Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2013. Том 54, № 3

УДК 512.532.3

ИНТЕРАССОЦИАТИВНОСТЬ НА СВОБОДНОЙ КОММУТАТИВНОЙ ПОЛУГРУППЕ

А. Б. Горбатков

Аннотация. Описаны все полугруппы, интерассоциативные к свободной коммутативной полугруппе. Показано, что каждая полугруппа, интерассоциативная к свободной коммутативной полугруппе, является ее вариантом либо совпадает с ней. Найдены условия изоморфизма двух вариантов свободной коммутативной полугруппы.

Ключевые слова: вариант полугруппы, интерассоциативность, свободная коммутативная полугруппа.

Введение

Пусть $(S, \cdot)$ — произвольная полугруппа и $(S, \circ)$ — полугруппа, определенная на том же множестве. Полугруппа $(S, \circ)$ называется *интерассоциативной к* $(S, \cdot)$, если

$$a \cdot (b \circ c) = (a \cdot b) \circ c, \tag{1}$$

$$a \circ (b \cdot c) = (a \circ b) \cdot c \tag{2}$$

для всех $a, b, c \in S$. Полугруппа $(S, \circ)$ называется *сильно интерассоциативной к* $(S, \cdot)$, если выполнены тождества (1), (2) и

$$a \circ (b \cdot c) = (a \cdot b) \circ c. \tag{3}$$

Термин «интерассоциативность» был впервые использован в 1971 г. в работе Зупника [1], в которой были описаны некоторые свойства интерассоциативных группоидов. В 1986 г. Дроузи [2] показал, что группа изоморфна каждой интерассоциативной к ней группе. Часто возникающей задачей является нахождение условий, при которых полугруппа является интерассоциативной к данной и две полугруппы, интерассоциативные к данной, изоморфны. Гоулд, Линтон и Нельсон [3] дали ответы на эти вопросы для случая моногенных полугрупп.

Для полугруппы S и ее фиксированного элемента $x \in S$ определим бинарную операцию $*_x$ для всех $a, b \in S$ следующим образом: $a *_x b = axb$. Полугруппа $(S, *_x)$ называется *вариантом полугруппы* S, а операция $*_x$ — *деформированным умножением.*

Первые результаты, касающиеся вариантов произвольных полугрупп, впервые появились в работах Хики [4, 5], также различными авторами изучались варианты регулярных полугрупп [6] и полугрупп преобразований [7].

Линтон, Гивенс, Росин и Дишман [8] описали полугруппы, интерассоциативные к свободной коммутативной полугруппе, с конечным числом $n > 1$ образующих и нашли для них критерии изоморфизма. Для случая $n = 1$ этот вопрос был решен Нельсон [9]. Возникает естественная задача описания полугрупп, интерассоциативных к свободной коммутативной полугруппе над произвольным алфавитом. В данной работе показано, что каждая полугруппа, интерассоциативная к свободной коммутативной полугруппе над произвольным алфавитом, является ее вариантом либо совпадает с ней, а также найдены критерии изоморфизма таких полугрупп.

1. Классификация полугрупп, интерассоциативных к $FC(X)$

Пусть X — произвольное непустое множество и $FC(X)$ — свободная коммутативная полугруппа над алфавитом X. Множество всех интерассоциативных к $FC(X)$ полугрупп будем обозначать через $\mathrm{Int}(FC(X))$, а сильно интерассоциативных — через $\mathrm{SInt}(FC(X))$. Через $FC^1(X)$ обозначим $FC(X)$ с присоединенной единицей 1.

Слова из $FC(X)$ будем записывать в виде $w = w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n}$, где элементы $w_1, w_2, \dots, w_n \in X$ попарно различны и $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{N}$. Через $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ будем обозначать последовательность чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_n$. Для всех $a \in X$ положим

$$a^0 w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n} = w_1^{\alpha_1} \dots w_n^{\alpha_n}.$$

Если $x \in FC(X)$ — некоторый фиксированный элемент, то будем обозначать вариант $(FC(X), *_x)$ через $FC_x(X)$.

