

ОКОЛОВЕРШИННАЯ ЛОКАЛИЗАЦИЯ
СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ ЗАДАЧИ
ДИРИХЛЕ В ТОНКИХ МНОГОГРАННИКАХ

С. А. Назаров

Аннотация. При некоторых геометрических условиях показано, что собственные функции задачи Дирихле для оператора Лапласа в тонком n -мерном многограннике локализуются около одной из вершин. Построены и обоснованы асимптотики собственных чисел и функций. Для волноводов — тонких слоев между периодическими многогранными поверхностями — установлено наличие лагун и найдены асимптотики их геометрических характеристик.

Ключевые слова: задача Дирихле, асимптотика спектра, локализация собственных функций, спектральные лагуны.

1. Постановка задачи и предварительное описание результатов.

Пусть ω — открытый связный ограниченный многогранник в евклидовом пространстве \mathbb{R}^{n-1} , $n \geq 2$, H_{\pm} — кусочно линейные непрерывные функции на ω и

$$\Omega^{\varepsilon} = \{x = (y, z) \in \mathbb{R}^n : y = (y_1, \dots, y_{n-1}) \in \omega, \\ \zeta = \varepsilon^{-1}z \in \Upsilon(y) := (-H_-(y), H_+(y))\}. \quad (1)$$

Кроме того, $\varepsilon > 0$ — малый параметр, и по предположению

$$H(y) = H_+(y) + H_-(y) > 0, \quad y \in \bar{\omega} = \omega \cup \partial\omega, \quad (2)$$

т. е. Ω^{ε} — открытый и связный n -мерный многогранник (рис. 1). Рассмотрим спектральную задачу Дирихле

$$-\Delta_x u^{\varepsilon}(x) = \lambda^{\varepsilon} u^{\varepsilon}(x), \quad x \in \Omega^{\varepsilon}, \quad u^{\varepsilon}(x) = 0, \quad x \in \partial\Omega^{\varepsilon}, \quad (3)$$

вариационная формулировка которой выглядит так:

$$(\nabla_x u^{\varepsilon}, \nabla_x v^{\varepsilon})_{\Omega^{\varepsilon}} = \lambda^{\varepsilon} (u^{\varepsilon}, v^{\varepsilon})_{\Omega^{\varepsilon}} \quad \forall v^{\varepsilon} \in H_0^1(\Omega^{\varepsilon}). \quad (4)$$

Здесь $\Delta_x = \nabla_x \cdot \nabla_x$ — оператор Лапласа, $\nabla_x = \text{grad}$, λ^{ε} — спектральный параметр, $(\cdot, \cdot)_{\Omega^{\varepsilon}}$ — скалярное произведение в пространстве Лебега $L_2(\Omega^{\varepsilon})$, скалярном или векторном, а $H_0^1(\Omega^{\varepsilon})$ — подпространство функций из класса Соболева $H^1(\Omega^{\varepsilon})$, обращающихся в нуль на поверхности $\partial\Omega^{\varepsilon}$. Задаче (4) отвечает последовательность собственных чисел

$$0 < \lambda_1^{\varepsilon} < \lambda_2^{\varepsilon} \leq \lambda_3^{\varepsilon} \leq \dots \leq \lambda_j^{\varepsilon} \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (5)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 12-01-00348).

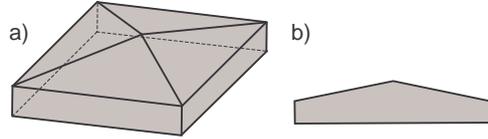


Рис. 1. Тонкий многогранник и изображающая его двумерная фигура.

занумерованных при учете кратностей, а соответствующие собственные функции $u_1^\varepsilon, u_2^\varepsilon, u_3^\varepsilon, \dots, u_j^\varepsilon, \dots \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ можно подчинить условиям ортогональности и нормировки

$$(u_j^\varepsilon, u_k^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}, \quad (6)$$

где $\delta_{j,k}$ — символ Кронекера, $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, \dots\}$ — натуральный ряд.

Основная цель работы — построить и обосновать асимптотику собственных чисел и функций, а также проследить для последних *эффект локализации* в предположении, что функция толщины (2) имеет единственный глобальный строгий максимум в точке $y^0 \in \omega$,

$$H(y) < H(y^0) \quad \text{при } y \in \bar{\omega}, \quad y \neq y^0, \quad (7)$$

$$H(y) = H(y^0) + rh(\varphi), \quad y \in \mathcal{V}, \quad (8)$$

где \mathcal{V} — некоторая окрестность точки y^0 , (r, φ) — система сферических координат в \mathbb{R}^{n-1} с центром y^0 , $r = |y - y^0|$, а h — кусочно гладкая и положительная в силу требования (7) функция на единичной сфере $\mathbb{S}^{n-2} \ni \varphi$. Далее обозначаем

$$H_0 = H(y^0) > 0, \quad h_0 = \min\{h(\varphi) \mid \varphi \in \mathbb{S}^{n-2}\} > 0. \quad (9)$$

Многогранник взят в качестве сечения ω тонкой области (1) исключительно для того, чтобы сделать однотипными формы оснований и боковой поверхности. Установленный эффект локализации собственных функций показывает, что строение множества Ω^ε на удалении от точки $(y^0, 0)$ не играет никакой роли.

В задаче Дирихле на тонкой области эффект локализации собственных функций, заключающийся в экспоненциальном их затухании при удалении от множества малого диаметра, встречается достаточно часто: упомянем статьи [1–3] и [4–7]. В первой группе статей этот эффект был обнаружен около нескольких точек скошенной поверхности трехмерной пластины и около искривленного торца многомерного стержня, а во второй, имеющей прямое отношение к предмету настоящей работы, рассматривались тонкие области, двумерные [4–6] и многомерные [7], а локализация собственных функций происходила в окрестности точки глобального максимума гладкой функции толщины, по предположению единственного и строгого. Во всех цитированных работах, за исключением [3], где обсуждаемый эффект вызван появлением экспоненциально затухающего решения у предельной задачи в полубесконечном цилиндре с искривленным торцом, асимптотика собственных чисел и функций конструируется из решений обыкновенного дифференциального уравнения о гармоническом осцилляторе:

$$-\partial_\eta^2 w(\eta) + A\eta^2 w(\eta) = \mu w(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R},$$

где $A > 0$ и μ — спектральный параметр, или его многомерного аналога. В рассматриваемой задаче (3) эффект локализации также описывается при помощи

«быстрой» переменной η (см. далее определение (14), (19)), однако возникающую в п. 2 предельную задачу следует считать многомерным аналогом уравнения Эйри: в случае $n = 2$, $h = h_0$ она принимает вид

$$-\partial_\eta^2 w(\eta) + Ah_0|\eta|w(\eta) = \mu w(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}, \quad (10)$$

где $A = 2\pi^2 H_0^{-3}$. Уравнение (10) обладает дискретным спектром, а его собственные функции исчезают на бесконечности со скоростью $O(e^{-A^{1/2}|\eta|^{3/2}})$ (см., например, [8]). Далее в п. 2 выводится похожее на (10), но с множителем $A|\eta|h(\varphi)$ предельное дифференциальное уравнение в частных производных на $\mathbb{R}^{n-1} \ni \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{n-1})$, исследуется его спектр (дискретный) и проверяется свойство экспоненциального затухания собственных функций на бесконечности (лемма 1). При помощи аналогичных технических приемов в п. 3 (лемма 2) выводятся весовые (с экспоненциально большими вне окрестности точки y^0 множителями) оценки собственных функций исходной задачи (4) (или (3) в дифференциальной форме). Эти оценки позволяют далее обосновать асимптотику, построенную формально в п. 2: сначала в п. 4 получен первичный результат о сходимости (теорема 3), а затем в п. 5 установлена окончательная оценка остатка (теорема 5).

