$. Если группа Ли G несократимо транзитивна на M, то G полупроста (см. [1]). Однако обратное неверно: не всякое, даже компактное, однородное пространство полупростой группы Ли обязательно полупросто.

Предложение 4. *Если $M = G/H$ — плезиокомпактное однородное пространство полупростой группы Ли G, причем действие G на M локально эффективно, то M квазикомпактно тогда и только тогда, когда $H_0 \subset S_{\text{к}}$, где $S_{\text{к}}$ — компактная компонента группы Ли G.*

Доказательство. Предположим вначале, что $H_0 \subset S_{\text{к}}$, и докажем, что тогда плезиокомпактное однородное пространство G/H на самом деле квазикомпактно, т. е. имеет конечную G-инвариантную меру. Для этого рассмотрим подгруппу Ли $P = N_G(H_0)$. Ясно,что $P \supset S_{\text{н}}$, поэтому однородное пространство G/P квазикомпактно. Но и однородное пространство P/H тоже квазикомпактно, ибо $P/H = F/\Gamma$, где $\Gamma = H/H_0$ — решетка в группе Ли $P = P/H_0$. Следовательно, и однородное пространство G/H квазикомпактно.

Обратно, пусть плезиокомпактное однородное пространство $M = G/H$ квазикомпактно. Тогда имеем $N_G(H_0) \supset S_{\text{н}}$ [10]. Рассмотрим естественный эпиморфизм $\pi : G \to G/S_{\text{к}}$. Подгруппа $\pi(H_0)$, очевидно, нормальная в $\pi(G)$. Но тогда некомпактная часть $S'_{\text{н}}$ подгруппы Леви группы Ли H_0 будет нормальна в G, откуда в силу локальной эффективности действия группы Ли G на M получаем, что $S'_{\text{н}} = \{e\}$. Поэтому $\pi(H_0) = \{e\}$, т. е. $H_0 \subset S_{\text{к}}$. Тем самым доказано и обратное утверждение предложения 4.

Для квазикомпактного полупростого однородного пространства G/H из предложения 4 вытекает включение $H_0 \subset S_{\text{к}} \cdot R$, так как $H_o \cap S \subset S_{\text{к}}$.

§ 3. О классификации квазикомпактных однородных многообразий малой размерности

Напомним, что квазикомпактное многообразие — это гладкое многообразие M, которое допускает транзитивное действие некоторой группы Ли, превращающее M в квазикомпактное однородное пространство. На одном таком многообразии может быть несколько транзитивных действий, превращающих его в квазикомпактное однородное пространство. При изучении квазикомпактных однородных многообразий нас интересует лишь наличие такого транзитивного действия, само же оно не фиксируется (в отличие от случая квазикомпактных однородных пространств). Квазикомпактные однородные многообразия естественно изучать с точностью до диффеоморфизма, а также, как подсказывает опыт изучения компактных однородных многообразий (см. обзор [1]), и с точностью до конечнолистного накрытия.

В [3] вкратце опубликовано доказательство следующего утверждения (использующего [12]).

Теорема 3. *Если M — однородное многообразие и $\dim M \leq 3$, то M квазикомпактно (относительно транзитивного действия некоторой группы Ли) тогда и только тогда, когда многообразие M либо компактно, либо диффеоморфно многообразию вида $\mathscr{A}/\Gamma$, где Γ — (квазиравномерная) решетка в группе Ли $\mathscr{A}$, универсальной накрывающей для $SL(2, \mathbf{R})$.*

Рассмотрим теперь более сложный вопрос — описание квазикомпактных однородных многообразий размерности ≤ 6. Обозримого описания с точностью до диффеоморфизма ожидать не стоит. Рассмотрим описание с точностью до конечнолистного накрытия. При этом будем руководствоваться методами и результатами классификации (с точностью до конечнолистного накрытия) компактных однородных многообразий, данной в [13].

Начнем с общих определений. Однородное многообразие называется *однородно разложимым*, если оно диффеоморфно прямому произведению двух однородных многообразий положительной размерности. Однородное многообразие (как и вообще любое гладкое многообразие) называется *разложимым*, если оно диффеоморфно прямому произведению двух многообразий положительной размерности. Может оказаться, что однородное многообразие разложимо как гладкое многообразие, но однородно разложимым не будет (см. ниже). Ясно, что для описания всех однородных многообразий размерности $\leq n$ (для некоторого фиксированного натурального n) с точностью до диффеоморфизма достаточно описать только все однородно неразложимые однородные многообразия размерности $\leq n$. В [13] доказана

Теорема 4. *Компактное однородное и однородно неразложимое многообразие размерности ≤ 6 диффеоморфно с точностью до конечнолистного накрытия одному из следующих.*