Лемма 1.1. *Пусть $(S, \cdot)$ — произвольная полугруппа и $(S, \circ)$ — интерассоциативная к ней полугруппа. Тогда для всех $a, b, c, d \in S$ имеет место тождество*

$$(a \cdot b) \circ (c \cdot d) = a \cdot (b \circ c) \cdot d. \tag{4}$$

Доказательство. Пусть $(S, \circ)$ — полугруппа, интерассоциативная к $(S, \cdot)$, тогда для всех $a, b, c, d \in S$

$$(a \cdot b) \circ (c \cdot d) \overset{(2)}{=} a \cdot (b \circ (c \cdot d)) \overset{(2)}{=} a \cdot ((b \circ c) \cdot d) = a \cdot (b \circ c) \cdot d.$$

Лемма доказана.

Теорема 1.2. *Для свободной коммутативной полугруппы $FC(X)$ справедливо следующее равенство:*

$$\mathrm{Int}(FC(X)) = \mathrm{SInt}(FC(X)) = \{FC_x(X) : x \in FC(X)\} \cup \{FC(X)\}.$$

Доказательство. Очевидно, что $FC(X) \in \mathrm{Int}(FC(X)) \cap \mathrm{SInt}(FC(X))$. Пусть $x \in FC(X)$, тогда для всех $a, b, c \in FC(X)$ имеем

$$a(b *_x c) = a(bxc) = (ab)xc = (ab) *_x c,$$

$$a *_x (bc) = ax(bc) = (axb)c = (a *_x b) \cdot c,$$

откуда следует, что $FC_x(X) \in \mathrm{Int}(FC(X))$.

По определению $\mathrm{SInt}(FC(X)) \subseteq \mathrm{Int}(FC(X))$, покажем обратное включение:

$$\forall a, b, c \in FC_x(X) \quad a *_x (bc) = ax(bc) = (ab)xc = (ab) *_x c,$$

откуда $\mathrm{Int}(FC(X)) \subseteq \mathrm{SInt}(FC(X))$.

Для конечного X утверждение, эквивалентное утверждению $\mathrm{Int}(FC(X)) \subseteq \{FC_x(X) : x \in FC(X)\} \cup \{FC(X)\}$, доказано в [8, с. 372]. Пусть X счетно,

$(FC(X), \circ) \in \mathrm{Int}(FC(X))$ и $a, b, c, d \in X$. Возьмем элементы $c, d \in X$ такие, что $\{a, b\} \cap \{c, d\} = \varnothing$, тогда имеем

$$a(c \circ d)b \overset{(4)}{=} (ac) \circ (db) = (ca) \circ (bd) \overset{(4)}{=} c(a \circ b)d,$$

откуда $a \circ b = a\phi(a, b)b$, где ϕ — некоторое отображение из $X \times X$ в $FC^1(X)$.

Пусть $e, f \in X$ — произвольные элементы, тогда

$$a(e \circ f)b = ae\phi(e, f)bf = ae\phi(a, b)bf,$$

т. е. $\phi(a, b) = \phi(e, f)$, откуда следует, что ϕ — константное отображение. Если $\phi(a, b) = 1$, то операция $\circ$ совпадает с операцией приписывания. Пусть $\phi(a, b) = x \in FC(X)$.

Для любых $v = v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_m^{\alpha_m}$, $w = w_1^{\beta_1} w_2^{\beta_2} \dots w_n^{\beta_n} \in FC(X) \setminus X$ имеем

$$a \circ b = a\phi(a, b)b = a *_x b,$$

$$a \circ v \overset{(3)}{=} (a \circ v_1) v_1^{\alpha_1 - 1} v_2^{\alpha_2} \dots v_m^{\alpha_m} = a\phi(a, v_1)v = a *_x v,$$

$$v \circ a \overset{(3)}{=} v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_m^{\alpha_m - 1}(v_m \circ a) = v\phi(v_m, a)a = v *_x a,$$

$$v \circ w \overset{(3)}{=} v_1^{\alpha_1} v_2^{\alpha_2} \dots v_m^{\alpha_m - 1}(v_m \circ w_1) w_1^{\beta_1 - 1} w_2^{\beta_2} \dots w_n^{\beta_n} = v\phi(v_m, w_1)w = v *_x w,$$

откуда $\mathrm{Int}(FC(X)) = \{FC_x(X) : x \in FC(X)\} \cup \{FC(X)\}$. Доказательство завершено.

2. Теорема об изоморфизме вариантов $FC(X)$

Пусть $x, y \in FC(X)$ такие, что $FC_x(X) \cong FC_y(X)$. Сформулируем несколько лемм, необходимых для доказательства основного результата работы, полагая, что f — изоморфизм между $FC_x(X)$ и $FC_y(X)$. Обозначим содержание слова $w = w_1 w_2 \dots w_n \in FC(X)$ через $c(w) = \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$.