В п. 6 перечисляются возможные, в значительной степени очевидные, обобщения, связанные с изменением краевого условия на одном из оснований Σ_\pm^ε или на боковой поверхности Σ_0^ε тонкой «пластины» (1),

$$\Sigma_\pm^\varepsilon = \{x : y \in \omega, z = \pm \varepsilon H_\pm(y)\}, \quad \Sigma_0^\varepsilon = \{x : y \in \partial\omega, -\varepsilon H_-(y) < z < \varepsilon H_+(y)\}. \quad (11)$$

Кроме того, реализуется идея [4] о раскрытии лагун в спектре задачи Дирихле для оператора Лапласа на периодическом слое

$$\Pi^\varepsilon = \{x : y \in \mathbb{R}^{n-1}, -\varepsilon H_-(y) < z < \varepsilon H_+(y)\}; \quad (12)$$

здесь H_\pm — непрерывные кусочно линейные функции, периодические (с периодами $l_q > 0$ по переменным y_q) и удовлетворяющие условиям (2), (7)–(9) в случае

$$\omega = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : 0 < y_q < l_q, q = 1, \dots, n-1\}. \quad (13)$$

Отметим, что методы исследования из [4, 5] и [6, 7] требуют гладкости профильных функций, так что в двумерном случае $n = 2$ результат настоящей работы также новый.

В завершение сформулированы несколько вопросов, которые автор вынужден оставить без ответов.

2. Формальный асимптотический анализ и спектр предельной задачи. Для описания явления пограничного слоя вблизи точки $x^0 = (y^0, 0)$ введем растянутые координаты

$$\eta = \varepsilon^{-\gamma}(y - y^0) \quad (14)$$

с некоторым показателем $\gamma > 0$ и примем следующие асимптотические анзацы:

$$\lambda_m^\varepsilon = \pi^2 H_0^{-2} \varepsilon^{-2} + \mu_m \varepsilon^{-2\gamma} + \dots, \quad (15)$$

$$u_m^\varepsilon(x) = \alpha_m(\varepsilon) \sin\left(\pi \frac{z + \varepsilon H_-(y)}{\varepsilon H(y)}\right) w_m(\eta) + \dots \quad (16)$$

Многоточие заменяет младшие асимптотические члены, несущественные для предприняемого анализа, а $\alpha_m(\varepsilon)$ — некоторый нормирующий коэффициент. Далее для краткости не пишем индекс m у собственных чисел и функций, а множитель $\sin(\dots)$ из (16) обозначаем через $S_\varepsilon(y, z)$. Подставим разложения (15) и (16) в задачу (3) и произведем формальное (без учета гладкости функций H_\pm) дифференцирование. Имеем

$$\Delta_x u^\varepsilon(x) + \lambda^\varepsilon u^\varepsilon(x) = \alpha_m(\varepsilon) S_\varepsilon(y, z) \left(-\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H(y)^2} w(\eta) + \varepsilon^{2\gamma} \Delta_\eta w(\eta) + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} w(\eta) + \varepsilon^{2\gamma} \mu w(\eta) \right) + \dots \quad (17)$$

Благодаря требованию (8) в окрестности $\mathcal{V} \ni y^0$ верна формула

$$\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2} = \frac{1 - (1 - rH_0^{-1}h(\varphi))^2}{H_0^2 + \dots} = \frac{2}{H_0^3} rh(\varphi) + \dots = \frac{2\varepsilon^\gamma}{H_0^3} |\eta| h(\varphi) + \dots \quad (18)$$

Таким образом, в правой части (17) заведомо исчезает слагаемое $O(\varepsilon^{-2})$, но при условии

$$\varepsilon^{-2}\varepsilon^\gamma = \varepsilon^{-2\gamma} \Rightarrow \gamma = 2/3 \quad (19)$$

обращается в нуль и слагаемое $O(\varepsilon^{-4/3})$, если только выполнено дифференциальное уравнение

$$-\Delta_\eta w(\eta) + a(\eta)w(\eta) = \mu w(\eta), \quad \eta \in \mathbb{R}^{n-1}, \quad (20)$$

где μ — новый спектральный параметр, пришедший из анзаца (15), $\rho = |\eta|$, и в силу соотношений (18), (8)

$$a(\eta) = 2\pi^2 H_0^{-3} \rho h(\varphi) \geq c_a \rho, \quad c_a > 0. \quad (21)$$

Объявим (20) предельной задачей и исследуем ее спектр.

После умножения уравнения (20) на пробную функцию $v \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$, бесконечно дифференцируемую и имеющую компактный носитель, и интегрирования по частям приходим к вариационной формулировке предельной задачи

$$\langle w, v \rangle := (\nabla_\eta w, \nabla_\eta v) + (aw, v) = \mu(w, v) \quad \forall v \in \mathcal{H}, \quad (22)$$

при этом $(\cdot, \cdot) = (\cdot, \cdot)_{\mathbb{R}^{n-1}}$, а \mathcal{H} — гильбертово пространство, которое получено пополнением линейного множества $C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})$ по норме, порожденной скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$. В силу соотношения (21) находим, что

$$\langle w, v \rangle \geq c_{\mathcal{H}} (\|\nabla_\eta w\|^2 + \|(1 + \rho)^{1/2} w\|^2), \quad c_{\mathcal{H}} > 0, \quad (23)$$

здесь и далее $\|W\| = \|W; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\|$. Таким образом, пространство \mathcal{H} состоит из тех функций $w \in H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}^{n-1})$, для которых конечны нормы, указанные в правой части (23). Вложение $\mathcal{H} \subset L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ компактно: его оператор можно представить как сумму компактного — на шаре $\mathbb{B}_R^{n-1} = \{\eta : |\eta| < R\}$ — и малого — на внешности шара, поскольку

$$\|w; L_2(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathbb{B}_R^{n-1})\|^2 \leq c_a^{-1} R^{-1} (aw, w) \leq c_a^{-1} R^{-1} \|w; \mathcal{H}\|^2.$$

В итоге по теоремам 10.1.5 и 10.2.2 из [7] спектр задачи (22) оказывается дискретным и образует неограниченную последовательность собственных чисел:

$$0 < \mu_1 < \mu_2 \leq \mu_3 \leq \dots \leq \mu_j \leq \dots \rightarrow +\infty, \quad (24)$$

составленную при учете кратностей. Как обычно, первое собственное число простое, а соответствующую собственную функцию w_1 можно взять положительной. Она и другие собственные функции допускают следующие условия ортогональности и нормировки:

$$(w_j, w_k) = \delta_{j,k}, \quad j, k \in \mathbb{N}. \quad (25)$$

Лемма 1. При некотором $\delta > 0$ и любом $j \in \mathbb{N}$ верны весовые оценки

$$\|E_\delta \nabla_\eta w_j\| + \|(1 + \rho)^{1/2} E_\delta w_j\| \leq C_j(\delta), \quad (26)$$

в которых $E_\delta(\eta) = e^{\delta(1+\rho^2)^{3/4}}$, а $C_j(\delta)$ — величина, зависящая только от μ_j и δ .

