Сибирский математический журнал
Март—апрель, 2013. Том 54, № 2

УДК 515.1+517.986.225

МНОГОЧЛЕНЫ ВЕЙЕРШТРАССА И НАКРЫТИЯ КОМПАКТНЫХ ГРУПП

Р. Н. Гумеров

Аннотация. Рассматриваются конечнолистные накрывающие отображения компактных связных абелевых групп. Доказывается, что всякое такое отображение определяется с точностью до эквивалентности конечным набором многочленов Вейерштрасса, коэффициентами которых являются характеры группы.

Ключевые слова: группа характеров, компактная группа, конечнолистное накрывающее отображение, многочлен Вейерштрасса, полиномиальное накрытие.

Введение

В теории аналитических функций, например, в связи с подготовительной теоремой Вейерштрасса, естественным образом возникают накрывающие отображения, определяемые многочленами от одной переменной, коэффициентами которых являются комплекснозначные функции, заданные на некотором пространстве. Такие многочлены называются *многочленами Вейерштрасса*, а порождаемые ими накрывающие отображения — *полиномиальными накрытиями*.

Свойства многочленов Вейерштрасса над алгебрами непрерывных функций и полиномиальных накрытий изучались в ряде работ различных авторов (см., например, [1–9] и библиографию в них).

Е. А. Горин и В. Я. Лин [2] исследовали вопрос о разложимости сепарабельного многочлена Вейерштрасса на линейные множители. Возможность такой факторизации многочлена эквивалентна тривиальности соответствующего полиномиального накрытия. Говоря в терминах накрывающих отображений, ими, в частности, получены необходимые и достаточные условия тривиальности полиномиальных накрытий топологических групп [2, следствия 1.11, 1.12].

Теория полиномиальных накрывающих пространств развита в работах Хансена [3–7]. Им получены алгебраические и топологические критерии того, что накрытие связного топологического пространства эквивалентно полиномиальному. В частности, доказано, что всякое конечнолистное накрывающее отображение окружности S^1 эквивалентно полиномиальному накрытию [4, теорема 8.3].

В работе В. Г. Бардакова и А. Ю. Веснина [8] построен алгоритм, позволяющий описать с точностью до эквивалентности все конечнолистные накрытия окружности S^1 в терминах многочленов Вейерштрасса и групп кос.

В [9, теорема 5] показано, что всякое конечнолистное накрытие компактной связной абелевой группы G эквивалентно полиномиальному.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12–01–97016).

Данная заметка состоит из введения и двух параграфов. В § 1 приводятся необходимые определения и сведения. В § 2 доказывается, что всякое конечнолистное накрытие группы G связным топологическим пространством эквивалентно накрывающему отображению, которое задается с помощью конечного набора многочленов Вейерштрасса вида $x^n - \chi$, где χ — характер группы G.

Автор благодарит С. А. Григоряна за полезные обсуждения результатов работы.

§ 1. Обозначения и предварительные сведения

Все рассматриваемые топологические пространства предполагаются хаусдорфовыми. Как обычно, через $\mathbb{N}$ обозначается множество натуральных чисел, через $\mathbb{C}^m$ — декартово произведение m экземпляров поля комплексных чисел $\mathbb{C}$, наделенное естественной топологией, где $m \in \mathbb{N}$.

Напомним, что непрерывное отображение $p : X \to Y$ между двумя топологическими пространствами называется *n-листным накрывающим отображением* (или *накрытием*), где $n \in \mathbb{N}$, если для каждой точки $y \in Y$ найдется ее открытая окрестность V, полный прообраз которой $p^{-1}(V)$ представляется в виде объединения непересекающихся открытых подмножеств $U_1, \dots, U_n$ пространства X таких, что ограничение $p|_{U_j} : U_j \to V$ является гомеоморфизмом для каждого $j = 1, \dots, n$. При этом если пространство Y компактно, то и X компактно. Два n-листных накрытия $p_1 : X_1 \to Y$ и $p_2 : X_2 \to Y$ называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм $\rho : X_1 \to X_2$ такой, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} X_1 \arrow[rr, "\rho"] \arrow[dr, "p_1"'] & & X_2 \arrow[dl, "p_2"] \\ & Y & \end{tikzcd}$$

коммутативна, т. е. $p_1 = p_2 \circ \rho$.