Заметим, что X не является порождающим множеством для $FC_x(X)$, например, если $a, b \in X$, то слово ab нельзя представить в виде произведения элементов из X. Имеет место следующая

Лемма 2.1. *Множество $f(X)$ совпадает с X.*

Доказательство. Пусть $a \in X$ и $a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}$ — прообраз элемента a. Тогда

$$\begin{aligned} a *_y a &= f\big(a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n} *_x a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}\big) \\ &= f\big(a_1 *_x a_1^{2\alpha_1 - 1} a_2^{2\alpha_2} \dots a_n^{2\alpha_n}\big) = f(a_1) *_y f\big(a_1^{2\alpha_1 - 1} a_2^{2\alpha_2} \dots a_n^{2\alpha_n}\big), \end{aligned}$$

откуда $f(a_1) = a$ и $X \subseteq f(X)$.

Пусть теперь $f(a) = b_1^{\beta_1} \dots b_m^{\beta_m}$ и $v, w \in FC(X)$ такие, что $f(v) = b_1$, $f(w) = b_1^{2\beta_1 - 1} b_2^{2\beta_2} \dots b_m^{2\beta_m}$, в таком случае имеем

$$\begin{aligned} f(a *_x a) &= b_1^{\beta_1} \dots b_m^{\beta_m} *_y b_1^{\beta_1} \dots b_m^{\beta_m} \\ &= b_1 *_y b_1^{2\beta_1 - 1} b_2^{2\beta_2} \dots b_m^{2\beta_m} = f(v) *_y f(w) = f(v *_x w), \end{aligned}$$

откуда $v = a$ и, следовательно, $f(X) = X$. Лемма доказана.

Для слова w из $FC_x(X)$ или $FC_y(X)$ под записью w^k будем подразумевать k-ю степень слова w относительно операции приписывания.

Лемма 2.2. *Для всех $a \in X$ и $k \in \mathbb{N}$ справедливо равенство $f(a^k) = f(a)^k$.*

Доказательство. Пусть $a \in X$ и $f(a) = b$, $f(a^2) = a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}$. Ясно, что $b \in X$ и $f(a^2) \notin X$ согласно лемме 2.1.

Предположим, что $n > 1$, тогда

$$f(a^2 *_x a) = \left(a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}\right) *_y b = \left(a_1^{\alpha_1 - 1} \dots a_n^{\alpha_n}\right) *_y a_1 b = f(v *_x w),$$

где $v, w \in FC(X)$ такие, что $f(v) = a_1^{\alpha_1 - 1} \dots a_n^{\alpha_n}$, $f(w) = a_1 b$. Тогда $v *_x w = a^2 *_x a$. Так как $a_1 b \notin X$, то w также не содержится в X согласно лемме 2.1. Отсюда $w = a^2$, $v = a$. Получаем $f(a) = a_1^{\alpha_1 - 1} \dots a_n^{\alpha_n} = b$, тогда

$$f(a^2 *_x a) = b *_y a_1 b = a_1 *_y b^2 = f(s *_x t),$$

где $s, t \in FC(X)$ такие, что $f(s) = a_1$, $f(t) = b^2$. Тогда $s *_x t = a^2 *_x a$ и $s \in X$ по лемме 2.1, откуда $t = a^2$, т. е. $f(a^2) = b^2 = f(a)^2$. Следовательно, $n = 1$, что противоречит первоначальному предположению.

При $n = 1$ аналогично

$$f(a^2 *_x a) = a_1^{\alpha_1} *_y b = a_1^{\alpha_1 - 1} *_y a_1 b = f(v *_x w),$$

где $v, w \in FC(X)$ такие, что $f(v) = a_1^{\alpha_1 - 1}$, $f(w) = a_1 b$. Тогда $v *_x w = a^2 *_x a$.

Так как $a_1 b \notin X$, то w также не содержится в X согласно лемме 2.1, откуда $w = a^2$, $v = a$. Тогда $f(a^2) = a_1 b = a_1^{\alpha_1}$, значит, $a_1 = b$ и $f(a^2) = b^2 = f(a)^2$.