Доказательство. Введем непрерывную ограниченную весовую функцию

$$E_\delta^t(\eta) = \begin{cases} E_\delta(\rho) & \text{при } \rho \leq t, \\ E_\delta(t) & \text{при } \rho \geq t, \end{cases} \quad (27)$$

где $t > 0$ — параметр, который будет устремлен к бесконечности. Заметим, что

$$E_\delta^t(\eta) \leq E_\delta(t) = \text{const}, \quad |\nabla_\eta E_\delta^t(\rho)| \leq \frac{3}{2} \delta \sqrt{\rho} E_\delta^t(\rho).$$

Поэтому, в частности, функция $v = E_\delta^t W_j$, где $W_j = E_\delta^t w_j$, по-прежнему принадлежит пространству \mathcal{H} . Подставив ее в качестве пробной функции в интегральное тождество (20) для спектральной пары $\{\mu_j, w_j\}$, находим

$$\begin{aligned} \mu_j \|W_j\|^2 &= (\nabla_\eta w_j, \nabla_\eta (E_\delta^t W_j)) + (a W_j, W_j) = (E_\delta^t \nabla_\eta w_j, \nabla_\eta W_j) \\ &+ (E_\delta^t \nabla_\eta w_j, W_j (E_\delta^t)^{-1} \nabla_\eta E_\delta^t) + (a W_j, W_j) = \|\nabla_\eta W_j\|^2 - (W_j (E_\delta^t)^{-1} \nabla_\eta E_\delta^t, \nabla_\eta W_j) \\ &+ (\nabla_\eta W_j, W_j (E_\delta^t)^{-1} \nabla_\eta E_\delta^t) - \|W_j (E_\delta^t)^{-1} \nabla_\eta E_\delta^t\|^2 + (a W_j, W_j). \end{aligned} \quad (28)$$

Подчеркнем, что все интегралы сходятся абсолютно, а второе и третье слагаемые в правой части взаимно уничтожаются. Теперь, используя оценки (21), (23) и условие нормировки (25), при помощи несложных преобразований обнаруживаем, что

$$\begin{aligned} E_\delta^t(R)^2 \mu_j &\geq \mu_j \|W_j; L_2(\mathbb{B}_R^{n-1})\|^2 \\ &= \|\nabla_\eta W_j\|^2 - \|W_j (E_\delta^t)^{-1} \nabla_\eta E_\delta^t\|^2 + (a W_j, W_j) - \mu_j \|W_j; L_2(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathbb{B}_R^{n-1})\|^2 \\ &\geq \langle W_j, W_j \rangle - \frac{9}{4} \delta^2 \|\sqrt{\rho} W_j\|^2 - \mu_j \|W_j; L_2(\mathbb{R}^{n-1} \setminus \mathbb{B}_R^{n-1})\|^2 \\ &\geq \langle W_j, W_j \rangle - c_a^{-1} \left(\frac{9}{4} \delta^2 + \frac{\mu_j}{R} \right) (a W_j, W_j) \geq \left(1 - c_a^{-1} \left(\frac{9}{4} \delta^2 + \frac{\mu_j}{R} \right) \right) \|W_j; \mathcal{H}\|^2. \end{aligned}$$

Фиксируя малый показатель δ и большой радиус R , приходим к неравенству

$$\|E_\delta^t \nabla_\eta w_j\|^2 + \|(1 + \rho)^{1/2} E_\delta^t w_j\|^2 \leq c \|W_j; \mathcal{H}\|^2 \leq C_j. \quad (29)$$

Левая часть (29) равномерно ограничена и монотонно возрастает при $t \rightarrow +\infty$, а значит, в силу определения (27) предельный переход переделывает формулу (29) в нужное неравенство (26). \square

Поскольку функции $E_\delta a w_j$, $\mu_j E_\delta w_j$ попадают в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$, при помощи локальных оценок решений уравнений Пуассона нетрудно убедиться в том, что $E_{\delta/2} w_j \in H^2(\mathbb{R}^{n-1})$.

3. Весовая оценка собственных функций. Проверка очередного утверждения опирается на тот же прием (28), что и в доказательстве леммы 1.

Лемма 2. Пусть

$$0 \leq \delta < \frac{2}{3}\pi H_0^{-3/2} h_0^{1/2} \quad (30)$$

и при некотором $j \in \mathbb{N}$ выполнено неравенство

$$\lambda_j^\varepsilon \leq \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} + \Lambda_j \varepsilon^{-4/3}, \quad (31)$$

где $\Lambda_j > 0$ — некоторое число. Тогда найдутся такие положительные $\varepsilon_j(\delta)$ и $c_j(\delta)$, что при $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j(\delta)]$ собственная функция u_j^ε , нормированная равенством (6), удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{E}_\delta(y)^2 (\varepsilon^{4/3} |\nabla_y u_j^\varepsilon(x)|^2 + (1 + \varepsilon^{-2/3} |y - y^0|) |u_j^\varepsilon(x)|^2) dx \leq c_j(\delta), \quad (32)$$

где \mathcal{E}_δ — весовая функция,

$$\mathcal{E}_\delta(y) = \begin{cases} e^{\delta r^{3/2}/\varepsilon} & \text{при } r \leq R, \\ e^{\delta R^{3/2}/\varepsilon} & \text{при } r \geq R, \end{cases} \quad (33)$$

а $R > 0$ — подходящий радиус.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Подставим пробную функцию $v^\varepsilon = \mathcal{E}_\delta U_j^\varepsilon = \mathcal{E}_\delta^2 u_j^\varepsilon$ в тождество (4) и не будем далее писать индекс j . Повторив с незначительными изменениями выкладку (28), получаем, что

$$\lambda^\varepsilon \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \|U^\varepsilon \mathcal{E}_\delta^{-1} \nabla_y \mathcal{E}_\delta; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \quad (34)$$

В силу определения (33) имеем

$$|\nabla_y \mathcal{E}_\delta(y)| \leq \begin{cases} 3 \int \delta \varepsilon^{-1} r^{1/2} \mathcal{E}_\delta(y), & x \in \Omega_R^\varepsilon, \\ 0, & x \in \Omega^\varepsilon \setminus \Omega_R^\varepsilon, \end{cases} \quad (35)$$

где $\Omega_R^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon : y \in \mathbb{B}_R^{n-1}(y^0)\}$ и $\mathbb{B}_R^{n-1}(y^0) = \{y \in \mathbb{R}^{n-1} : |y - y^0| < R\}$. При учете требований (2) и (7), (8) зафиксируем R так, чтобы выполнялось формула

$$\frac{\pi^2}{H(y)^2} - \frac{\pi^2}{H_0^2} \geq \begin{cases} (t + 9\delta^2/4)r & \text{при } y \in \mathbb{B}_R^{n-1}(y^0), \\ T & \text{при } y \in \omega \setminus \mathbb{B}_R^{n-1}(y^0) \end{cases} \quad (36)$$

с некоторыми положительными t и T (напоминаем про принятые условия (9), (30) и проделанное преобразование (18) — именно они обеспечивают возможность добиться выполнения соотношений (36)). Неравенство Фридрикса

$$\int_{-\varepsilon H_-(y)}^{\varepsilon H_+(y)} |\partial_z U^\varepsilon(y, z)|^2 dz \geq \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H(y)^2} \int_{-\varepsilon H_-(y)}^{\varepsilon H_+(y)} |U^\varepsilon(y, z)|^2 dz, \quad (37)$$

проинтегрированное по $y \in \omega$, показывает, что

$$\|\partial_z U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \geq \pi^2 \varepsilon^{-2} \|H^{-1} U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \geq \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2. \quad (38)$$

В результате, принимая во внимание предположение (31), превращаем формулу (34) в цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \varepsilon^{-4/3} \Lambda \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 &\geq \|\nabla_x U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \|U^\varepsilon \mathcal{E}_\delta^{-1} \nabla_y \mathcal{E}_\delta; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \\ &\geq \|\nabla_y U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \\ &+ \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\Omega_R^\varepsilon} \left(\frac{\pi^2}{H(y)^2} - \frac{\pi^2}{H_0^2} - \frac{9}{4} \delta^2 r \right) |U^\varepsilon(x)|^2 dx + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_R^\varepsilon} \left(\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2} \right) |U^\varepsilon(x)|^2 dx \\ &\geq \|\nabla_y U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{-2} t \|r^{1/2} U^\varepsilon; L_2(\Omega_R^\varepsilon)\|^2 + \varepsilon^{-2} T \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_R^\varepsilon)\|^2. \end{aligned} \quad (39)$$