Под *морфизмом* и *изоморфизмом* топологических групп всегда подразумеваются соответственно непрерывный гомоморфизм и топологический изоморфизм. Для локально компактной абелевой группы Γ через $\widehat{\Gamma}$ обозначается группа ее характеров, т. е. морфизмов группы Γ в мультипликативную группу единичной окружности S^1. Для морфизма $\sigma : \Gamma \to \Delta$ между двумя локально компактными абелевыми группами *сопряженный морфизм* $\widehat{\Delta} \to \widehat{\Gamma} : \chi \mapsto \chi \circ \sigma$, где $\chi \in \widehat{\Delta}$, обозначается через $\hat{\sigma}$. Группа характеров группы $\widehat{\Gamma}$ и морфизм, сопряженный к морфизму $\hat{\sigma}$, обозначаются через $\widehat{\widehat{\Gamma}}$ и $\hat{\hat{\sigma}}$ соответственно. Напомним, что канонический изоморфизм $\tau_\Gamma : \Gamma \to \widehat{\widehat{\Gamma}}$ задается формулой

$$[\tau_\Gamma(g)](\chi) = \chi(g), \quad g \in \Gamma, \ \chi \in \widehat{\Gamma}.$$

Известно, что сопоставление $\Gamma \mapsto \widehat{\Gamma}$ и $\sigma \mapsto \hat{\sigma}$ является контравариантным функтором из категории локально компактных абелевых групп и их морфизмов в себя. Из двойственности Понтрягина следует, что этот функтор является антиэквивалентностью категорий. За необходимыми сведениями из теории топологических групп отсылаем читателя к [10, 11].

Всюду через G обозначается компактная связная абелева группа.

Многочленом Вейерштрасса степени $n \in \mathbb{N}$ над G называется отображение $R : G \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ вида

$$R(g, z) = z^n + \sum_{j=1}^{n} f_j(g) z^{n-j},$$

где $g \in G$, $z \in \mathbb{C}$, а коэффициенты $f_1, \ldots, f_n$ являются непрерывными функциями из G в $\mathbb{C}$. Многочлен Вейерштрасса R называется *сепарабельным*, если при каждом $g \in G$ многочлен $R(g, x)$ от переменной x с комплексными коэффициентами не имеет кратных корней в $\mathbb{C}$. Для сепарабельного многочлена R рассмотрим подпространство X в $G \times \mathbb{C}$, определяемое следующим образом:

$$X = \{(g, z) \in G \times \mathbb{C} \mid R(g, z) = 0\}.$$

Проекция $\mathrm{pr} : X \to G : (g, z) \mapsto g$, являющаяся n-листным накрытием, называется *полиномиальным накрывающим отображением*, а X — *полиномиальным накрывающим пространством*, определяемыми многочленом Вейерштрасса R (см., например, [4]).

Для изучения структуры конечнолистных накрытий компактных групп используем следующую теорему о накрывающей группе, являющуюся аналогом теоремы Понтрягина [10, теорема 79] для, вообще говоря, не локально связных групп.

Теорема о накрывающей группе [9, теорема 1; 12, 13]. *Пусть $p : X \to G$ — конечнолистное накрывающее отображение из связного пространства X. Тогда для всякой точки x_0 из полного прообраза единицы группы G на пространстве X существует единственная структура топологической группы с единицей x_0 такая, что p является морфизмом компактных абелевых групп.*

§ 2. Накрытия компактных абелевых групп

Нашей целью является доказательство двух теорем о связи многочленов Вейерштрасса с накрывающими отображениями компактных связных абелевых групп.

Теорема 1. *Пусть $p : X \to G$ — n-листное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную абелеву группу G. Тогда существуют многочлены Вейерштрасса*

$$R_j(g, z) = z^{n_j} - \chi_j(g), \quad j = 1, \ldots, m, \tag{1}$$

над G, где $\chi_j \in \widehat{G}$, $n = n_1 \cdot \ldots \cdot n_m$, такие, что p эквивалентно отображению проектирования на первую координату $\mathrm{pr} : E \to G$. Здесь

$$E = \{(g, z_1, \ldots, z_m) \mid g \in G,\ z_j \in \mathbb{C},\ R_j(g, z_j) = 0,\ j = 1, \ldots, m\} \tag{2}$$

рассматривается как подпространство произведения $G \times \mathbb{C}^m$.

Доказательство. Воспользовавшись теоремой о накрывающей группе (см. § 1), введем в пространстве X структуру топологической группы, превращающую отображение p в морфизм компактных абелевых групп. Обозначим через X_0 ядро этого морфизма, которое является дискретной абелевой группой порядка n.

При $n = 1$ утверждение теоремы очевидно, поэтому считаем, что $n > 1$.