Теперь покажем что $f(a^k) = f(a)^k$ с помощью индукции по k. Пусть $f(a^{k-1}) = f(a)^{k-1}$. Используя равенство $f(a^2) = f(a)^2$, имеем

$$f(a) *_y f(a^k) = f(a *_x a^k) = f(a^2 *_x a^{k-1}) = f(a)^2 *_y f(a)^{k-1} = f(a) *_y f(a)^k,$$

откуда $f(a^k) = f(a)^k$. Лемма доказана.

Лемма 2.3. *Для всех $a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n} \in FC_x(X)$ справедливо равенство*

$$f\left(a_1^{\alpha_1} a_2^{\alpha_2} \dots a_n^{\alpha_n}\right) = f(a_1)^{\alpha_1} f(a_2)^{\alpha_2} \dots f(a_n)^{\alpha_n}.$$

Доказательство. Покажем, что $f(a_1^{\alpha_1} \dots a_n^{\alpha_n}) = f(a_1)^{\alpha_1} \dots f(a_n)^{\alpha_n}$ с помощью индукции по n. При $n = 1$ равенство выполняется согласно лемме 2.2. Пусть теперь равенство справедливо при $n = k - 1$, тогда, используя лемму 2.2, получаем

$$\begin{aligned} f(a_k) *_y f\left(a_1^{\alpha_1} \dots a_k^{\alpha_k}\right) &= f\left(a_k *_x a_1^{\alpha_1} \dots a_k^{\alpha_k}\right) = f\left(a_k^{\alpha_k + 1} *_x a_1^{\alpha_1} \dots a_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\right) \\ &= f\left(a_k^{\alpha_k + 1}\right) *_y f\left(a_1^{\alpha_1} \dots a_{k-1}^{\alpha_{k-1}}\right) = f(a_k) f(a_k)^{\alpha_k} *_y f(a_1)^{\alpha_1} \dots f(a_{k-1})^{\alpha_{k-1}} \\ &= f(a_k) *_y f(a_1)^{\alpha_1} \dots f(a_{k-1})^{\alpha_{k-1}} f(a_k)^{\alpha_k}, \end{aligned}$$

откуда $f\left(a_1^{\alpha_1} \dots a_k^{\alpha_k}\right) = f(a_1)^{\alpha_1} \dots f(a_k)^{\alpha_k}$. Лемма доказана.

Теорема 2.4. *Для любых $x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}$, $y_1^{\beta_1} \dots y_m^{\beta_m} \in FC(X)$ полугруппы $FC_{x_1^{\alpha_1} \dots x_n^{\alpha_n}}(X)$ и $FC_{y_1^{\beta_1} \dots y_m^{\beta_m}}(X)$ изоморфны тогда и только тогда, когда $n = m$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ получается из $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ с помощью перестановки элементов.*

Доказательство. Покажем необходимость. Пусть $x, y \in FC(X)$ и ϕ изоморфизм между $FC_x(X)$ и $FC_y(X)$. Используя лемму 2.3, имеем

$$\phi(x *_x x) = \phi(x) *_y \phi(x) = y\phi(x)^2, \quad \phi(x *_x x) = \phi(x^3) = \phi(x)^3,$$

откуда $\phi(x) = y$. Если $x = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ и $y = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_m^{\beta_m}$, то согласно лемме 2.3

$$\phi(x) = \phi(x_1)^{\alpha_1} \phi(x_2)^{\alpha_2} \dots \phi(x_n)^{\alpha_n} = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_m^{\beta_m}, \tag{5}$$

откуда следует, что $n = m$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ получается из $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ с помощью перестановки элементов.

Покажем достаточность. Пусть $x = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $y = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_n^{\beta_n}$ и $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ получается из $\{\beta_j\}_{j=1}^m$ с помощью перестановки элементов.

Пусть $\tau : X \to X$ — некоторая биекция такая, что

$$\tau(x_i) = y_j \quad (1 \le i \le n),$$

где $j \in \mathbb{N}$ такое, что $\alpha_i = \beta_j$.

Для любых $w_1, w_2, \dots, w_k \in X$ и $\gamma_1, \gamma_2 \dots, \gamma_k \in \mathbb{N}$ определим отображение $\phi : FC_x(X) \to FC_y(X)$ следующим образом:

$$\phi\big(w_1^{\gamma_1} w_2^{\gamma_2} \dots w_k^{\gamma_k}\big) = \tau(w_1)^{\gamma_1} \tau(w_2)^{\gamma_2} \dots \tau(w_k)^{\gamma_k}. \tag{6}$$

Покажем, что ϕ — изоморфизм. Так как $\mathrm{Im}(\phi) = FC(X)$, то ϕ — сюръекция. Поскольку τ инъективно, для всех $v, w \in FC_x(X)$ из $v \neq w$ следует, что $\phi(v) \neq \phi(w)$, т. е. ϕ — биекция.

