Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 512.8

КОЛЬЦА И ГРУППЫ МАТРИЦ С НЕСТАНДАРТНЫМ ПРОИЗВЕДЕНИЕМ

В. Г. Бардаков, А. А. Симонов

Аннотация. На множестве квадратных матриц определяется новая операция умножения. Проверяется, когда это умножение будет ассоциативным и когда множество матриц с этой операцией умножения и обычной операцией сложения матриц образует кольцо. Далее проверяется, когда операция нестандартного произведения обладает единичным элементом и какие элементы обратимы. Изучается связь между операцией нестандартного произведения и аффинными преобразованиями векторного пространства. С использованием установленных результатов доказано, что группа Михайличенко, которая является группой матриц с нестандартным произведением, изоморфна некоторой подгруппе матриц большего порядка, но с обычным произведением.

Ключевые слова: произведение матриц, группа матриц, обобщенное матричное умножение.

Введение

В теории алгебраических систем строятся системы, в которых новые операции конструируются из стандартных. Например, по всякому ассоциативному кольцу K можно построить лиево кольцо $L(K)$, определив умножение равенством $a*b = ab-ba$, и йорданово кольцо $J(K)$, определив умножение равенством $a \circ b = ab + ba$. Рассматривая конечномерную алгебру, можно определить новую операцию умножения, написав таблицу умножения базисных элементов и изучать вопрос о том, когда это умножение ассоциативно (см. [1, § 1.5]). Аналогичным образом в группе G можно определить новую бинарную операцию $*$, положив $a * b = v(a, b)$, где $v = v(x, y)$ — групповое слово от двух переменных, и рассматривать вопрос о том, когда алгебраическая система $\langle G, *\rangle$ является группой и как она связана с исходной группой G (см. [2, вопрос 6.47]).

В предлагаемой работе рассматривается множество квадратных матриц $M_n(P)$ порядка n над полем P. Известно, что относительно операций сложения и умножения $M_n(P)$ является кольцом. При помощи этих стандартных операций на множестве $M_n(P)$ можно определять другие операции. Пусть A, B, C, D — некоторые матрицы из $M_n(P)$. Определим операцию умножения $\odot$ на $M_n(P)$ по правилу

$$X \odot Y = XAY + XB + CY + D. \tag{1}$$

Если A — единичная, а B, C, D — нулевые матрицы, то получим обычное произведение матриц. Возникают естественные вопросы: когда так определенная операция ассоциативна, когда существует единичный элемент и когда некоторое подмножество из $M_n(P)$ относительно этой операции образует группу?

Произведение типа (1) рассматривалось в работе А. А. Симонова [3, с. 707] для интерпретации группы Михайличенко [4, 5] в терминах матриц.

Г. Г. Михайличенко определил свою группу, решая классификационную задачу в теории физических структур [6, 7]. Для определения группы Михайличенко рассмотрим гладкое невырожденное отображение $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ и две группы преобразований $\chi_{a_1,\ldots,a_{n^2}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\theta_{a_1,\ldots,a_{n^2}} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, зависящих от n^2 параметров $a_1, \ldots, a_{n^2}$. Будем считать, что данная зависимость от параметров существенная, т. е. ее нельзя устранить никакой заменой параметров. Два отображения f и f' будем считать эквивалентными, если найдутся три гомеоморфных отображения $\lambda : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\rho : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$, $\sigma : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, для которых справедливо равенство

$$f'(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sigma(f(\lambda(x_1, \ldots, x_n), \rho(y_1, \ldots, y_n))).$$

Г. Г. Михайличенко была решена классификационная задача поиска таких с точностью до эквивалентности функций f и соответствующих согласованных групп преобразований $\chi_{a_1,\ldots,a_{n^2}}$ и $\theta_{a_1,\ldots,a_{n^2}}$, для которых выполняется

$$f(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = f(\chi_{a_1,\ldots,a_{n^2}}(x_1, \ldots, x_n), \theta_{a_1,\ldots,a_{n^2}}(y_1, \ldots, y_n)).$$

Им же установлено, что на $\mathbb{R}$ имеется два и только два решения:

$$f^{(1)}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$

$$f^{(2)}(x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} x_i y_i + x_n + y_n.$$

В первом случае группы преобразований $\chi_{a_1,\ldots,a_{n^2}}$ и $\theta_{a_1,\ldots,a_{n^2}}$ изоморфны группе $GL_n(\mathbb{R})$ преобразований n-мерного пространства $\mathbb{R}^n$, а во втором случае — группе Михайличенко $G_n(\mathbb{R})$.

В данной работе будет доказано (см. теорему 1), что алгебраическая система $\langle M_n(P); \odot, + \rangle$ является ассоциативным кольцом тогда и только тогда, когда матрицы B, C и D нулевые. Хорошо известно, что матрицы возникают при изучении линейных преобразований векторного пространства. При этом композиции двух линейных преобразований соответствует произведение матриц. Будет показано, что умножение $\odot$ определяет n аффинных преобразований векторного пространства $V = P^n$. В случае произведения Симонова все эти типы преобразований совпадают.

В § 2 определяется некоторое подмножество матриц $G_n(P) \subseteq M_n(P)$ и доказывается, что относительно произведения Симонова $\circledast$ множество $G_n(P)$ образует группу. При $P = \mathbb{R}$ эта группа изоморфна группе Михайличенко. В § 3 покажем, что произведение $\circledast$ индуцирует аффинное преобразование векторного пространства $V = P^n$ и композиция двух аффинных преобразований соответствует произведению матриц по правилу $\circledast$. Отсюда следует, что группа $G_n(P)$ изоморфна некоторой подгруппе матриц из $GL_{n+1}(P)$ с обычным умножением.