(i) *Односвязные: сферы S^n $(2 \leq n \leq 6)$, комплексные проективные пространства $\mathbf{C}P^k$ $(k = 2, 3)$, $SU(3)/SO(3)$, $SU(3)/T^2$ — пространство флагов в $\mathbf{C}^3$, где T^2 — максимальный тор в $SU(3)$, многообразие Грассмана $G_{5,2} = SO(5)/SO(2) \times SO(3)$.*

(ii) *Асферичные:*

(a) *солвмногообразия вида R/Γ, где Γ — равномерная решетка в односвязной разрешимой группе Ли R размерности ≤ 6;*

(b) *$\mathscr{A}/\Gamma$, где Γ — равномерная решетка в односвязной трехмерной группе Ли $\mathscr{A}$, универсальной накрывающей для простой группы Ли $SL(2,\mathbf{R})$; $\mathscr{A} \times \mathscr{A}/D$, где D — неприводимая равномерная решетка в $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$; $\mathscr{A} \times_{\mathrm{Ad}} \mathbf{R}^3/\Gamma$, где Γ — равномерная решетка в группе Ли $\mathscr{A} \times_{\mathrm{Ad}} \mathbf{R}^3$ — полупрямом произведении $\mathscr{A}$ и $\mathbf{R}^3$, соответствующем присоединенному представлению $\mathrm{Ad} : \mathscr{A} \to GL(3,\mathbf{R})$).*

(iii) *Общего вида: $SL(2,\mathbf{C})/\Gamma$, где Γ — равномерная решетка в $SL(2,\mathbf{C})$ (это многообразие диффеоморфно прямому произведению S^3 и трехмерного компактного гиперболического многообразия), а также $S^3 \times F_g$, где F_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$.*

Отметим, что многообразия из (iii) являются разложимыми (но не однородно разложимыми). Все многообразия из (i) неразложимы. Солвмногообразия из (ii) разложимы тогда и только тогда, когда они однородно разложимы. Однородно разложимым компактное солвмногообразие будет тогда и только тогда, когда разложима в нетривиальное прямое произведение его фундаментальная группа. Многообразия из п. b в (ii) неразложимы.

По аналогии с [13] можно получить и классификацию плезиокомпактных однородных многообразий размерности ≤ 6 и даже ≤ 7 с очевидными изменениями в формулировке: вместо равномерных решеток нужно брать произвольные (квазиравномерные) решетки.

Перейдем к нашему квазикомпактному случаю. Квазикомпактное однородное многообразие назовем *q-однородно разложимым*, если оно диффеоморфно прямому произведению двух квазикомпактных однородных многообразий положительной размерности (отметим, что прямое произведение двух квазикомпактных однородных многообразий тоже, очевидно, является квазикомпактным однородным многообразием).

Вообще говоря, может оказаться, что квазикомпактное однородное многообразие однородно разложимо, но не q-однородно разложимо.

Теорема 5. *Квазикомпактное однородное и q-однородно неразложимое многообразие размерности ≤ 6 диффеоморфно с точностью до конечнолистного накрытия одному из следующих.*

(i) *Односвязные: сферы S^n $(2 \leq n \leq 6)$, комплексные проективные пространства $\mathbf{C}P^k$ $(k = 2, 3)$, $SU(3)/SO(3)$, $SU(3)/T^2$ — пространство флагов в $\mathbf{C}^3$, где T^2 — максимальный тор в $SU(3)$, и многообразие Грассмана $G_{5,2} = SO(5)/SO(2) \times SO(3)$.*

(ii) *Асферичные:*

(a) *солвмногообразия вида R/Γ, где Γ — решетка в односвязной разрешимой группе Ли R размерности ≤ 6.*

(b) *$\mathscr{A}/\Gamma$, где Γ — решетка в односвязной трехмерной группе Ли $\mathscr{A}$ (универсальной накрывающей для простой группы Ли $SL(2, \mathbf{R})$), $\mathscr{A} \times \mathscr{A}/D$, где D — неприводимая решетка в $\mathscr{A} \times \mathscr{A}$), $\mathscr{A} \times_{\mathrm{Ad}} \mathbf{R}^3/\Gamma$, где Γ — решетка в группе Ли $\mathscr{A} \times_{\mathrm{Ad}} \mathbf{R}^3$, полупрямом произведении $\mathscr{A}$ и $\mathbf{R}^3$, соответствующем присоединенному представлению $\mathrm{Ad} : \mathscr{A} \to GL(3, \mathbf{R})$.*

(iii) *Общего вида: $SL(2, \mathbf{C})/\Gamma$, где Γ — решетка в $SL(2, \mathbf{C})$; это многообразие диффеоморфно прямому произведению S^3 и трехмерного гиперболического многообразия конечной меры.*

Доказательство. Покажем прежде всего, что все многообразия, перечисленные в формулировке теоремы 5, квазикомпактны (их однородность сразу видна из их явного вида). Однородные пространства компактных групп Ли всегда имеют конечную инвариантную меру, поэтому все многообразия из п. (i) квазикомпактны. Все многообразия из пп. (ii), (iii) суть фактор-пространства связных групп Ли по решеткам (квазиравномерным). Поэтому они очевидным образом квазикомпактны.