Заметим, что $2\Lambda \leq \varepsilon^{-2/3}T$ при малом $\varepsilon > 0$ и

$$2\Lambda \leq t\varepsilon^{-2/3}r \text{ при } r \geq \varepsilon^{2/3}\varrho := \varepsilon^{2/3}2\Lambda t^{-1}, \quad e^{\delta\varepsilon^{-1}r^{3/2}} \leq C_\delta := e^{\delta\varrho^{3/2}} \text{ при } r \leq \varepsilon^{2/3}\varrho.$$

Поскольку $\|u^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\| = 1$, выводим из цепочки (39) (без средней ее части), что

$$\begin{aligned} C_\delta^2 \varepsilon^{-4/3} \Lambda &\geq \varepsilon^{-4/3} \|U^\varepsilon; L_2(\Omega_{\varepsilon^{2/3}\varrho}^\varepsilon)\|^2 \geq \|\nabla_y U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \\ &\quad + \varepsilon^{-2} t \|r^{1/2} U^\varepsilon; L_2(\Omega_R^\varepsilon)\|^2 - \varepsilon^{-4/3} \Lambda \|U^\varepsilon; L_2(\Omega_R^\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon^{2/3}\varrho}^\varepsilon)\|^2 \\ &\quad + \varepsilon^{-2} T \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_R^\varepsilon)\|^2 - \varepsilon^{-4/3} \Lambda \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_R^\varepsilon)\|^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} t \|r^{1/2} U^\varepsilon; L_2(\Omega_R^\varepsilon)\|^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{-2} T \|U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_R^\varepsilon)\|^2 \geq \varepsilon^{-2} \tau \|r^{1/2} U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2, \end{aligned} \tag{40}$$

здесь τ — некоторое положительное число. Следовательно,

$$\begin{aligned} \|\mathcal{E}_\delta u^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 &= \|\mathcal{E}_\delta u^\varepsilon; L_2(\Omega_{\varepsilon^{2/3}\varrho}^\varepsilon)\|^2 + \|\mathcal{E}_\delta u^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon^{2/3}\varrho}^\varepsilon)\|^2 \\ &\leq C_\delta^2 \|u^\varepsilon; L_2(\Omega^2(\varrho))\|^2 + \varepsilon^{-2/3} \varrho^{-1} \|r^{1/2} U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon \setminus \Omega_{\varepsilon^{2/3}\varrho}^\varepsilon)\|^2 \leq C_\delta^2 + C_\delta^2 \Lambda \tau^{-1} \varrho^{-1}. \end{aligned} \tag{41}$$

Благодаря неравенству (35) выполнено соотношение

$$\|\mathcal{E}_\delta \nabla_y u^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\| \leq 2 \|\nabla_y U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + c\varepsilon^{-2} \|r^{1/2} U^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2.$$

Осталось обработать его правую часть при помощи оценок (39)–(41). \square

Поскольку весовая функция экспоненциально возрастает при удалении от точки y^0 , неравенство (32) устанавливает экспоненциальную малость собственной функции u_j^ε вне всякой фиксированной окрестности точки максимума толщины H .

4. Теорема о сходимости. В п. 5 будет показано, что соотношение (31) с некоторой величиной $\Lambda_j > 0$ верно при всех $j \in \mathbb{N}$ и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_j]$, здесь $\varepsilon_j > 0$. Для собственной функции u_j^ε задачи (4) положим

$$\overline{u_j^\varepsilon}(y) = \frac{2}{\varepsilon H(y)} \int_{\Upsilon^\varepsilon(y)} S_\varepsilon(y, z) u_j^\varepsilon(y, z) dz, \quad y \in \mathcal{V}, \tag{42}$$

где S_ε — множитель $\sin(\dots)$ из анзаца (16), причем

$$S_\varepsilon(y, z) > 0 \text{ при } z \in \Upsilon^\varepsilon(y) = (-\varepsilon H_-(y), \varepsilon H_+(y)), \quad 2 \|S_\varepsilon; L_2(\Upsilon^\varepsilon(y))\|^2 = \varepsilon H(y). \tag{43}$$

Благодаря оценке (32) имеем

$$\begin{aligned} &\int_\omega \mathcal{E}_\delta(y)^2 r |\overline{u_j^\varepsilon}(y)|^2 dy \\ &\leq \frac{4}{\varepsilon^2} \int_\omega \mathcal{E}_\delta(y)^2 \frac{r}{H(y)^2} \int_{\Upsilon^\varepsilon(y)} S_\varepsilon(y, z)^2 dz \int_{\Upsilon^\varepsilon(y)} |u_j^\varepsilon(y, z)|^2 dz dy \\ &\leq \frac{c}{\varepsilon} \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{E}_\delta(y)^2 r |u_j^\varepsilon(x)|^2 dx \leq \frac{c_j}{\varepsilon^{1/3}}. \end{aligned} \tag{44}$$

Дифференцируя равенство (42) при учете краевых условий $u_j^\varepsilon(y, \pm\varepsilon H_\pm(y)) = 0$, находим

$$\begin{aligned} \nabla_y \overline{u_j^\varepsilon}(y) &= \overline{\nabla_y u_j^\varepsilon}(y) - H(y)^{-1} \nabla_y H(y) \overline{u_j^\varepsilon}(y) + \mathcal{U}_j^\varepsilon(y, z), \\ \mathcal{U}_j^\varepsilon(y) &= \frac{2\pi}{\varepsilon H(y)^3} \int_{\Gamma^\varepsilon(y)} \left(H(y) \nabla_y H_-(y) - \left(\frac{z}{\varepsilon} + H_-(y) \right) \nabla_y H(y) \right) C_\varepsilon(y, z) u_j^\varepsilon(y, z) dz. \end{aligned} \tag{45}$$

Здесь $C_\varepsilon(y, z)$ — выражение $S_\varepsilon(y, z)$ с \cos на месте \sin . Применяв лемму 2, получим формулы

$$\begin{aligned} \int_\omega \mathcal{E}_\delta(y)^2 |\overline{\nabla_y u_j^\varepsilon}(y)|^2 dy &\leq c \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{E}_\delta(y)^2 |\nabla_y u_j^\varepsilon(x)|^2 dx \leq c_j \varepsilon^{-7/3}, \\ \int_\omega \mathcal{E}_\delta(y)^2 \left(\frac{|\nabla_y H(y)|^2}{H(y)^2} |\overline{u_j^\varepsilon}(y)|^2 + |\mathcal{U}_j^\varepsilon(y)|^2 \right) dy &\leq c \int_{\Omega^\varepsilon} \mathcal{E}_\delta(y)^2 |u_j^\varepsilon(x)|^2 dx \leq \frac{c_j}{\varepsilon}. \end{aligned} \tag{46}$$

Введем на всем пространстве \mathbb{R}^{n-1} функцию

$$\overline{w_j^\varepsilon}(y) = \varepsilon^{\frac{1}{3}(n-1) + \frac{1}{2}} \beta_j(\varepsilon) \chi(y^0 + \varepsilon^{2/3} \eta) \overline{u_j^\varepsilon}(y^0 + \varepsilon^{2/3} \eta), \tag{47}$$

где $\beta_j(\varepsilon)$ — нормирующий множитель, подлежащий определению, но заранее подчиненный условию

$$0 < \beta_j^- \leq \beta_j(\varepsilon) \leq \beta_j^+, \tag{48}$$

а $\chi \in C_c^\infty(\mathcal{Y})$ — срезка, равная единице в окрестности точки y^0 . В силу проведенных оценок имеем

$$\begin{aligned} \|\overline{w_j^\varepsilon}; \mathcal{H}\|^2 &= \varepsilon^{\frac{2}{3}(n-1) + 1} \int_{\mathcal{Y}} \left(\varepsilon^{4/3} |\nabla_y (\chi(y) \overline{u_j^\varepsilon}(y))|^2 + \varepsilon^{-2/3} r |\chi(y) \overline{u_j^\varepsilon}(y)|^2 \right) dy \varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)} \\ &\leq c \int_{\mathcal{Y}} \left(\varepsilon^{7/3} |\nabla_y \overline{u_j^\varepsilon}(y)|^2 + \varepsilon^{1/3} r |\overline{u_j^\varepsilon}(y)|^2 \right) dy \leq c_j. \end{aligned} \tag{49}$$