По ходу изложения формулируются открытые вопросы.

§ 1. Кольцо матриц с нестандартным произведением

Пусть $M_n(P)$, $n \geq 2$, — множество квадратных матриц порядка n над полем P. Стандартное умножение матриц $X = (x_{ij})$ и $Y = (y_{ij})$ из $M_n(P)$ определяется формулой

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n} x_{ik} y_{kj},$$

где $Z = (z_{ij}) = XY$. Известно, что относительно обычных операций сложения и умножения $M_n(P)$ является ассоциативным кольцом с единицей. Определим на множестве $M_n(P)$ операцию умножения правилом

$$X \odot Y = XAY + XB + CY + D,$$

где A, B, C, D — фиксированные матрицы из $M_n(P)$. Хотим понять, когда алгебраическая система $\langle M_n(P); \odot, + \rangle$ является ассоциативным кольцом. Ответ на этот вопрос дает

Теорема 1. *Алгебраическая система $\langle M_n(P); \odot, + \rangle$ является ассоциативным кольцом тогда и только тогда, когда матрицы B, C, D нулевые.*

Этот параграф посвящен доказательству теоремы 1. Вначале рассмотрим вопрос о том, когда умножение $\odot$ ассоциативно.

Лемма 1. *Умножение, определенное на $M_n(P)$ равенством (1), ассоциативно тогда и только тогда, когда матрицы A, B, C, D удовлетворяют следующей системе:*

$$\begin{cases} AC = BA, \\ CD = DB, \\ B^2 - B = AD, \\ C^2 - C = DA. \end{cases}$$

В частности, если матрица A невырожденна, то эта система равносильна такой:

$$\begin{cases} C = A^{-1}BA, \\ D = A^{-1}(B^2 - B). \end{cases}$$

Доказательство. Мы должны найти условия, при которых для любых матриц $X, Y, Z \in M_n(P)$ справедливо равенство

$$(X \odot Y) \odot Z = X \odot (Y \odot Z).$$

Расписывая левую часть этого равенства, получим

$$(X \odot Y) \odot Z = XAYAZ + XBAZ + CYAZ + XAYB + DAZ + XB^2 + CYB + CZ + DB + D,$$

расписывая правую —

$$X \odot (Y \odot Z) = XAYAZ + XAYB + XACZ + CYAZ + XAD + XB + CYB + C^2Z + CD + D.$$

Приравнивая эти выражения и учитывая, что полученное равенство должно выполняться для произвольных матриц X, Y, Z, приходим к системе из формулировки леммы.

Если матрица A невырожденна, то $C = A^{-1}BA$ и система примет вид

$$\begin{cases} (AD)B = B(AD), \\ B^2 - AD - B = 0, \\ C^2 - DA - C = 0. \end{cases}$$

С учетом того, что

$$C^2 - DA - C = A^{-1}(B^2 - AD - B)A,$$

последнее равенство следует из второго и его можно отбросить. Переписав второе равенство в виде $AD = B^2 - B$, легко заметить, что из него вытекает первое равенство, и приходим к нужной системе. Лемма доказана.

Из леммы 1 получаем, что если матрица A невырожденна, то произведение квадратных матриц, определенное равенством

$$X \odot Y = XAY + XB + (A^{-1}BA)Y + A^{-1}(B^2 - B),$$

ассоциативно.

Выясним, когда умножение $\odot$ дистрибутивно, т. е. когда выполняются равенства

$$(X_1 + X_2) \odot Y = X_1 \odot Y + X_2 \odot Y, \tag{2}$$

$$X \odot (Y_1 + Y_2) = X \odot Y_1 + X \odot Y_2. \tag{3}$$

Расписывая левую часть равенства (2), получим

$$\begin{aligned}(X_1 + X_2) \odot Y = (X_1 + X_2)AY + (X_1 + X_2)B + CY + D \\ = X_1AY + X_2AY + X_1B + X_2B + CY + D,\end{aligned}$$

расписывая правую —

$$X_1 \odot Y + X_2 \odot Y = X_1AY + X_2AY + X_1B + X_2B + 2CY + 2D.$$

Чтобы выполнялось равенство (2), необходимо, чтобы было верно равенство $CY + D = 0$, но, учитывая, что Y — произвольная матрица, видим, что $C = D = 0$.

Аналогичным образом, рассматривая равенство (3), приходим к равенствам $B = D = 0$. Таким образом, справедлива

Лемма 2. *Умножение $\odot$ дистрибутивно тогда и только тогда, когда $B = C = D = 0$.*

Доказательство теоремы 1. Для того чтобы алгебраическая система $\langle M_n(P); \odot, +\rangle$ являлась ассоциативным кольцом, необходимо, чтобы алгебраическая система $\langle M_n(P); +\rangle$ была абелевой группой, выполнялись аксиомы дистрибутивности и операция $\odot$ являлась ассоциативной. Очевидно, что первое из этих условий выполнено. Из леммы 2 следует, что для дистрибутивности необходимы условия $B = C = D = 0$, но тогда из леммы 1 вытекает, что при этих условиях операция $\odot$ ассоциативна. Теорема доказана.