Пусть теперь $M = G/H$ — некоторое квазикомпактное q-однородно неразложимое однородное многообразие. Используя буквально те же рассуждения, что в [13], можно убедиться, что они всегда работают и в квазикомпактном случае. Но тогда M с точностью до конечнолистного накрытия диффеоморфно одному из многообразий, аналогичных фигурирующим в тереме 4 (только в этом случае, говоря о решетках, не нужно добавлять требование их равномерности). В следующем параграфе будет показано, что однородные многообразия $S^3 \times F_g$ (где F_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$) не квазикомпактны. Это завершает доказательство теоремы 5

Можно дать и другое доказательство теоремы 5, основываясь не на аналогии с компактным случаем в [13], а на специфических особенностях квазикомпактного случая (особенно следствие 1). Некоторые соображения, которые можно при этом использовать, приведены в конце этого параграфа.

Теоремы 4 и 5 по формулировкам почти неотличимы. Ясно, что в теореме 5 исчезает условие равномерности фигурирующих там решеток. Кроме того, имеется единственное отличие: в п. (iii) теоремы 5 отсутствуют многообразия вида $S^3 \times F_g$ (где F_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$), так как они не квазикомпактны. Все остальные однородные многообразия из теоремы 5 — это прямые аналоги соответствующих многообразий из теоремы 4, которые назовем *q-аналогами* (квазикомпактными однородными аналогами) компактных однородных многообразий.

Отметим, что солвмногообразия из п. (ii) q-однородно разложимы тогда и только тогда, когда они разложимы. Компактное солвмногообразие разложимо тогда и только тогда, когда разложима в нетривиальное прямое произведение его фундаментальная группа.

Несколько слов о семимерных квазикомпактных однородных многообразиях. Можно получить классификацию, совершенно аналогичную полученной в [13], с точностью до конечнолистного накрытия компактных однородных многообразий размерности 7. Здесь заниматься этим не будем, ибо даже формулировка получаемого результата весьма громоздка. Укажем только несколько специфических для квазикомпактного случая методов, которые позволяют получить классификацию (с точностью до конечнолистного накрытия) для квазикомпактных однородных многообразий (причем не только в размерности 7).

Пусть $M = G/H$ — квазикомпактное однородное пространство группы Ли $G = S \cdot R$ (R — ее радикал, а S — фактор Леви или полупростая часть в G). Если полупростая группа Ли S не имеет компактных факторов, то в силу следствия 1 можно считать, что стационарная подгруппа H дискретна (т. е. является решеткой в G), причем ее структура описывается в следствии 3 (см. § 4). Явное описание квазикомпактных однородных многообразий M возможно во многих частных случаях (в том числе и в малых размерностях: 6, 7 и даже 8).

Рассмотрим теперь случаи, когда полупростая группа Ли S имеет нетривиальный компактный фактор. Начнем со случая, когда сама S компактна.

Если полупростая часть группы Ли G компактна, то однородное многообразие M разрешимо (т. е. его фундаментальная группа слабо соизмерима с разрешимой группой). Но тогда M обязательно компактно и этот случай уже был подробно изучен (см., например, обзор [1]). В частности, любое компактное однородное многообразие с разрешимой фундаментальной группой можно рассматривать как квазикомпактное, т. е. на нем транзитивна некоторая группа Ли (с компактной полупростой частью), сохраняющая некоторую меру на M (очевидно, конечную в силу компактности M).

Остается рассмотреть случаи, когда группа S некомпактна, но имеет нетривиальный компактный фактор. В этом случае полезно прибегнуть к использованию натурального расслоения, упомянутого во введении. Слой M_c натурального расслоения должен быть нетривиален, т. е. его размерность положительна (причем она не может равняться 1, см. [1]). Для случаев размерностей слоя, равных 2 или 4, получаем однородно разложимые однородные многообразия (которые описать намного легче, чем общие M). Первым нетривиальным для классификаций будет случай, когда размерность слоя натурального расслоения равна 3, в таком случае этот слой диффеоморфен сфере S^3. Здесь оказывается полезным ввести в рассмотрение структурное расслоение базы натурального расслоения. Его подробное исследование позволяет заметно продвинуться в изучении рассматриваемого случая, но здесь мы этим заниматься не будем.