Таким образом, согласно неравенствам (31) и (49) найдется бесконечно малая положительная последовательность $\{\varepsilon_p\}$, вдоль которой имеют место сходимости

$$\mu_j^\varepsilon := \varepsilon^{4/3} (\lambda_j^\varepsilon - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2}) \rightarrow \overline{\mu}_j^0, \tag{50}$$

$$\overline{w_j^\varepsilon} \rightarrow \overline{w}_j^0 \text{ слабо в } \mathcal{H} \text{ и сильно в } L_2(\mathbb{R}^{n-1}). \tag{51}$$

Далее в п. 5 будет проверено, что за счет нормирующего множителя (48) можно соблюсти требование $\|\overline{w}_j^\varepsilon; \mathcal{H}\| = 1$. Таким образом, $\|\overline{w}_j^0; \mathcal{H}\| = 1$ в силу последней (сильной) сходимости. Ближайшая цель — убедиться в том, что $\{\overline{\mu}_j^0, \overline{w}_j^0\}$ — собственная пара предельной задачи (22).

Сначала получим вспомогательную оценку для разности

$$u_j^{\varepsilon\perp}(y, z) = u_j^\varepsilon(y, z) - S_\varepsilon(y, z) \overline{u_j^\varepsilon}(y), \quad \int_{\Gamma^\varepsilon(y)} S_\varepsilon(y, z) u_j^{\varepsilon\perp}(y, z) dz = 0. \tag{52}$$

Последнее условие ортогональности, вытекающее из самого определения и второго соотношения (43), обеспечивает неравенство Пуанкаре

$$\int_{-\varepsilon H_-(y)}^{\varepsilon H_+(y)} \left| \frac{\partial u_j^{\varepsilon\perp}}{\partial z}(y, z) \right|^2 dz \leq \frac{4\pi^2}{\varepsilon^2 H(y)^2} \int_{-\varepsilon H_-(y)}^{\varepsilon H_+(y)} |u_j^{\varepsilon\perp}(y, z)|^2 dz,$$

которое влечет за собой оценку

$$4\pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} \|u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq 4\pi^2 \varepsilon^{-2} \|H^{-1}u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq \|\partial_z u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2$$

(ср. формулы (37), (38)). Подчеркнем, что $4\pi^2 \varepsilon^{-2} H(y)^{-2}$ — второе собственное число задачи Дирихле на отрезке $\Upsilon^\varepsilon(y)$, причем S_ε — собственная функция, отвечающая первому собственному числу $\pi^2 \varepsilon^{-2} H(y)^{-2}$. Обработаем правую часть соотношения

$$\begin{aligned} \lambda_j^\varepsilon &= \lambda_j^\varepsilon \|u_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \|\nabla_x u_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \\ &= \|\nabla_y u_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \|\partial_z (u_j^{\varepsilon\perp} + \bar{u}_j^\varepsilon S_\varepsilon); L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \\ &= \|\nabla_y u_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \|\partial_z u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \|\bar{u}_j^\varepsilon S_\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + 2I^\varepsilon. \end{aligned}$$

В силу оценки (32) с показателем $\delta = 0$ имеем $\|\nabla_y u_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c_j \varepsilon^{-4/3}$. Кроме того,

$$\begin{aligned} I^\varepsilon &:= \int_{\Omega^\varepsilon} \bar{u}_j^\varepsilon(y) \partial_z S_\varepsilon(x) \partial_z u_j^{\varepsilon\perp}(x) dx = - \int_{\Omega^\varepsilon} \bar{u}_j^\varepsilon(y) u_j^{\varepsilon\perp}(x) \partial_z^2 S_\varepsilon(x) dx \\ &= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^\varepsilon} \frac{1}{H(y)^2} \bar{u}_j^\varepsilon(y) u_j^{\varepsilon\perp}(y, z) S_\varepsilon(y, z) dy dz \\ &= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2} \right) \bar{u}_j^\varepsilon(y) u_j^{\varepsilon\perp}(y, z) S_\varepsilon(y, z) dy dz, \end{aligned}$$

$$|I^\varepsilon| \leq c \varepsilon^{-2} \|r \bar{u}_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\| \|u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\| \leq c_j \varepsilon^{-5/3} \|u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|.$$

Пояснение: сначала учли, что функция $z \mapsto S_\varepsilon(y, z)$ гладкая (хотя у $\nabla_y S_\varepsilon(y, z)$ разрывы есть), затем приписали вычитаемое H_0^{-2} , исходя из условия ортогональности (52), и, наконец, опять применили оценку (32) с $\delta = 0$. Заметим, что та же оценка обеспечивает формулы

$$\begin{aligned} \|\bar{u}_j^\varepsilon \partial_z S_\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 &= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \int_{\omega} \frac{1}{H(y)^2} |\bar{u}_j^\varepsilon(y)|^2 \int_{\Upsilon^\varepsilon(y)} C_\varepsilon(y, z)^2 dz dy \\ &= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \int_{\omega} \frac{1}{H(y)^2} |\bar{u}_j^\varepsilon(y)|^2 \int_{\Upsilon^\varepsilon(y)} S_\varepsilon(y, z)^2 dz dy = \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} \|S_\varepsilon \bar{u}_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + J^\varepsilon, \\ |J^\varepsilon| &= \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \left| \int_{\Omega^\varepsilon} \left(\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2} \right) S_\varepsilon(x)^2 |\bar{u}_j^\varepsilon(x)|^2 dx \right| \leq \frac{c}{\varepsilon^2} \int_{\Omega^\varepsilon} r |\bar{u}_j^\varepsilon(x)|^2 dx \leq \frac{c}{\varepsilon^{4/3}}. \end{aligned}$$

Собирая приведенные неравенства, имеем

$$\begin{aligned} \frac{3\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} \|u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 &\leq \|\partial_z u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} \|u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \\ &\leq \lambda_j^\varepsilon - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} (\|S_\varepsilon \bar{u}_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \|u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2) - 2I^\varepsilon - J^\varepsilon. \end{aligned}$$

При этом

$$\|S_\varepsilon \bar{u}_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 + \|u_j^{\varepsilon\perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = \|u_j^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 = 1 \tag{53}$$

в силу соотношений (6) и (52), а значит, при учете (31) обнаруживаем, что

$$\|u_j^{\varepsilon \perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c_j \varepsilon^2 \varepsilon^{-4/3} = c_j \varepsilon^{2/3}. \tag{54}$$

При помощи формул (8), (44) и (53), (32), (33) выводим, что

$$\begin{aligned} \left\| S_\varepsilon \overline{u}_j^\varepsilon; L^2(\Omega^\varepsilon) \right\|^2 - \varepsilon \frac{H_0}{2} \int_\omega |\overline{u}_j^\varepsilon(y)|^2 dy &= \frac{\varepsilon}{2} \int_\omega rh(\varphi) |\overline{u}_j^\varepsilon(y)|^2 dy \\ &\leq c\varepsilon \|r^{1/2} \overline{u}_j^\varepsilon; L_2(\omega)\|^2 \leq c\varepsilon^{3/2}, \\ \varepsilon \frac{H_0}{2} \|\overline{u}_j^\varepsilon; L_2(\omega)\|^2 &\geq 1 - \|u_j^{\varepsilon \perp}; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 - c_j \varepsilon^{2/3} \geq 1 - C_j \varepsilon^{2/3}, \\ \|(1 - \chi^2)^{1/2} \overline{u}_j^\varepsilon; L_2(\omega)\|^2 &\leq c e^{-\delta R^{3/2}/\varepsilon} \|\overline{u}_j^\varepsilon; L_2(\omega)\|^2 \leq C \varepsilon^{-1} e^{-\delta R^{3/2}/\varepsilon}. \end{aligned}$$

Следовательно, верно соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} |\overline{w}_j^\varepsilon(\eta)|^2 d\eta = \varepsilon \int_\omega \chi(y)^2 |\overline{u}_j^\varepsilon(y)|^2 dy = \frac{2}{H_0} + O(\varepsilon^{2/3}),$$

которое гарантирует выполнение условий (48) для нормирующего множителя $\beta_j(\varepsilon)$ в определении (47).