В связи с теоремой 1 возникает естественный

Вопрос 1. *Для матрицы $A \in M_n(P)$ определим операцию $\odot_A$ по правилу $X \odot_A Y = XAY$. Для каких матриц A и A' из $M_n(P)$ кольцо $\langle M_n(P); \odot_A, +\rangle$ изоморфно кольцу $\langle M_n(P); \odot_{A'}, +\rangle$?*

В случае, когда матрица A невырожденна, легко показать, что кольцо $\langle M_n(P); \odot_A, +\rangle$ изоморфно кольцу $\langle M_n(P); \odot_E, +\rangle$, т. е. обычному кольцу матриц (требуемый изоморфизм определяется соответствием $X \longmapsto A^{-1}X$). Следовательно, надо рассматривать только случай, когда обе матрицы A и A' вырожденны. Отметим, что в этом случае соответствующие кольца не содержат единичных элементов.

Известно, что множество матриц $M_n(P)$ является не только кольцом, но и алгеброй над полем P. Эта алгебра имеет размерность n^2, и в качестве базы можно выбрать матрицы $E_{ij} \in M_n(P)$, у которых на месте (i, j) стоит единица, а на всех остальных местах — нули. Как следует из теоремы 1, алгебраическая система $\langle M_n(P); \odot, +\rangle$ является ассоциативным кольцом, если операция $\odot$ определена правилом $X \odot Y = XAY$. Полагая $\alpha X = (\alpha x_{ij})$ для произвольного скаляра $\alpha \in P$, получим алгебру над P, которую будем обозначать через $M_n^A(P)$. В частности, $M_n^E(P)$ — обычная алгебра матриц. Очевидно, что алгебра $M_n^A(P)$ имеет размерность n^2 и в качестве базы можно взять матричные единицы E_{ij}, $1 \le i, j \le n$. Возникает естественный

Вопрос 2. *Пусть $\mathfrak{A}$ — некоторая ассоциативная алгебра размерности n^2 над полем P. Существует ли матрица $A \in M_n(P)$ такая, что $\mathfrak{A}$ изоморфна алгебре $M_n^A(P)$?*

Будем считать, что операция $\odot$ ассоциативна. Хотим выбрать такое подмножество $G \subseteq M_n(P)$, что алгебраическая система $\langle G; \odot\rangle$ является группой. Выясним вопрос о существовании единичного элемента. Если I — единичный элемент этой группы, то для любого элемента $X \in G$ должны выполняться равенства

$$I \odot X = IAX + IB + CX + D = X, \tag{4}$$

$$X \odot I = XAI + XB + CI + D = X. \tag{5}$$

Из равенства (4) получим

$$(IA + C - E)X = -IB - D.$$

Учитывая, что X произвольно, имеем

$$\begin{cases} IA + C = E, \\ IB = -D. \end{cases}$$

Аналогично, рассматривая равенство (5), приходим к системе

$$\begin{cases} AI + B = E, \\ CI = -D. \end{cases}$$

Таким образом, справедлива

Лемма 3. *Элемент $I \in M_n(P)$ является единичным относительно умножения $\odot$, если выполнена следующая система равенств:*

$$\begin{cases} IA = E - C, \\ AI = E - B, \\ IB = D. \end{cases}$$

В частности, если операция $\odot$ ассоциативна и $\det A \neq 0$, *то эта система равносильна системе*

$$\begin{cases} I = (E - C)A^{-1}, \\ B = ACA^{-1}. \end{cases}$$

Стандартному произведению матриц из $M_n(P)$ соответствует билинейная форма

$$f(x, y) = xEy^t,$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in P^n$, а символ t означает транспонирование.

Аналогично матричному произведению $\odot$, определенному равенством (1), соответствует n^2 функций:

$$z_{ij} = z_{ij}(X_i, Y^j) = X_iAY^j + X_iB^j + C_iY^j + d_{ij},$$

где для квадратной матрицы M символ M_i означает ее i-ю строку, а символ M^j — j-й столбец и d_{ij} — элемент, стоящий на месте (i, j) в матрице D. В частности, произведение $\odot$ определяет n различных действий $\odot_i$, $i = 1, 2, \dots, n$, матрицы Y из $M_n(P)$ на векторном пространстве P^n:

$$v \odot_i Y = v(AY) + vB + C_iY + D_i, \quad v \in P^n.$$

Заметим, что это действие можно рассматривать как аффинное преобразование векторного пространства P^n:

$$v \odot_i Y = v(AY + B) + C_iY + D_i,$$

которое будем записывать как пару $(AY + B, C_iY + D_i)$. При этом матрица $AY + B$ определяет линейное преобразование векторного пространства P^n, а вектор $C_iY + D_i$ — сдвиг.

Полугруппа $\mathscr{L}(P^n)$ линейных преобразований векторного пространства P^n изоморфна полугруппе матриц $M_n(P)$. Аналогично полугруппа аффинных преобразований $A\mathscr{L}(P^n)$ изоморфна множеству пар $(M_n(P), P^n)$. Из приведенных выше рассуждений легко следует

Предложение. *Если операция $\odot$ ассоциативна, то имеем n гомоморфизмов φ_i:*

$$\varphi_i(Y) = (AY + B,\ C_iY + D_i), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

полугруппы линейных преобразований $\langle M_n(P), \cdot\rangle$ векторного пространства P^n в полугруппу аффинных преобразований $\langle (M_n(P), P^n), \odot_i\rangle$ векторного пространства P^n.

§ 2. Группа Михайличенко

В этом параграфе рассмотрим некоторое множество матриц с произведением типа (1), определенное А. А. Симоновым, и покажем, что оно является группой, которая при $P = \mathbb{R}$ изоморфна группе Михайличенко.