§ 4. О фундаментальной группе квазикомпактных однородных пространств

Переходим к более подробному изучению фундаментальной группы $\pi_1(M)$ квазикомпактного однородного пространства, рассматривая ее с точностью до слабой соизмеримости (или, как еще иногда говорят, с точностью до конечных групп).

Теорема 6. *Пусть π — некоторая абстрактная группа. Группа π слабо соизмерима с $\pi_1(M)$ для некоторого квазикомпактного однородного пространства M тогда и только тогда, когда π слабо соизмерима с решеткой в некоторой* *односвязной группе Ли F, компактная полупростая часть которой тривиальна (т. е. $S_{\text{к}} = \{e\}$).*

Доказательство. Предположим вначале, что группа π слабо соизмерима с решеткой Γ в некоторой односвязной группе Ли G. Тогда однородное пространство G/Γ квазикомпактно и его фундаментальная группа (изоморфная Γ в силу односвязности группы Ли G) слабо соизмерима с заданной группой π. Докажем обратное утверждение.

Пусть $M = G/H$ — некоторое квазикомпактное однородное пространство группы Ли G (не имеющей компактных полупростых факторов), фундаментальная группа $\pi_1(M)$ которого слабо соизмерима с некоторой группой π. Можно считать, что транзитивная на M группа Ли G односвязна и действует на M правильно (переход к правильному действию приводит к замене фундаментальной группы группой, с ней слабо соизмеримой, см. теорему 1). Далее, в силу замечания после теоремы 1 подгруппа $P = N_G(H_0)$ почти связна. Переходя в случае необходимости от H к подходящей ее подгруппе конечного индекса (что тоже не выводит из класса групп, слабо соизмеримых с фундаментальной группой), можно считать, что $H \subset P_0$. Положим тогда $\Gamma = H/H_0$, $F = P_0/H_0$, здесь Γ — решетка (причем слабо соизмеримая с группой π) в группе Ли F. Пусть $F = S^\star \cdot R^\star$ — разложение Леви группы Ли F.

При доказательстве теоремы B в [14] показано (конечно, в других обозначениях), что в группе Ли F существуют связная равномерная (т. е. с компактным фактор-пространством) подгруппа U, содержащая $S^\star_{\text{н}} \cdot R^\star$, а в ней компактная нормальная подгруппа C такие, что $\Gamma \cap U$ — подгруппа конечного индекса в Γ, а U/C — связная группа Ли с односвязным радикалом и тривиальной компактной компонентой ее подгруппы Леви. Заменяя Γ подгруппой конечного индекса (класс соизмеримости при этом не меняется), можно считать, что $\Gamma \subset U$.

Так как группа Ли G односвязна, односвязна и $S_{\text{н}}$, причем $S_{\text{н}} \cap S_{\text{к}} \cdot R = \{e\}$. Отсюда и из того факта, что $U \supset S_{\text{н}}$, следует, что группа Ли U/C односвязна. Подгруппа $\Gamma^\star = \Gamma/\Gamma \cap C$ является (квазиравномерной) решеткой в группе Ли $G^\star = U/C$, причем $\Gamma^\star$ слабо соизмерима с π (слабая соизмеримость вместо обычной соизмеримости возникает из-за того, что конечная подгруппа $\Gamma \cap C$ может оказаться нетривиальной). Искомое вложение получено.

Замечание 1. Вложение (с точностью до слабой соизмеримости) фундаментальной группы $\pi_1(M)$ в качестве решетки в связную группу Ли имеется и в компактном, и в плезиокомпактном случаях (см. [1, 4]), где в отличие от квазикомпактного случая эту группу Ли не всегда можно выбрать односвязной. Например, рассмотрим однородное многообразие $M = F_g \times S^3$, где F_g — замкнутая ориентируемая поверхность рода $g \geq 2$ (об однородности M см. [1]). Фундаментальная группа $\pi_1(M)$ изоморфна группе $\pi_1(F_g)$. Но группа $\pi_1(F_g)$ при $g \geq 2$, будучи равномерной решеткой в группе Ли $SL(2, \mathbf{R})$ (неодносвязной), не вкладывается, даже с точностью до слабой соизмеримости, в качестве решетки ни в какую односвязную группу Ли (см., например, [1])). В частности, получаем, что многообразие $F_g \times S^3$ не квазикомпактно (это использовано в § 3).

Замечание 2. Если группа π изоморфна $\pi_1(M)$ для некоторого квазикомпактного однородного пространства M, а группа π' слабо соизмерима (или даже просто соизмерима) с π, то эта группа π' не всегда изоморфна группе $\pi_1(M)$ для некоторого однородного пространства M', а если такое M' все же существует, то его не всегда можно выбрать квазикомпактным.