Пусть $X_0 = \langle x_1 \rangle \times \langle x_2 \rangle \times \cdots \times \langle x_m \rangle$ — разложение группы X_0 в прямое произведение подгрупп, где $\langle x_j \rangle$ — циклическая подгруппа порядка $n_j > 1$ с образующим элементом $x_j \in X_0$, $j = 1, 2, \ldots, m$.

Для каждого индекса j обозначим через ψ_{0j} характер группы X_0, задаваемый равенством

$$\psi_{0j}\bigl(x_1^{k_1} x_2^{k_2} \ldots x_m^{k_m}\bigr) = \exp\left(i\frac{2\pi k_j}{n_j}\right),$$

где $0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1$, $i^2 = -1$. Напомним [10, (23.27)], что всякий характер из группы $\widehat{X}_0$ имеет вид $\psi_{01}^{k_1}\psi_{02}^{k_2}\ldots\psi_{0m}^{k_m}$, где $0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1$.

Используя лемму 24.4 из [10], продолжим каждый характер ψ_{0j} до характера ψ_j всей группы X. Очевидно, что характер $\psi_j^{n_j}$ принадлежит аннулятору группы X_0 в $\widehat{X}$, т. е. справедливо равенство

$$\psi_j^{n_j}(X_0) = \{1\}.$$

Следовательно, по теореме 24.40 из [10] существует характер $\chi_j \in \widehat{G}$ такой, что

$$\psi_j^{n_j} = \hat{p}(\chi_j). \tag{3}$$

Для каждого индекса j рассмотрим сепарабельный многочлен Вейерштрасса R_j степени n_j над группой G, задаваемый формулой (1). Непосредственно проверяется, что относительно покоординатных операций умножения и взятия обратного элемента пространство E, определяемое формулой (2), становится компактной абелевой группой. При этом проекция на первую координату $\mathrm{pr} : E \to G$ является сюръективным морфизмом между компактными группами и n-листным накрывающим отображением.

Остается показать, что накрытия p и pr эквивалентны. С этой целью сначала построим изоморфизм между группами характеров $\widehat{X}$ и $\widehat{E}$.

Докажем, что любой характер $\theta \in \widehat{X}$ единственным образом представляется в виде

$$\theta = \psi_1^{k_1}\psi_2^{k_2}\ldots\psi_m^{k_m}\hat{p}(\eta), \tag{4}$$

где $0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1$, $j = 1, \ldots, m$, $\eta \in \widehat{G}$.

Действительно, рассматривая ограничение характера $\theta \in \widehat{X}$ на X_0, получаем характер $\theta|_{X_0}$ группы X_0. Следовательно, $\theta|_{X_0} = \psi_{01}^{k_1}\psi_{02}^{k_2}\ldots\psi_{0m}^{k_m}$ для некоторых целых чисел k_j, удовлетворяющих неравенствам $0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1$. Ясно, что характер $\theta\psi_1^{-k_1}\psi_2^{-k_2}\ldots\psi_m^{-k_m}$ принадлежит аннулятору группы X_0 в $\widehat{X}$. Поэтому существует характер $\eta \in \widehat{G}$ такой, что имеет место представление (4).

Заметим, что при любых двух различных индексах j и s из $\{1, \ldots, m\}$ имеем соотношения $\psi_s(x_j) = 1$ и $\psi_j^{k_j}(x_j) \neq 1$ для любого числа $k_j \in \{1, \ldots, n_j - 1\}$. Используя это наблюдение, а также инъективность сопряженного морфизма $\hat{p} : \widehat{G} \to \widehat{X}$ и равенство $\hat{p}(\eta)(X_0) = \{1\}$ для любого характера $\eta \in \widehat{G}$, легко показать, что представление характера θ в виде (4) единственно.

Введем в рассмотрение характеры $\xi_1, \ldots, \xi_m \in \widehat{E}$, задаваемые формулой

$$\xi_j(g, z_1, \ldots, z_m) = z_j, \quad (g, z_1, \ldots, z_m) \in E,$$

т. е. проекции на соответствующие координаты.

Рассуждая аналогично тому, как это было сделано выше при доказательстве представления (4), нетрудно видеть, что каждый характер $\zeta \in \widehat{E}$ единственным образом представляется в виде

$$\zeta = \xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\ldots\xi_m^{k_m}\widehat{\mathrm{pr}}(\eta),$$

где $0 \leqslant k_j \leqslant n_j - 1$, $j = 1, \ldots, m$, $\eta \in \widehat{G}$.