Рассмотрим следующее матричное произведение:

$$X \circledast Y = XVY + XU + U^tY, \quad X, Y \in M_n(P), \tag{6}$$

где

$$U = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ 0 & \cdots & 0 \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in M_n(P)$$

— матрица порядка n, у которой все элементы, за исключением элементов последней строки, нулевые,

$$V = (E_n - U)(E_n - U^t) = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & -1 \\ & E_{n-1} & & \vdots \\ & & & -1 \\ \hline -1 & \dots & -1 & n-1 \end{array}\right),$$

где E_k — единичная матрица порядка k. Далее символом E будем обозначать единичную матрицу порядка n.

Можно отметить, что произведение (6) определяет единственную функцию строк и столбцов, а именно,

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n; y_1, y_2, \dots, y_n) = \sum_{i=1}^{n-1} (x_i - x_n)(y_i - y_n) + x_n + y_n$$

или в матричном виде

$$f(x, y) = xVy^t + x_n + y_n.$$

Легко заметить, что $\det(E - U) = \det(E - U^t) = 0$, поэтому $\det V = 0$.

Определим также матрицу

$$I = I_n = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & E_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right).$$

Следующая лемма устанавливается непосредственной проверкой.

Лемма 4. *Для определенных выше матриц порядка $n \geq 2$ справедливы соотношения*

1) $U = U^2$;
2) $UV = VU^t = 0$;
3) $U^t I = IU = 0$;
4) $VI + U = E$.

С помощью этих равенств легко проверяется

Лемма 5. *Матричное умножение* (6) *ассоциативно.*

Доказательство. В силу леммы 1 достаточно убедиться, что справедлива следующая система равенств:

$$\begin{cases} VU^t = UV, \\ U^2 - U = 0, \\ (U^t)^2 - U^t = 0. \end{cases}$$

Первое и второе равенства непосредственно следуют из пп. 2 и 1 леммы 4. Третье равенство вытекает из второго, а потому также выполняется. Лемма доказана.

Рассмотрим алгебраическую систему $\langle M_n(P); \circledast, + \rangle$. Нетрудно убедиться, что она не является кольцом, так как не выполняется дистрибутивность. Также нетрудно проверить, что произведение $0 \circledast X$, где 0 — нулевая матрица из $M_n(P)$, не всегда равно 0.

Возникает естественный вопрос: можно ли вложить множество $M_n(P)$ в множество матриц большего размера так, чтобы операция $\circledast$ индуцировалась обычным матричным умножением?

Для ответа на этот вопрос определим множество матриц

$$G_n(P) = \{Y \in M_n(P) \mid \det(VY + U) \neq 0\}.$$

Целью настоящего параграфа является доказательство следующего утверждения.

Теорема 2. *Множество $G_n(P)$, $n \geq 2$, является группой относительно операции $\circledast$.*

При $P = \mathbb{R}$ эта группа изоморфна группе Михайличенко, определенной в [4]. Для доказательства теоремы 2 докажем некоторые вспомогательные утверждения.

Лемма 6. *Определитель $\det(VX + U)$ выражается через элементы матрицы X следующим образом:*

$$\det(VX+U) = -\begin{vmatrix} 0 & 1 \ \dots \ 1 \\ \hline 1 & \\ \vdots & X \\ 1 & \end{vmatrix} = -\begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ \hline 1 & x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}. \tag{7}$$

При этом справедливо равенство $\det(VX + U) = \det(XV + U^T)$.

Доказательство. Для того чтобы вычислить определитель матрицы

$$VX + U = \begin{pmatrix} x_{11} - x_{n1} & \cdots & x_{1n} - x_{nn} \\ \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n-1,1} - x_{n1} & \cdots & x_{n-1,n} - x_{nn} \\ 1 + nx_{n1} - x_{11} - \cdots - x_{n1} & \cdots & 1 + nx_{nn} - x_{1n} - \cdots - x_{nn} \end{pmatrix},$$

перейдем к матрице большего размера:

$$\det(VX+U) = \begin{vmatrix} 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \\ \hline 0 & x_{11} - x_{n1} & \cdots & x_{1n} - x_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1,1} - x_{n1} & \cdots & x_{n-1,n} - x_{nn} \\ 0 & 1 + nx_{n1} - x_{11} - \cdots - x_{n1} & \cdots & 1 + nx_{nn} - x_{1n} - \dots \end{vmatrix}.$$

Прибавим все строки этого определителя начиная со 2-й и заканчивая n-й к последней строке, а затем прибавим 1-ю строку полученного определителя ко 2-й, 3-й и т. д. до n-й, получим

$$\det(VX+U) = \begin{vmatrix} 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \\ \hline 0 & x_{11} - x_{n1} & \cdots & x_{1n} - x_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & x_{n-1,1} - x_{n1} & \cdots & x_{n-1,n} - x_{nn} \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & x_{n1} & \cdots & x_{nn} \\ \hline 1 & x_{11} & \cdots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 1 & x_{n-1,1} & \cdots & x_{n-1,n} \\ 0 & 1 & \cdots & 1 \end{vmatrix}.$$

Поменяв местами первую и последнюю строки, приходим к требуемому равенству (7).

Чтобы доказать второе равенство леммы, рассмотрим матрицу

$$XV + U^T = \begin{pmatrix} x_{11} - x_{1n} & \cdots & 1 + nx_{1n} - x_{11} - \cdots - x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ x_{n1} - x_{nn} & \cdots & 1 + nx_{nn} - x_{n1} - \cdots - x_{nn} \end{pmatrix}.$$

Выполняя те же преобразования, что и для определителя $\det(VX + U)$, видим, что определитель $\det(VX + U^T)$ при помощи аналогичных преобразований, но уже столбцов, также можно привести к виду (7). Лемма доказана.