Следствие 3. *Пусть M — квазикомпактное однородное пространство. Тогда группа $\pi_1(M)$ слабо соизмерима с группой $\pi = \pi_s^\star \ltimes \pi_r^\star$ — полупрямым произведением решетки $\pi_s^\star$ в некоторой односвязной полупростой группе Ли S без компактных факторов и равномерной решетки $\pi_r^\star$ в некоторой односвязной разрешимой группе Ли R.*

Доказательство. В силу теоремы 3 группа $\pi_1(M)$ слабо соизмерима с решеткой Γ в некоторой односвязной группе Ли $G = S \cdot R$ (это ее разложение Леви), для которой $S_{\text{к}} = \{e\}$. В силу [14] в Γ существует такая подгруппа конечного индекса Γ_0, изоморфная решетке D в G, для которой имеем $D = (D \cap S) \cdot (D \cap R)$ — полупрямое произведение. При этом $D \cap S$ — решетка в S, а $D \cap R$ — решетка в разрешимой группе Ли R, причем она обязательно равномерна [9]. Положив $\pi_s^\star = D \cap S$, $\pi_r^\star = D \cap R$, получим утверждение теоремы 4.

Отметим, что односвязная полупростая группа Ли S в следствии 3 определяется по M (и даже по $\pi_1(M)$) однозначно с точностью до изоморфизма, так что ее можно обозначить через $S(\pi_1(M))$. Для разрешимой группы Ли R из следствия 3 подобное утверждение, вообще говоря, неверно.

В силу теоремы 3 группе $\pi_1(M)$ для квазикомпактного однородного пространства M можно сопоставить односвязную группу Ли $F = F(\pi_1(M))$, не имеющую компактных полупростых факторов. Группой $\pi_1(M)$ эта группа Ли не определяется однозначно, однако однозначно определяются ее подгруппа Леви и максимальная компактная подгруппа $K = K(\pi_1(M))$ в ней, которая является и максимальной компактной подгруппой во всей группе Ли G, так как радикал группы Ли G односвязен и потому не имеет нетривиальных компактных подгрупп.

Положим
$$M(\pi_1(M)) = F(\pi_1(M))/\Gamma,$$
где Γ — фигурирующая в теореме 3 решетка в $F(\pi_1(M))$, причем слабо соизмеримая с $\pi_1(M)$. Однородное пространство $M(\pi_1(M))$ квазикомпактно, назовем его *модельным однородным пространством* для исходного однородного пространства M. Основанием для введения $M(\pi_1(M))$ служит следующая

Теорема 7. *Пусть M — квазикомпактное однородное пространство и группа $\pi_1(M)$ слабо соизмерима с решеткой Γ в некоторой односвязной группе Ли F. Тогда многообразие F/Γ определяется группой $\pi_1(M)$ однозначно с точностью до конечнолистного накрытия.*

Доказательство. Если решетка Γ равномерна в F, то утверждение теоремы 7 доказано в [14]. Для произвольного же квазикомпактного однородного пространства M (и квазиравномерной решетки Γ) утверждение теоремы 7 вытекает из такого усиления леммы A из [14].

Предложение 5. *Пусть Γ, Γ' — решетки в односвязных группах Ли G, G' соответственно, причем $S_{\text{к}} = S'_{\text{к}} = \{e\}$. Если группы Γ и Γ' слабо соизмеримы, то существуют такие подгруппы конечных индексов $\Gamma_\star \subset \Gamma, \Gamma'_\star \subset \Gamma'$, что многообразия $G/\Gamma_\star$ и $G'/\Gamma'_\star$ диффеоморфны.*

Доказательство предложения 5. Если в подгруппе Леви S группы Ли G нет таких трехмерных простых факторов S_1 (локально изоморфных группе Ли $\mathscr{A}$), что подгруппа $\Gamma \cdot S_1 \cdot R$ замкнута в G (здесь R — это радикал группы Ли G), то утверждение предложения 5 доказано в [14, теорема A]. Если же такая S_1 существует, то, как следует из [14], для доказательства предложения 5 достаточно доказать следующий аналог леммы 4.3 из [14].

Лемма. *Пусть Γ, Γ' — две решетки в группе Ли $\mathscr{A}$ (универсальной накрывающей для группы Ли $SL(2, \mathbf{R})$). Если группы Γ и Γ' между собой изоморфны, то в них существуют такие подгруппы конечных индексов $\Gamma_0 \subset \Gamma, \Gamma_0' \subset \Gamma'$, что $\mathscr{A}/\Gamma_0$ и $\mathscr{A}/\Gamma_0'$ между собой диффеоморфны.*

Доказательство леммы. Если хотя бы одна из решеток Γ, Γ' равномерна в $\mathscr{A}$, то утверждение леммы доказано в [14]. Поэтому остается рассмотреть случай, когда обе квазиравномерные решетки Γ, Γ' не равномерны.