Пусть $\sigma : \widehat{E} \to \widehat{X}$ — биективное отображение, задаваемое формулой

$$\sigma\big(\xi_1^{k_1}\xi_2^{k_2}\ldots\xi_m^{k_m}\widehat{\mathrm{pr}}(\eta)\big) = \psi_1^{k_1}\psi_2^{k_2}\ldots\psi_m^{k_m}\hat{p}(\eta).$$

С учетом равенств $\xi_j^{n_j} = \widehat{\mathrm{pr}}(\chi_j)$ и (3) непосредственно проверяется, что отображение σ является гомоморфизмом групп. Таким образом, σ — изоморфизм. При этом справедливо равенство $\hat{p} = \sigma \circ \widehat{\mathrm{pr}}$. Отсюда в силу простейших свойств функторов вытекает, что $\hat{\sigma} : \widehat{\widehat{E}} \to \widehat{\widehat{X}}$ — изоморфизм и $\hat{\hat{p}} = \widehat{\widehat{\mathrm{pr}}} \circ \hat{\sigma}$.

Наконец, рассмотрим следующую коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
X \arrow[rrr, "\tau_X"] \arrow[dr, "p"] \arrow[dd, dashed, "\rho"'] & & & \widehat{\widehat{X}} \arrow[dl, "\hat{\hat{p}}"'] \arrow[dd, "\hat{\sigma}"] \\
& G \arrow[r, "\tau_G"] & \widehat{G} & \\
E \arrow[ur, "\mathrm{pr}"'] \arrow[rrr, "\tau_E"] & & & \widehat{\widehat{E}} \arrow[ul, "\widehat{\widehat{\mathrm{pr}}}"]
\end{tikzcd}$$

Дополнив ее изоморфизмом $\rho = \tau_E^{-1} \circ \hat{\sigma} \circ \tau_X : X \to E$, убеждаемся, что $p = \mathrm{pr} \circ \rho$. Таким образом, накрытия p и pr эквивалентны. Теорема доказана.

Из доказательства теоремы 1 вытекает

Теорема 2. *Пусть $p : X \to G$ — n-листное накрывающее отображение из связного пространства X на компактную абелеву группу G, где n — простое число. Тогда существует многочлен Вейерштрасса $R(g, z) = z^n - \chi(g)$ степени n над G, где $\chi \in \widehat{G}$, такой, что накрытие p эквивалентно полиномиальному накрывающему отображению, определяемому многочленом R.*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Countryman R. S. (Jr.)* On the characterization of compact Hausdorff X for which $C(X)$ is algebraically closed // Pacific J. Math. 1967. V. 20, N 3. P. 433–448.
2. *Горин Е. А., Лин В. Я.* Алгебраические уравнения с непрерывными коэффициентами и некоторые вопросы алгебраической теории кос // Мат. сб. 1969. Т. 78, № 4. С. 579–610.
3. *Hansen V. L.* Polynomial covering spaces and homomorphisms into braid groups // Pacific J. Math. 1979. V. 81. P. 399–410.
4. *Hansen V. L.* Coverings defined by Weierstrass polynomials // J. Reine Angew. Math. 1980. V. 314. P. 29–39.
5. *Hansen V. L.* Braids and coverings — Selected topics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. (London Math. Soc. Stud. Texts; V. 18).
6. *Hansen V. L.* Weierstrass polynomials for links // Contrib. Algebra Geom. 1998. V. 39. P. 359–365.
7. *Hansen V. L.* Branched polynomial covering maps // Topol. Appl. 2002. V. 125. P. 63–72.
8. *Бардаков В. Г., Веснин А. Ю.* Многочлены Вейерштрасса сингулярных кос и зацеплений // Чебышевский сб. 2005. Т. 6, № 2. С. 36–51.
9. *Grigorian S. A., Gumerov R. N.* On the structure of finite coverings of compact connected groups // Topol. Appl. 2006. V. 153. P. 3598–3614.
10. *Понтрягин Л. С.* Непрерывные группы. М.: Наука, 1984.
11. *Хьюитт Э., Росс К.* Абстрактный гармонический анализ. М.: Наука, 1975. Т. 1.
12. *Grigorian S. A., Gumerov R. N., Kazantsev A. V.* Group structure in finite coverings of compact solenoidal groups // Lobachevskii J. Math. 2000. V. 6. P. 39–46.
13. *Eda K., Matijevič. V.* Finite sheeted covering maps over 2-dimensional connected, compact abelian groups // Topol. Appl. 2006. V. 153. P. 1033–1045.

Статья поступила 16 декабря 2011 г.

Гумеров Ренат Нельсонович
Казанский (Приволжский) федеральный университет,
кафедра математического анализа,
ул. Кремлевская, 18, Казань 420008
Renat.Gumerov@ksu.ru