Подставим в интегральное тождество (4) для спектральной пары $\{\lambda_j^\varepsilon, u_j^\varepsilon\}$ специально подобранную пробную функцию

$$v^\varepsilon(x) = \beta_j(\varepsilon) \varepsilon^{-\frac{n}{3} + \frac{7}{6}} (2H_0)^{-1} \chi(y) V(\varepsilon^{-2/3}(y - y^0)) S_\varepsilon(y, z), \quad V \in C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}), \tag{55}$$

и перейдем к пределу при $\varepsilon = \varepsilon_p \rightarrow +0$ с целью вывести равенство

$$\bar{\mu}_j^0(\overline{w}_j^0, V) - (a\overline{w}_j^0, V) = (\nabla_\eta \overline{w}_j^0, \nabla_\eta V), \tag{56}$$

которое как раз и означает, что $\bar{\mu}_j^0$ — собственное число, а \overline{w}_j^0 — соответствующая собственная функция предельной задачи (22) (напоминаем, что предел (51) нормирован в пространстве Лебега $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$). Для обработки интегрального тождества

$$\lambda_j^\varepsilon (u_j^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - (\partial_z u_j^\varepsilon, \partial_z v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = (\nabla_y u_j^\varepsilon, \nabla_y v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \tag{57}$$

будем использовать полученные ранее оценки, в частности весовую (32). Благодаря присутствию в ней экспоненциального множителя (33), удовлетворяющего соотношениям

$$\sup_{y \in \omega} (r^k \mathcal{E}_\delta(y)^{-1}) \leq c_k \varepsilon^{2k/3}, \quad k > 0, \quad \sup_{y \in \omega} |\mathcal{E}_\delta(y)^{-1} \nabla_y \chi(y)| \leq c_\omega \varepsilon^{-\delta_\omega/\varepsilon} \tag{58}$$

с положительными c_k и c_ω , δ_ω (в последнем случае заметили, что носитель функции $|\nabla_y \chi|$ отделен от точки y^0), будет нетрудно перенести множители χ и S_ε от V (см. определение (55)) к u_j^ε и сформировать выражение (47) (см. также определение (42)).

Начнем с рассмотрения более простой, но вполне представительной левой части (57). Она равна

$$\begin{aligned} \lambda_j^\varepsilon \frac{\beta_j^\varepsilon(\varepsilon)}{2H_0} \varepsilon^{-\frac{n}{3} + \frac{7}{6}} \int_\omega V(\eta) \chi(y) \int_{\Upsilon^\varepsilon(y)} S_\varepsilon(y, z) u_j^\varepsilon(y, z) dz dy + (u_j^\varepsilon, \partial_z^2 v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \\ = \left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} + \varepsilon^{-\frac{4}{3}} \mu_j^\varepsilon \right) \varepsilon^{\frac{4}{3}} \varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)} \int_\omega \frac{H(y)}{H_0} V(\eta) \overline{w}_j^\varepsilon(\eta) dy \\ - \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} \varepsilon^{\frac{4}{3}} \varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)} \int_\omega \frac{H_0}{H(y)} V(\eta) \overline{w}_j^\varepsilon(\eta) dy. \end{aligned} \tag{59}$$

В силу соотношений (14), (19) замена $y \mapsto \eta$ переменной интегрирования устраняет множитель $\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)}$. Вытекающие из равенства (8) формулы

$$\begin{aligned} H_0^{-1}H(y) &= 1 - H_0^{-1}rh(\varphi) = 1 - \varepsilon^{2/3}H_0^{-1}|\eta|h(\varphi), \\ H(y)^{-1}H_0 &= 1 + H_0^{-1}rh(\varphi) + O(r^2) \end{aligned} \tag{60}$$

приводят к возникновению скалярного произведения $(a\bar{w}_j^\varepsilon, V)$ с весовым множителем (21). При этом главные члены с коэффициентом $\pi^2\varepsilon^{-2}H_0^{-2}$ взаимно уничтожаются, а член, происходящий от остатка $O(r^2)$ в представлении (60), мажорируется выражением

$$\begin{aligned} c\varepsilon^{-2}\varepsilon^{\frac{4}{3}}\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)} \int_{\omega} r^2 |\bar{w}_j^\varepsilon| |V| dy &\leq c\varepsilon^{-\frac{1}{6}} \|r^2 \chi \bar{u}_j^\varepsilon; L_2(\omega)\| \varepsilon^{-\frac{1}{3}(n-1)} \|V; L_2(\omega)\| \\ &\leq c(V)\varepsilon^{-\frac{1}{2}} \varepsilon \|r^{1/2} \mathcal{E}_\delta \bar{u}_j^\varepsilon; L_2(\omega)\| \leq c_j(V)\varepsilon^{\frac{1}{6}} \end{aligned}$$

и потому оказывается бесконечно малой; здесь приняты во внимание формулы (47), (44), а также первая формула (58) с $k = 3/2$. Итак, пределом суммы (59), т. е. левой части (57), действительно служит левая часть (56).

Если, как планировалось, в скалярном произведении из правой части (57) вынести множители χ и S_ε из-под градиента пробной функции, то возникает новое скалярное произведение

$$\frac{\beta_j(\varepsilon)}{2H_0} \varepsilon^{-\frac{n}{3} + \frac{7}{6}} (S_\varepsilon \nabla_y u_j^\varepsilon, \chi \nabla_y V)_{\Omega^\varepsilon} = \beta_j(\varepsilon) \varepsilon^{-\frac{n}{3} + \frac{7}{6}} \varepsilon \int_{\omega} \frac{H(y)}{H_0} \overline{\nabla_y u_j^\varepsilon}(y) \chi(y) \nabla_y V(\eta) dy. \tag{61}$$

Поскольку $\|\nabla_y V; L_2(\omega)\| = \varepsilon^{\frac{1}{3}(n-1)} \varepsilon^{-\frac{2}{3}} \|\nabla_\eta V; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\|$, формула (45) и оценки (46), (58) показывают, что с допустимой погрешностью $O(\varepsilon^{1/6})$ можно совершить следующие действия: заменить функцию $\overline{\nabla_y u_j^\varepsilon}$ функцией $\nabla_y \bar{w}_j^\varepsilon$, занести срезку χ под знак градиента и, наконец, вместо $H_0^{-1}H(y)$ написать единицу. В результате согласно определению (47) выражение (61) после замены $y \mapsto \eta$ и вычисления предела превращается в правую часть (56):

$$\varepsilon^{-\frac{n}{3} + \frac{7}{6}} \varepsilon \varepsilon^{-\frac{1}{3}(n-1) - \frac{1}{2}} \int_{\omega} \nabla_y \bar{w}_j^\varepsilon(\eta) \nabla_y V(\eta) dy = (\nabla_\eta \bar{w}_j^\varepsilon, \nabla_\eta V) \rightarrow (\nabla_\eta \bar{w}_j^0, \nabla_\eta V)$$

при $\varepsilon \rightarrow +0$. Осталось отметить, что отброшенные ранее скалярные произведения

$$\frac{\beta_j(\varepsilon)}{2H_0} \varepsilon^{-\frac{n}{3} + \frac{7}{6}} (\nabla_y u_j^\varepsilon, S_\varepsilon V \nabla_y \chi)_{\Omega^\varepsilon} \quad \text{и} \quad \frac{\beta_j(\varepsilon)}{2H_0} \varepsilon^{-\frac{n}{3} + \frac{7}{6}} (\nabla_y u_j^\varepsilon, \chi V \nabla_y S_\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon},$$

по сути уже обрабатывались ранее при помощи весовой оценки (32). Первое из них экспоненциально мало, а второе оказывается бесконечно малым благодаря равномерной ограниченности модуля производных $\nabla_y S_\varepsilon(y, z)$ (ср. формулы (58) и (45)).