Рассмотрим подгруппу $\Gamma \cap Z(\mathscr{A})$, где $Z(\mathscr{A}) \simeq \mathbf{Z}$ — центр группы Ли $\mathscr{A}$. Тогда $\Gamma \cap Z(\mathscr{A})$ имеет конечный индекс в $Z(\mathscr{A})$ и $\Gamma \cdot Z(\mathscr{A})$ — решетка (квазиравномерная) в $\mathscr{A}$ (см. [15], где рассмотрен случай равномерной решетки, но для квазиравномерной доказательство тоже проходит). Пусть C — связная подгруппа Ли в $\mathscr{A}$, отвечающая подалгебре $so(2) \subset sl(2, \mathbf{R})$, тогда $Z(\mathscr{A}) \subset C$. Рассмотрим гладкое расслоение

$$C/\Gamma \cap Z(\mathscr{A}) \to \mathscr{A}/\Gamma \to C \setminus \mathscr{A}/\Gamma \cdot Z(\mathscr{A}) = X.$$

Слоем этого расслоения будет окружность $S^1 = C/\Gamma \cap Z(\mathscr{A})$, а базой X — некоторая ориентируемая поверхность. Так как по условию многообразие $\mathscr{A}/\Gamma$ некомпактно, поверхность X тоже некомпактна, а потому $\pi_1(X) = F$ — свободная группа (причем конечнопорожденная, ибо такова в силу ее квазиравномерности решетка Γ). Рассматриваемое расслоение является $SO(2)$-главным и определяется своим характеристическим классом с $\in H^2(X, \mathbf{Z}) = H^2(\pi_1(X)) = \{0\}$) (ибо двумерные когомологии свободной группы тривиальны). Но тогда $c = 0$, наше расслоение тривиально и многообразие $\mathscr{A}/\Gamma$ диффеоморфно $S^1 \times X$.

Так как Γ — решетка, поверхность X конечного типа (т. е. она получается из компактной поверхности удалением конечного числа точек), которая с точностью до диффеоморфизма определяется родом g (у нас $g \geq 2$) и числом дыр h ($h \geq 1$, иногда говорят о числе граничных компонент, переходя к компактификации поверхности, подробнее см. [16]), причем $\pi_1(X) \simeq F_{2g} \star F_{h-1}$ — свободное произведение свободных групп с $2g$ и $h-1$ образующими соответственно [16]. Для $\mathscr{A}/\Gamma'$ так же получаем, что это многообразие диффеоморфно $S^1 \times X'$ и поверхность X' однозначно определяется соответственно параметрами g', h'.

Покажем теперь, что существует поверхность $X^\star$ (конечного типа), конечнолистно накрывающая как X, так и X'. Для этого воспользуемся критерием существования конечнолистного накрытия одной поверхности конечного типа другой [16, теорема 3.4.2]. Для таких ориентируемых поверхностей (как у нас) k-листное накрытие существует тогда и только тогда, когда, во-первых, эйлерова характеристика χ_1 одной из них k-кратна эйлеровой характеристике χ_2 другой ($\chi_1 = k\chi_2$), а во-вторых, выполнены неравенства $h_2 \leq h_1 \leq kh_2$.

Положим $k = l \cdot (2g' + h' - 2), k' = l \cdot (2g + h - 2)$, где l — некоторое натуральное число, пока произвольное (мы его позже выберем должным образом). Рассмотрим k-листные накрытия $X_1 \to X$ над X и k'-листные накрытия $X_1' \to X'$ над X'. Пусть g_1, h_1 — параметры, определяющие X_1, аналогично g_1', h_1' для поверхности X_1'. Тогда для для эйлеровых характеристик поверхностей X_1 и X' имеем

$$\chi_1 = 2 - 2g_1 - h_1 = k(2 - 2g - h) = l(2 - 2g - h)(2g' + h' - 2) = k'(2 - 2g' - h') = \chi_1'.$$

Тем самым эйлеровы характеристики поверхностей X_1, X_1' одинаковы. Рассмотрим неравенства для параметров h из [16]. Нужно проверить возможность их выполнения для обоих конечнолистных накрытий $X_1 \to X$ и $X_1' \to X'$.