Убедимся теперь, что справедлива

Лемма 7. *Множество $G_n(P)$ замкнуто относительно операции $\circledast$.*

Доказательство. Пусть $X, Y \in G_n(P)$. Надо показать, что матрица $X \circledast Y$ также лежит в $G_n(P)$. Используя определение операции $\circledast$ и соотношения из леммы 4, легко можно установить справедливость равенства

$$V(X \circledast Y) + U = (VX + U)(VY + U).$$

Из этого равенства следует, что

$$\det(V(X \circledast Y) + U) = \det(VX + U) \cdot \det(VY + U).$$

Учитывая, что $\det(VX + U) \neq 0$, $\det(VY + U) \neq 0$, заключаем, что и $\det(V(X \circledast Y) + U) \neq 0$. Следовательно, $X \circledast Y \in G_n(P)$. Лемма доказана.

Лемма 8. *В множестве $G_n(P)$ для всякого элемента $X \in G_n(P)$ найдется обратный, т. е. такой элемент $\overline{X} \in G_n(P)$, для которого справедливы равенства $X \circledast \overline{X} = \overline{X} \circledast X = I$.*

Доказательство. Докажем вначале, что для матрицы $X \in G_n(P)$ найдется правый обратный, т. е. такой элемент $\overline{X}_R \in G_n(P)$, для которого справедливо равенство $X \circledast \overline{X}_R = I$. Действительно, по определению операции $\circledast$

$$X \circledast \overline{X}_R = XV\overline{X}_R + XU + U^t\overline{X}_R.$$

Учитывая, что $XV\overline{X}_R + XU + U^t\overline{X}_R = I$, приходим к равенству $(XV + U^t)\overline{X}_R = I - XU$. Так как $X \in G_n(P)$, имеем $\det(VX + U) \neq 0$. Как установлено в лемме 6, $\det(VX + U) = \det(XV + U^t)$, а потому $\det(XV + U^t) \neq 0$. Следовательно, в качестве правого обратного можно взять матрицу $\overline{X}_R = (XV + U^t)^{-1}(I - XU)$.

Аналогичным образом из равенства $\overline{X}_L \circledast X = I$ находим левый обратный, который равен $\overline{X}_L = (I - U^tX)(VX + U)^{-1}$.

Покажем теперь, что справедливо равенство $\overline{X}_R = \overline{X}_L$. Подставив найденные выражения, получим

$$(XV + U^t)^{-1}(I - XU) = (I - U^tX)(VX + U)^{-1}$$

или

$$(I - XU)(VX + U) = (XV + U^t)(I - U^tX).$$

Раскрыв скобки, приходим к равенству

$$IVX + IU - XUVX - XU^2 = XVI - XVU^tX + U^tI - (U^t)^2X.$$

С учетом соотношений из леммы 4 перепишем его в виде $IVX - XU^2 = XVI - (U^t)^2X$. Вынося X, получим $(IV + (U^t)^2)X = X(VI + U^2)$, но так как $IV +$

$(U^t)^2 = VI + U^2 = E$, это не что иное, как определение единичной матрицы при обычном умножении. Лемма доказана.

Доказательство теоремы 2. То, что операция $\circledast$ ассоциативна, следует из установленной ранее леммы. Из равенства $VI + U = E$ (см. лемму 3) вытекает, что $I \in G_n(P)$.

Как установлено в лемме 3, чтобы матрица I являлась единичным элементом, должна выполняться система равенств

$$\begin{cases} VI + U = E, \\ U^t I = 0, \\ IV + U^T = E, \\ IU = 0. \end{cases}$$

Справедливость этих равенств следует из леммы 4. Теорема доказана.

§ 3. Вложение группы $G_n(P)$ в группу $GL_{n+1}(P)$

Покажем, что группа $G_n(P)$ линейна. Более точно, справедлива

Теорема 3. *Группа $G_n(P) = \langle G_n(P), \circledast\rangle$ изоморфна некоторой подгруппе группы $GL_{n+1}(P)$.*

Пусть $X = (x_{ij})$, $Y = (y_{ij})$ — две матрицы из $GL_n(P)$. Тогда произведение $Z = X \circledast Y$ определяется равенством

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1} (x_{ik} - x_{in})(y_{kj} - y_{nj}) + x_{in} + y_{nj}, \quad 1 \le i, j \le n,$$

где $Z = (z_{ij})$. Как известно, определенное таким образом умножение ассоциативно, а роль единичного элемента играет матрица

$$I_n = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & E_{n-1} & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline 0 & \dots & 0 & 0 \end{array}\right) \in M_n(P).$$

Обратной для матрицы X будет матрица $\overline{X} = (XV + U^t)^{-1}(I - XU)$.