Теорема 3. При любом $j \in \mathbb{N}$ справедливо соотношение

$$\varepsilon^{4/3} (\lambda_j^\varepsilon - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2}) \rightarrow \mu_j \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow +0,$$

где λ_j^ε и μ_j — соответственные члены последовательностей (5) и (24) собственных чисел исходной (4) и предельной (22) задач.

Доказательство сформулированной теоремы о сходимости будет закончено в п. 5: нужно еще проверить априорную оценку (31) для λ_j^ε и убедиться в том, что предел $\bar{\mu}_j^0$ из формулы (50) совпадает с собственным числом μ_j .

5. Обоснование собственных чисел и функций. В гильбертовом пространстве $\mathcal{H}^\varepsilon = H_0^1(\Omega^\varepsilon)$ введем скалярное произведение

$$\langle u^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} + (\varepsilon^{-4/3} - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2})(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \tag{62}$$

и непрерывный компактный самосопряженный оператор \mathcal{T}^ε ,

$$\langle \mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle_\varepsilon = (u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}, \quad u^\varepsilon, v^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon. \tag{63}$$

Нужные свойства билинейной формы (62) обеспечены неравенством (38) и требованиями (2), (7). Согласно определениям (63), (62) и интегральному тождеству (4) собственные числа τ_j^ε оператора \mathcal{T}^ε , образующие бесконечно малую положительную последовательность, находятся по формуле

$$\tau_j^\varepsilon = (\lambda_j^\varepsilon - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} + \varepsilon^{-4/3})^{-1},$$

где λ_j^ε — члены последовательности (5). Следующее простое утверждение известно как лемма «о почти собственных числах и векторах» (см. обзор [9], а также, например, монографию [10, гл. 6]).

Лемма 4. Пусть $u^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon$ и $t^\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ таковы, что

$$\|u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1, \quad \|\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon - t^\varepsilon u^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = t \in (0, t^\varepsilon).$$

Тогда сегмент $[t^\varepsilon - t, t^\varepsilon + t]$ содержит собственное число оператора \mathcal{T}^ε . Более того, при каждом $t_* \in (t, t^\varepsilon)$ найдутся коэффициенты $a_J^\varepsilon, \dots, a_{J+K-1}^\varepsilon$, для которых верны формулы

$$\left\| u^\varepsilon - \sum_{k=J}^{J+K-1} a_k^\varepsilon \mathfrak{U}_k^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon \right\| \leq 2 \frac{t}{t_*}, \quad \sum_{k=J}^{J+K-1} |a_k^\varepsilon|^2 = 1,$$

причем $\{\tau_J^\varepsilon, \dots, \tau_{J+K-1}^\varepsilon\}$ — список всех собственных чисел оператора \mathcal{T}^ε на сегменте $[t^\varepsilon - t_*, t^\varepsilon + t_*]$, а собственные векторы $\mathfrak{U}_J^\varepsilon, \dots, \mathfrak{U}_{J+K-1}^\varepsilon$ подчинены условиям ортогональности и нормировки $\langle \mathfrak{U}_j^\varepsilon, \mathfrak{U}_k^\varepsilon \rangle_\varepsilon = \delta_{j,k}$.

Пусть μ_m — собственное число задачи (22) с кратностью \varkappa_m , т. е.

$$\mu_{m-1} < \mu_m = \dots = \mu_{m+\varkappa_m-1} < \mu_{m+\varkappa_m} \tag{64}$$

в последовательности (24). Приближенные решения уравнения $\mathcal{T}^\varepsilon u^\varepsilon = \tau^\varepsilon u^\varepsilon$ определим формулами

$$t_j^\varepsilon = \varepsilon^{4/3} (1 + \mu_m)^{-1}, \quad u_j^\varepsilon = \|\mathfrak{w}_j^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \tag{65}$$

$$\mathfrak{w}_j^\varepsilon(x) = \varepsilon^{-\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}} \chi(y) w_j(\varepsilon^{-\frac{2}{3}}(y - y^0)) S_\varepsilon(y, z), \quad j = m, \dots, m + \varkappa_m - 1, \tag{66}$$

где $w_m, \dots, w_{m+\varkappa_m-1}$ — собственные функции задачи (22).

Вычислим скалярные произведения

$$\begin{aligned} \langle \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_j^\varepsilon \rangle_\varepsilon &= (\nabla_y \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \nabla_y \mathfrak{w}_j^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - (\partial_z^2 \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_j^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} (\mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_j^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \\ &\quad + \varepsilon^{-4/3} (\mathfrak{w}_j^\varepsilon, \mathfrak{w}_j^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon}. \end{aligned} \tag{67}$$

Последнее слагаемое равно

$$\varepsilon^{-\frac{4}{3}} \varepsilon^{-\frac{2}{3}n + \frac{1}{2}} \int_\omega H(y) \chi(y)^2 w_j(\eta) w_k(\eta) dy = \frac{H_0}{2} ((w_j, w_k) + O(\varepsilon^{3/2})).$$

Порядок остатка обусловлен заменой $y \mapsto \eta$, уничтожающей множитель $\varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)}$ при интеграле слева, а также экспоненциальным затуханием при $\rho = |\eta| \rightarrow +\infty$ собственных функций, т. е. леммой 1. Те же доводы вместе с очевидной оценкой $|\nabla_y S_\varepsilon(y, z)| \leq c$ (ср. второе подынтегральное выражение (45)) показывают, что

$$(\nabla_y \mathbf{w}_j^\varepsilon, \nabla_y \mathbf{w}_k^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \frac{H_0}{2} ((\nabla_\eta w_j, \nabla_\eta w_k) + O(\varepsilon^{3/2})).$$

Наконец, похожие преобразования при учете формулы (18) приводят к соотношению

$$\begin{aligned} & -(\partial_z^2 \mathbf{w}_j^\varepsilon, \mathbf{w}_k^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} (\mathbf{w}_j^\varepsilon, \mathbf{w}_k^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \\ &= \varepsilon^{-\frac{2}{3}n+1} \frac{\pi^2}{2\varepsilon} \int_\omega H(y) \left(\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2} \right) \chi(y)^2 w_j(\eta) w_k(\eta) dy \\ &= \frac{\pi^2}{H_0^2} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} \rho h(\varphi) w_j(\eta) w_k(\eta) d\eta + O(\varepsilon^{2/3}) = \frac{H_0}{2} (aw, w) + O(\varepsilon^{2/3}). \end{aligned}$$

В итоге интегральное тождество (22) и условия (25) показывают, что

$$\left| \langle \mathbf{w}_j^\varepsilon, \mathbf{w}_k^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \frac{H_0}{2} (1 + \mu_m) \delta_{j,k} \right| \leq c_m \varepsilon^{2/3}, \quad j, k = k, m, \dots, m + \varkappa_m - 1. \quad (68)$$