Нужно найти такие h_1, h_1', причем равные между собой (см. ниже), чтобы выполнялись неравенства

$$h \leq h_1 \leq lh(2g' + h' - 2), \quad h' \leq lh_1' \leq h'(2g + h - 2).$$

Так как $g, g' \geq 2$, очевидно, что, выбрав натуральный параметр l достаточно большим, всегда можем найти нужные нам равные числа $h_1 = h_1'$, удовлетворяющие этим двум неравенствам. Но тогда поверхности X_1, X_1', конечнолистно накрывающие X, X' соответственно, имеют одинаковые эйлеровы характеристики и значения параметра h. В этом случае у них одинаковый род, а потому поверхности X_1, X_1' между собой гомеоморфны. Тем самым построена поверхность, конечнолистно накрывающая X и X'. Лемма доказана

Продолжим доказательство предложения 5. Имеем $S^1 \times X_1 = \mathscr{A}/\Gamma_0$ и $S^1 \times X_1' = \mathscr{A}/\Gamma_0'$, где поверхности X_1, X_1' из леммы (и ее доказательства), а Γ_0, Γ_0' — подходящие подгруппы конечных индексов в Γ, Γ'. Но X_1 и X_1' в силу леммы диффеоморфны, поэтому диффеоморфны между собой будут и многообразия $\mathscr{A}/\Gamma_0$, $\mathscr{A}/\Gamma_0'$. Этим доказано предложение 5, а с ним, как было сказано выше, и теорема 7.

Докажем некоторые результаты о топологическом строении квазикомпактных однородных пространств, используя введенные выше компактную группу Ли $K(\pi)$ и модельное квазикомпактное однородное пространство $M(\pi)$

Предложение 6. *Пусть M — квазикомпактное однородное многообразие. Тогда для некоторого подходящего многообразия M', конечнолистно накрывающего M (и тоже являющегося квазикомпактным однородным многообразием), многообразие, универсально накрывающее слой M_c натурального расслоения для M', диффеоморфно $K(\pi_1(M)) \times M_c^\star$, где $M_c^\star$ — некоторое односвязное компактное однородное многообразие.*

Доказательство. Пусть $M = G/H$, где G — односвязная группа Ли, транзитивная на многообразии M, имеющем конечную G-инвариантную меру. Далее, пусть K — максимальная компактная подгруппа в G. Можно считать, что уже само многообразие M имеет натуральное расслоение (заменяя M в случае необходимости подходящим конечнолистно накрывающим его многообразием, см. [1]). Тогда слой этого расслоения имеет вид $M_c = K/H \cap K$. Пусть S — подгруппа Леви (односвязная) в группе Ли G, рассмотрим ее естественное разложение $S = S_{\text{н}} \times S_{\text{к}}$ в прямое произведение некомпактной и компактной компонент. Тогда $K = (K \cap S_{\text{н}}) \cdot S_{\text{к}}$, а подгруппа $K \cap S_{\text{н}}$ имеет фактор, изоморфный $K(\pi_1(M))$. Если $S_{\text{н}}'$ — фактор в $K \cap S_{\text{н}}$, дополнительный к $K(\pi_1(M))$, то $(K \cap H)_0 = K_{\text{н}}' \times S_{\text{к}}$, где $K_{\text{н}}'$ — максимальная компактная подгруппа в $S_{\text{н}}'$. Универсальное накрывающее многообразие для $M_c = K/K \cap H$ имеет, очевидно, вид $K/(K \cap H)_0$ и потому диффеоморфно $K(\pi_1(M)) \times (K'_{\text{н}} \times S_{\text{к}})/(K \cap H)_0$. Пусть $M_c^\star = (K_{\text{н}}' \times S_{\text{к}})/(K \cap H)_0$ — односвязное компактное однородное пространство $K(\pi_1(M)) \times M_c^\star$, которое конечнолистно (и универсально) накрывает M_c.

Роль модельного однородного пространства при изучении топологии произвольных квазикомпактных однородных многообразий показывает следующее

Предложение 7. *Пусть M — квазикомпактное однородное многообразие. Тогда для некоторого квазикомпактного однородного многообразия M', конечнолистно накрывающего M, и некоторого модельного пространства $M(\pi_1(M))$ существует расслоение $M(\pi_1(M)) \to M' \to$ B, база B которого — некоторое компактное односвязное однородное пространство.*

Доказательство. Можно предполагать (в силу теоремы 1), что $M = G/H$, где транзитивная группа Ли G односвязна, действует на M правильно и имеет на M конечную инвариантную меру. Положим $P = N_G(H_0)$, тогда, переходя в случае необходимости к подходящему многообразию M', конечнолистно накрывающему M, можно считать (см. замечание после доказательства теоремы 1), что $H \subset P_0$. Положим $F = P_0/H_0$, $\Gamma = H/H_0$, тогда Γ — решетка в связной группе Ли F. Как и при доказательстве теоремы 4, получаем, что в F существует подгруппа U, содержащая $S^\star_{\text{н}} \cdot R^\star$ ($F = S^\star \cdot R^\star$ — разложение Леви группы Ли F), причем U содержит Γ и в U существует такая связная компактная нормальная подгруппа C, что $G^\star = U/C$ — односвязная группа Ли, компактная часть ее подгруппы Леви тривиальна и $M(\pi_1(M)) = G^\star/\Gamma^\star$ (где $\Gamma^\star = \Gamma/\Gamma \cap C$). Покажем, что фактически можно взять $C = S_{\text{к}} \cap U/S_{\text{к}} \cap H_0$.