Известно, что каждая матрица $X \in GL_n(P)$ соответствует линейному преобразованию векторного пространства P^n:

$$vX = \left(\sum_{k=1}^{n} v_k x_{k1}, \sum_{k=1}^{n} v_k x_{k2}, \dots, \sum_{k=1}^{n} v_k x_{kn}\right), \quad v = (v_1, v_2, \dots, v_n) \in P^n.$$

Если же рассматривать умножение $\circledast$, то получим такое преобразование векторного пространства P^n:

$$v \circledast X = \left(\sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_n)(x_{k1} - x_{n1}) + v_n + x_{n1}, \sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_n)(x_{k2} - x_{n2}) + v_n + x_{n2}, \dots,\right.$$
$$\left.\sum_{k=1}^{n-1} (v_k - v_n)(x_{kn} - x_{nn}) + v_n + x_{nn}\right) = \left(\sum_{k=1}^{n-1} v_k (x_{k1} - x_{n1}) + v_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{n1} - x_{k1})\right),\right.$$
$$\sum_{k=1}^{n-1} v_k (x_{k2} - x_{n2}) + v_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{n2} - x_{k2})\right), \dots,$$
$$\left.\sum_{k=1}^{n-1} v_k (x_{kn} - x_{nn}) + v_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1} (x_{nn} - x_{kn})\right)\right) + (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn}).$$

Видим, что это преобразование является аффинным преобразованием с матрицей

$$A_X = \begin{pmatrix} x_{11}-x_{n1} & x_{12}-x_{n2} & \cdots & x_{1n}-x_{nn} \\ x_{21}-x_{n1} & x_{22}-x_{n2} & \cdots & x_{2n}-x_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n-1,1}-x_{n1} & x_{n-1,2}-x_{n2} & \cdots & x_{n-1,n}-x_{nn} \\ 1+nx_{n1}-\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} & 1+nx_{n2}-\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i2} & \cdots & 1+nx_{nn}-\sum\limits_{i=1}^{n} x_{in} \end{pmatrix}$$

и вектором сдвига $(x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})$, т. е. $v \circledast X = vA_X + (x_{n1}, x_{n2}, \dots, x_{nn})$.

В классическом случае композиции линейных преобразований соответствует произведение матриц. Покажем, что и в случае действия $\circledast$ композиции двух аффинных преобразований соответствует произведение матриц $\circledast$. Действительно, пусть

$$X = (x_{ij}), \quad Y = (y_{ij}) \in M_n(P), \quad u = (u_1, u_2, \dots, u_n) \in P^n.$$

Обозначим

$$v = (v_1, v_2, \dots, v_n) = u \circledast X, \quad w = (w_1, w_2, \dots, w_n) = v \circledast Y.$$

Тогда координаты вектора v определяются равенствами

$$v_1 = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{k1} - x_{n1}) + u_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{n1} - x_{k1})\right) + x_{n1},$$
$$\dots$$
$$v_i = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{ki} - x_{ni}) + u_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{ni} - x_{ki})\right) + x_{ni},$$
$$\dots$$
$$v_n = \sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{kn} - x_{nn}) + u_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{nn} - x_{kn})\right) + x_{nn},$$

а координаты вектора w — равенствами

$$w_1 = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(y_{k1} - y_{n1}) + v_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(y_{n1} - y_{k1})\right) + y_{n1},$$
$$\dots$$
$$w_i = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(y_{ki} - y_{ni}) + v_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(y_{ni} - y_{ki})\right) + y_{ni},$$
$$\dots$$
$$w_n = \sum_{k=1}^{n-1} v_k(y_{kn} - y_{nn}) + v_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(y_{nn} - y_{kn})\right) + y_{nn}.$$

Рассмотрим композицию этих преобразований: $(u \circledast X) \circledast Y = w$. Тогда j-я компонента вектора w имеет вид

$$w_j = \sum_{i=1}^{n-1} v_i(y_{ij} - y_{nj}) + v_n\left(1 + \sum_{i=1}^{n-1}(y_{nj} - y_{ij})\right) + y_{nj}, \quad j = 1, 2, \dots, n.$$

Подставляя выражения для v_i и v_n, получим

$$w_j = \sum_{i=1}^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{ki} - x_{ni}) + u_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{ni} - x_{ki})\right) + x_{ni}\right)(y_{ij} - y_{nj})$$

$$+\left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k(x_{kn}-x_{nn})+u_n\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}(x_{nn}-x_{kn})\right)+x_{nn}\right)\left(1+\sum_{i=1}^{n-1}(y_{nj}-y_{ij})\right)+y_{nj}.$$

После несложных преобразований приходим к равенству

$$w_j = \sum_{k=1}^{n-1} u_k\left(\sum_{i=1}^{n-1}(y_{ij} - y_{nj})(x_{ki} - x_{ni} - x_{kn} + x_{nn}) + x_{kn} - x_{nn}\right)$$

$$+ u_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{nn} - x_{kn}) + \sum_{i=1}^{n-1}\sum_{k=1}^{n-1}(y_{ij} - y_{nj})(x_{ni} - x_{ki} - x_{nn} + x_{kn})\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}(y_{ij} - y_{nj})(x_{ni} - x_{nn}) + x_{nn} + y_{nj}.$$

Теперь рассмотрим произведение $Z = X \circledast Y$. Как известно, элементы матрицы Z определяются равенствами

$$z_{ij} = \sum_{k=1}^{n-1}(x_{ik} - x_{in})(y_{kj} - y_{nj}) + x_{in} + y_{nj}, \quad 1 \le i, j \le n.$$

Действуя матрицей Z на вектор u, получим

$$u \circledast Z = \left(\sum_{k=1}^{n-1} u_k(z_{k1} - z_{n1}) + u_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(z_{n1} - z_{k1})\right) + z_{n1}, \ldots,\right.$$

$$\sum_{k=1}^{n-1} u_k(z_{kj} - z_{nj}) + u_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(z_{nj} - z_{kj})\right) + z_{nj}, \ldots,$$

$$\left.\sum_{k=1}^{n-1} u_k(z_{kn} - z_{nn}) + u_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}(z_{nn} - z_{kn})\right) + z_{nn}\right).$$