Для всех $w = w_1^{\gamma_1} w_2^{\gamma_2} \dots w_k^{\gamma_k}, v = v_1^{\delta_1} v_2^{\delta_2} \dots v_m^{\delta_m} \in FC_x(X)$ получаем

$$\begin{aligned}\phi(w *_x v) &= \tau(w_1)^{\gamma_1} \dots \tau(w_k)^{\gamma_k} \tau(x_1)^{\alpha_1} \dots \tau(x_n)^{\alpha_n} \tau(v_1)^{\delta_1} \dots \tau(v_m)^{\delta_m} \\ &= \phi(w)(\tau(x_1)^{\alpha_1} \dots \tau(x_n)^{\alpha_n})\phi(v) = \phi(w) *_y \phi(v),\end{aligned}$$

следовательно, ϕ — изоморфизм. Теорема доказана.

Следствие 2.5. *Если $x, y \in FC(X)$ такие, что $FC_x(X) \cong FC_y(X)$, то каждый изоморфизм из $FC_x(X)$ на $FC_y(X)$ имеет вид* (6).

Доказательство. Пусть $x = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$ и $y = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_m^{\beta_m}$. Из (5) и лемм 2.1, 2.3 следует, что для каждого изоморфизма ϕ из $FC_x(X)$ на $FC_y(X)$ и для любых $a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \dots a_n^{\gamma_n} \in FC_x(X)$ справедливы условия

$$\phi(X) = X,$$

и

$$f\big(a_1^{\gamma_1} a_2^{\gamma_2} \dots a_n^{\gamma_n}\big) = f(a_1)^{\gamma_1} f(a_2)^{\gamma_2} \dots f(a_n)^{\gamma_n},$$
$$\phi(x) = \phi(x_1)^{\alpha_1} \phi(x_2)^{\alpha_2} \dots \phi(x_n)^{\alpha_n} = y_1^{\beta_1} y_2^{\beta_2} \dots y_m^{\beta_m},$$

откуда для всех $1 \le i \le n$ получаем $\phi(x_i) = y_j \in c(y)$ для некоторого j такого, что $\alpha_i = \beta_j$. Все такие отображения имеют вид (6) и из доказательства теоремы 2.4. вытекает, что они являются изоморфизмами. Следствие доказано.

Таким образом, описаны всевозможные изоморфизмы между вариантами свободной коммутативной полугруппы.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Zupnik D.* On interassociativity and related questions // Aequationes Math. 1971. V. 6. P. 141–148.

2. *Drouzy M.* La structuration des ensembles de semigroupes d'ordre 2, 3 et 4 par la relation d'interassociativite. Manuscript, 1986.

3. *Gould M., Linton K. A., Nelson A. W.* Interassociates of monogenic semigroups // Semigroup Forum. 2004. V. 68. P. 186–201.

4. *Hickey J. B.* Semigroups under a sandwich operation // Proc. Edinburgh Math. Soc. 1983. V. 26. P. 371–382.
5. *Hickey J. B.* On variants of a semigroup // Bull. Australian Math. Soc. 1986. V. 34. P. 447–459.
6. *Khan T. A., Lawson M. V.* Variants of regular semigroups // Semigroup Forum. 2001. V. 62. P. 358–374.
7. *Magill K. D.* Semigroup structures for families of functions I. Some homomorphism theorems // J. Austral. Math. Soc. 1967. V. 7. P. 81–94.
8. *Givens B. N., Linton K. A., Rosin A., Dishman L.* Interassociates of the free commutative semigroup on n generators // Semigroup Forum. 2007. V. 74. P. 370–378.
9. *Boyd S. J., Gould M., Nelson A. W.* Interassociativity of semigroups // Proc. Tennessee Topology Conf. Singapore: World Sci., 1997. V. 7. P. 33–51.

Статья поступила 22 июня 2012 г.

Горбатков Александр Борисович
Луганский национальный университет им. Тараса Шевченко,
Институт информационных технологий,
кафедра математического анализа и алгебры,
ул. Оборонная, 2, Луганск 91011
gorbatkov_a@mail.ru