Имеем разложение Леви $G = (S_{\text{н}} \times S_{\text{к}}) \cdot R$, причем, как отмечали неоднократно, $P \supset S_{\text{н}}$, Пусть K — максимальная компактная подгруппа в G, тогда $U \cap K$ — максимальная компактная подгруппа в U. Но $U \supset S_{\text{н}}$ и потому $U \cap K = K_{\text{н}} \times (S_{\text{к}} \cap U)$, где $K_{\text{н}}$ — максимальная компактная подгруппа в $S_{\text{н}}$. Тогда из свойств группы Ли U/C, указанных выше, следует, что $S_{\text{к}} \cap U/S_{\text{к}} \cap H_0 = C$.

Рассмотрим естественное действие подгруппы $S_{\text{к}} \subset G$ на многообразии G/H. Из $U \cdot S_{\text{к}} = G$ и $S_{\text{к}} \cap U/S_{\text{к}} \cap H_0 = C$ вытекает, что пространство двойных смежных классов $S_{\text{к}} \setminus G/H$ диффеоморфно $G^\star/\Gamma^\star = M(\pi_1(M))$, а естественное отображение $G/H \to S_{\text{к}} \setminus G/H$ — гладкое расслоение со слоем $S_{\text{к}}/S_{\text{к}} \cap U$. Положив $B = S_{\text{к}}/S_{\text{к}} \cap U$, получаем требуемое расслоение $K(\pi_1(M)) \to M \to B$.

Отметим, что из точной гомотопической последовательности расслоения $K(\pi_1(M)) \to M \to B$ следует, что вторая рациональная гомотопическая группа $\pi_2(M) \otimes \mathbf{Q}$ изоморфна $\pi_2(B) \otimes \mathbf{Q}$.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Горбацевич В. В., Онищик А. Л.* Группы Ли преобразований // Современные проблемы математики. Фундаментальные направления М.: ВИНИТИ, 1988. С. 103–240. (Итоги науки и техники).

2. *Онищик А. Л.* Топология транзитивных групп преобразований. М.: Физ.-мат. лит., 1995.

3. *Горбацевич В. В.* О некоторых классах однородных пространств, близких к компактным // Докл. АН СССР. 1988. Т. 303, № 4. С. 785–788.

4. *Горбацевич В. В.* О плезиокомпактных однородных пространствах // Сиб. мат. журн. 1989. Т. 30, № 2. С. 61–72.

5. *Горбацевич В. В.* О свойствах плезиоравномерных подгрупп в группах Ли // Мат. заметки. 2001. Т. 69, № 3. С. 338–345.

6. *Горбацевич В. В.* Компактные однородные пространства и их обобщения // Геометрия. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. М.: ВИНИТИ, 2007. Т. 22. С. 38-72. (Итоги науки и техники).

7. *Горбацевич В. В.* Строение компактных однородных пространств с конечной инвариантной мерой // Изв. вузов. Математика. 1991. № 7. С. 66–68.

8. *Рагунатан М.* Дискретные подгруппы групп Ли. М.: Мир, 1977.

9. *Mostow G. D.* Homogeneous spaces with finite invariant measure // Ann. Math. 1962. V. 75, N I. P. 17–37.

10. *Wang S. R.* Homogeneous spaces with finite invariant measure // Amer. J. Math. 1976. V. 98, N 2. P. 311–324.

11. *Ауслендер Л., Грин Л., Хан Ф.* Потоки на однородных пространствах. М.: Мир, 1964.
12. *Горбацевич В. В.* О трехмерных однородных пространствах // Сиб. мат. журн. 1977. Т. 18, № 2. С. 280–293.
13. *Горбацевич В. В.* Компактные однородные многообразия размерности не более 7 с точностью до конечнолистного накрытия // Изв. РАН. Сер. мат. 2012. Т. 76, № 4. С. 27–40.
14. *Mostow G. D.* On the topology of homogeneous spaces of finite measure. // Symp. Math. 1975. V. 16. P. 375–398.
15. *Gorbacevic V. V.* Compact aspherical homogeneous spaces up to a finite covering // Ann. Global. Anal. Geom. 1983. V. 1, N 3. P. 103–118.
16. *Цишанг Х., Фогт Э., Колдевай Х.-Д.* Поверхности и разрывные группы. М.: Наука, 1988.

Статья поступила 26 декабря 2011 г.

Горбацевич Владимир Витальевич
Московский гос. технологический университет МАТИ им. К. Э. Циолковского,
кафедра высшей математики,
ул. Оршанская, 3, Москва 121552
vgorvich@yandex.ru