Рассматривая j-ю компоненту этого вектора и подставляя выражения для элементов матрицы Z, приходим к равенству

$$(u\circledast Z)_j = \sum_{k=1}^{n-1} u_k\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_{ki}-x_{kn})(y_{ij}-y_{nj})+x_{kn}-\sum_{i=1}^{n-1}(x_{ni}-x_{nn})(y_{ij}-y_{nj})-x_{nn}\right)$$

$$+ u_n\left(1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\sum_{i=1}^{n-1}(x_{ni} - x_{nn})(y_{ij} - y_{nj}) + x_{nn} - \sum_{i=1}^{n-1}(x_{ki} - x_{kn})(y_{ij} - y_{nj}) - x_{kn}\right)\right)$$

$$+ \sum_{i=1}^{n-1}(x_{ni} - x_{nn})(y_{ij} - y_{nj}) + x_{nn} + y_{nj}$$

$$= \sum_{k=1}^{n-1} u_k\left(\sum_{i=1}^{n-1}(y_{ij} - y_{nj})(x_{ki} - x_{kn} - x_{ni} + x_{nn}) + x_{kn} - x_{nn}\right)$$

$$+ u_n\left(1 + \sum_{k=1}^{n-1}\sum_{i=1}^{n-1}(y_{ij} - y_{nj})(x_{ni} - x_{nn} - x_{ki} + x_{kn}) + \sum_{k=1}^{n-1}(x_{nn} - x_{kn})\right)$$

$$+\sum_{i=1}^{n-1}(x_{ni}-x_{nn})(y_{ij}-y_{nj})+x_{nn}+y_{nj}.$$

Сравнивая это выражение с компонентой w_j, видим, что справедливо равенство $(u \circledast X) \circledast Y = u \circledast (X \circledast Y)$, т. е. композиция двух аффинных преобразований векторного пространства соответствует произведению $\circledast$.

Таким образом, доказана

Лемма 9. *Композиция двух аффинных преобразований векторного пространства соответствует произведению $\circledast$ соответствующих матриц.*

Группа аффинных преобразований $\mathrm{Aff}(P^n)$ векторного пространства P^n состоит из отображений

$$\varphi : v \longmapsto vA + a, \quad A \in GL_n(P),\ a \in P^n,$$

т. е. каждое аффинное преобразование определяется парой $\varphi = (A, a)$. Если есть другое аффинное преобразование

$$\psi = (B, b), \quad \text{где } B \in GL_n(P),\ b \in P^n,$$

то их композиция действует так:

$$\varphi\psi : v \longmapsto (vA + a)B + b = v(AB) + aB + b,$$

т. е. $\varphi\psi = (AB, aB + b)$.

Группа $\mathrm{Aff}(P^n)$ вкладывается в $GL_{n+1}(P)$ по правилу

$$(A, a) \longmapsto \left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ a & 1 \end{array}\right).$$

Тогда композиции аффинных преобразований (A, a) и (B, b) будет отвечать произведение матриц

$$\left(\begin{array}{c|c} A & 0 \\ \hline a & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{c|c} B & 0 \\ \hline b & 1 \end{array}\right) = \left(\begin{array}{c|c} AB & 0 \\ \hline aB+b & 1 \end{array}\right).$$

Мы сопоставили произвольной матрице $X = (x_{ij}) \in M_n(P)$ аффинное преобразование

$$v \circledast X = vA_X + (x_{n1}, x_{n2}, \ldots, x_{nn}),\ v \in P^n,$$

где

$$A_X = \begin{pmatrix} x_{11}-x_{n1} & x_{12}-x_{n2} & \cdots & x_{1n}-x_{nn} \\ x_{21}-x_{n1} & x_{22}-x_{n2} & \cdots & x_{2n}-x_{nn} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ x_{n-1,1}-x_{n1} & x_{n-1,2}-x_{n2} & \cdots & x_{n-1,n}-x_{nn} \\ 1+nx_{n1}-\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i1} & 1+nx_{n2}-\sum\limits_{i=1}^{n} x_{i2} & \cdots & 1+nx_{nn}-\sum\limits_{i=1}^{n} x_{in} \end{pmatrix}.$$

При этом матрица A_X представима в виде $A_X = VX + U$, а потому матрица X принадлежит группе $G_n(P)$ тогда и только тогда, когда $\det(VX + U) \neq 0$.

Как известно, группа аффинных преобразований $\mathrm{Aff}(P^n)$ изоморфна полупрямому произведению $GL_n(P) \leftthreetimes P^n$, при этом подгруппа P^n будет нормальной.

Полупрямое произведение $GL_n(P) \leftthreetimes P^n$ вкладывается в группу $GL_{n+1}(P)$. Таким образом, группа $G_n(P)$ вкладывается в $GL_{n+1}(P)$ по правилу

$$X \longmapsto \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & VX+U & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline x_{n1} & \ldots & x_{nn} & 1 \end{array}\right).$$

Если обозначить $y_{ij} = x_{ij} - x_{nj}$, $1 \le i \le n-1$, $1 \le j \le n$, то получим матрицу

$$Y = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \cdots & y_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \cdots & y_{n-1,n} \\ 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_{i1} & 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_{i2} & \cdots & 1 - \sum\limits_{i=1}^{n-1} y_{in} \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Определим в группе $GL_{n+1}(P)$ подгруппу $H_{n+1}(P)$, состоящую из матриц

$$\left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & Y & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline a_1 & \ldots & a_n & 1 \end{array}\right),$$

где Y принадлежит $GL_n(P)$ и имеет вид (8), а все a_i лежат в P. Очевидно, что $G_n(P)$ изоморфна $H_{n+1}(P)$.

Сопряжем группу $H_{n+1}(P)$ элементом

$$g = t_{n,n-1}(-1)t_{n,n-2}(-1)\ldots t_{n,1}(-1).$$

Для этого рассмотрим произвольную матрицу

$$\widetilde{Y} = \left(\begin{array}{ccc|c} & & & 0 \\ & Y & & \vdots \\ & & & 0 \\ \hline a_1 & \ldots & a_n & 1 \end{array}\right) \in H_{n+1}(P)$$

и заметим, что если ее умножить слева на элемент

$$g^{-1} = t_{n,1}(1)t_{n,2}(1)\ldots t_{n,n-1}(1),$$

то это соответствует тому, что 1-я, 2-я, ..., $(n-1)$-я строки прибавляются к n-й строке. В результате получим

$$g^{-1}\widetilde{Y} = \left(\begin{array}{cccc|c} y_{11} & y_{12} & \cdots & y_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1,1} & y_{n-1,2} & \ldots & y_{n-1,n} & 0 \\ 1 & 1 & \ldots & 1 & 0 \\ \hline a_1 & a_2 & \ldots & a_n & 1 \end{array}\right).$$

Если эту матрицу умножить справа на элемент g, то это равносильно тому, что умножим n-й столбец на -1 и прибавим к 1-му, 2-му, ..., $n-1$-му столбцам (вычитаем n-й столбец из 1-го, 2-го, ..., $(n-1)$-го). Получим матрицу

$$g^{-1}\widetilde{Y}g = \left(\begin{array}{ccccc|c} y_{11}-y_{1n} & y_{12}-y_{1n} & \dots & y_{1,n-1}-y_{1n} & y_{1n} & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_{n-1,1}-y_{n-1,n} & y_{n-1,2}-y_{n-1,n} & \dots & y_{n-1,n-1}-y_{n-1,n} & y_{n-1,n} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline a_1-a_n & a_2-a_n & \dots & a_{n-1}-a_n & a_n & 1 \end{array}\right).$$

Введем обозначения

$$z_{ij} = y_{ij} - y_{in}, \quad c_i = y_{in}, \quad 1 \leq i, j \leq n-1.$$

В этих обозначениях наша матрица примет вид

$$g^{-1}\widetilde{Y}g = \left(\begin{array}{cccc|c|c} z_{11} & z_{12} & \dots & z_{1,n-1} & c_1 & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots & \vdots \\ z_{n-1,1} & z_{n-1,2} & \dots & z_{n-1,n-1} & c_{n-1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & \dots & 0 & 1 & 0 \\ \hline b_1 & b_2 & \dots & b_{n-1} & b_n & 1 \end{array}\right). \tag{9}$$

Следовательно, группа $g^{-1}H_{n+1}(P)g$ с обычным матричным умножением изоморфна группе $\langle G_n(P); \circledast\rangle$. Теорема 3 доказана.

Из теоремы 3, в частности, следует, что группа Михайличенко $G_n(\mathbb{R})$ изоморфна некоторой подгруппе из $GL_{n+1}(\mathbb{R})$.

§ 4. Заключительные замечания

Можно определить и более общее умножение матриц, положив

$$X \odot Y = XA_1Y + YA_2X + B_1XB_2 + C_1YC_2 + D, X, Y \in M_n(P)$$

для фиксированных матриц A_1, A_2, B, C, D из $M_n(P)$. Именно на этом пути возникают лиевы (надо положить $A_1 = E$, $A_2 = -E$, $B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = D = 0$) и йордановы (надо положить $A_1 = A_2 = E$, $B_1 = B_2 = C_1 = C_2 = D = 0$) алгебры. Интересно выяснить:

а) какие еще известные алгебры можно получить на этом пути?

б) когда операция $\odot$ ассоциативна (лиева, йорданова)?

в) какое подмножество из $M_n(P)$ образует группу относительно операции $\odot$?

г) всегда ли эта группа будет линейной, т. е. вкладываться в $GL_m(P)$ для некоторого m?

ЛИТЕРАТУРА

1. *Пирс Р.* Ассоциативные алгебры. М.: Мир, 1986.
2. *Коуровская тетрадь.* Нерешенные вопросы теории групп. 14-е изд. Новосибирск: Ин-т математики СО РАН, 1999.
3. *Симонов А. А.* Приложение 2 в монографии Ю. И. Кулакова // Теория физических структур. М.: ООО «Компания Юниверс Контракт», 2004. С. 673–707.
4. *Михайличенко Г. Г.* Решение функциональных уравнений в теории физических структур // Докл. АН СССР. 1972. Т. 206, № 5. С. 1056–1058.
5. *Михайличенко Г. Г.* Групповая симметрия физических структур. Барнаул; Горно-Алтайск: Горно-Алтайск. гос. ун-т, 2003.

6. *Кулаков Ю. И.* Об одном принципе, лежащем в основании классической физики // Докл. АН СССР. 1970. Т. 193, № 1. С. 72–75.
7. *Кулаков Ю. И.* Математическая формулировка теории физических структур // Сиб. мат. журн. 1971. Т. 12, № 5. С. 1142–1145.

Статья поступила 29 мая 2012 г.

Бардаков Валерий Георгиевич, Симонов Андрей Артёмович
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
bardakov@math.nsc.ru, andrey.simonoff@gmail.com