Оценим фигурирующие в лемме 4 величины

$$\begin{aligned} t_j &= \|\mathcal{T}^\varepsilon \mathbf{u}_j^\varepsilon - \mathbf{t}_j^\varepsilon \mathbf{u}_j^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = \sup |\langle \mathcal{T}^\varepsilon \mathbf{u}_j^\varepsilon - \mathbf{t}_j^\varepsilon \mathbf{u}_j^\varepsilon, v^\varepsilon \rangle_\varepsilon| \\ &= \|\mathbf{u}_j^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup \left| (\mathbf{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - \frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{1 + \mu_m} \left((\nabla_x \mathbf{w}_j^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \left(\frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} - \varepsilon^{-\frac{4}{3}} \right) (\mathbf{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \right) \right| = \frac{\varepsilon^{\frac{4}{3}}}{1 + \mu_m} \|\mathbf{u}_j^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^{-1} \sup \left| (\nabla_y \mathbf{w}_j^\varepsilon, \nabla_y v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \right. \\ &\quad \left. - \left(\left(\partial_z^2 + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} \right) \mathbf{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon \right)_{\Omega^\varepsilon} - \varepsilon^{-\frac{4}{3}} \mu_m (\mathbf{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \right|. \quad (69) \end{aligned}$$

При этом сначала воспользовались одним из определений нормы, т. е. все супремумы в (69) вычисляются по таким функциям $v^\varepsilon \in H_0^1(\Omega^\varepsilon)$, что $\|v^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| = 1$, а затем приняли во внимание соотношения (66) и (63). Имеем

$$\varepsilon^{-\frac{4}{3}} (\mathbf{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \varepsilon^{-\frac{4}{3}} \varepsilon^{-\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}} \frac{\varepsilon}{2} \varepsilon^{-\frac{1}{3}n + \frac{1}{2}} \int_\omega H(y) w_j(\eta) V^\varepsilon(\eta) dy,$$

где

$$\begin{aligned} V^\varepsilon(\eta) &= \varepsilon^{\frac{1}{3}n - \frac{1}{2}} \chi(y^0 + \varepsilon^{\frac{2}{3}} \eta) \overline{v^\varepsilon}(y^0 + \varepsilon^{\frac{2}{3}} \eta), \\ \|V^\varepsilon; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\| &\leq c \varepsilon^{-\frac{1}{3}} \|\overline{v^\varepsilon}; L_2(\omega)\|^2 \leq c \varepsilon^{-\frac{4}{3}} \|v^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\|^2 \leq c \|v^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|^2 = c. \end{aligned} \quad (70)$$

Последняя оценка вытекает из формулы (62) для скалярного произведения в пространстве \mathcal{H}^ε и неравенства Фридрикса (38). Итак,

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon^{-\frac{4}{3}} (\mathbf{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - \frac{H_0}{2} (w, V^\varepsilon) \right| &\leq c \varepsilon^{-\frac{2}{3}(n-1)} \left| \int_\omega (H(y) - H_0) w_j(\eta) V^\varepsilon(\eta) dy \right| \\ &\leq c \varepsilon^{\frac{2}{3}} \|\rho w_j; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\| \|V^\varepsilon; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\| \leq c_j \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \quad (71) \end{aligned}$$

Подчеркнем, что L_2 -норма произведения ρw_j конечна благодаря экспоненциальному затуханию собственных функций предельной задачи (см. лемму 1). Аналогично получаем равенство

$$-\left(\left(\partial_z^2 + \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2}\right) \mathfrak{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon\right)_{\Omega^\varepsilon} = \frac{\pi^2}{\varepsilon^2} \frac{\varepsilon}{2} \varepsilon^{-\frac{2}{3}n+1} \int_{\omega} H(y) \left(\frac{1}{H(y)^2} - \frac{1}{H_0^2}\right) w_j(\eta) V^\varepsilon(\eta) d\eta$$

и, поскольку $H(y)^{-1} - H_0^{-2}H(y) = 2rh(\varphi) + O(r^2)$, также неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \left((\partial_z^2 + \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2}) \mathfrak{w}_j^\varepsilon, v^\varepsilon \right)_{\Omega^\varepsilon} + (aw_j, V^\varepsilon) \right| \\ & \leq c\varepsilon^{-\frac{2}{3}n} \int_{\omega} r^2 |w_j(\eta)| |V^\varepsilon(\eta)| dy \leq c\varepsilon^{\frac{2}{3}} \|\rho^2 w_j; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\| \|V^\varepsilon; L_2(\mathbb{R}^{n-1})\| \leq c_j \varepsilon^{\frac{2}{3}}. \end{aligned} \tag{72}$$

Наконец, соотношение

$$\left| (\nabla_y \mathfrak{w}_j^\varepsilon, \nabla_y v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} - (\nabla_\eta w_j, \nabla_\eta V^\varepsilon) \right| \leq c_j \varepsilon^{2/3} \tag{73}$$

проверяется по ставшей уже привычной схеме: перенос множителей $\chi(y)$ и $S_\varepsilon(y, z)$ из выражения (66) к пробной функции $v^\varepsilon(y, z)$ и трансформация ее в $V^\varepsilon(\eta)$ согласно определениям (70) и (42). Единственный новый момент — применение неравенства $\|\nabla_y v^\varepsilon; L_2(\Omega^\varepsilon)\| \leq \|v^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\|$, обусловленного формулами (67) и (38).

Из соотношений (71)–(73) и (68) вытекает, что ввиду интегрального тождества (22) с ингредиентами $w = w_j$, $v = V^\varepsilon$ и $\mu = \mu_m$ величина $\sup |\dots|$ из цепочки (69) не превосходит $c_m \varepsilon^{2/3}$, а значит, $t_j \leq C_m \varepsilon^2$, и по лемме 4 найдутся собственные числа $\tau_{\mathfrak{N}(j)}^\varepsilon$, $j = m, \dots, m + \varkappa_m - 1$, оператора \mathcal{T}^ε , для которых

$$\begin{aligned} c_m \varepsilon^2 \geq |\tau_{\mathfrak{N}(j)}^\varepsilon - t_j^\varepsilon| &= |(\lambda_{\mathfrak{N}(j)}^\varepsilon - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} + \varepsilon^{-4/3})^{-1} - \varepsilon^{4/3} (1 + \mu_m)^{-1}| \\ &\Rightarrow |\lambda_{\mathfrak{N}(j)}^\varepsilon - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} - \varepsilon^{-4/3} \mu_j| \leq C_m \varepsilon^{-2/3}. \end{aligned} \tag{74}$$

С целью убедиться в том, что последнему неравенству (74) удовлетворяют не менее \varkappa_m собственных чисел исходной задачи (4), воспользуемся второй частью леммы 4, а именно, возьмем

$$t_* = M\varepsilon^2 \in \left(\max \{t_m^\varepsilon, \dots, t_{m+\varkappa_m-1}^\varepsilon\}, \frac{\varepsilon^{4/3}}{1 + \mu_m} \right)$$

с большим коэффициентом M и найдем нормированные столбцы коэффициентов $a^{\varepsilon j} = (a_{j_1}^{\varepsilon j}, \dots, a_{j_{J+K-1}}^{\varepsilon j}) \in \mathbb{R}^K$, $j = m, \dots, m + \varkappa_m - 1$, для которых

$$\|u_j^\varepsilon - \mathfrak{G}_j^\varepsilon; \mathcal{H}^\varepsilon\| \leq 2 \frac{t_j}{t_*} \leq \frac{2C_m}{M}, \quad \mathfrak{G}_j^\varepsilon = \sum_{p=J}^{J+K-1} a_p^{\varepsilon j} \mathfrak{U}_p^\varepsilon.$$

Поскольку $|\langle u_j^\varepsilon, u_k^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{j,k}| \leq C_m \varepsilon^{2/3}$ согласно формулам (65) и (68), при учете условий ортогональности и нормировки для собственных векторов $\mathfrak{U}_j^\varepsilon, \dots, \mathfrak{U}_{J+K-1}^\varepsilon$ оператора \mathcal{T}^ε имеем

$$\begin{aligned} |(a^{\varepsilon j}, a^{\varepsilon k})_{\mathbb{R}^K} - \delta_{j,k}| &= |\langle \mathfrak{G}_j^\varepsilon, \mathfrak{G}_k^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{j,k}| \\ &= |\langle \mathfrak{G}_j^\varepsilon - u_j^\varepsilon, \mathfrak{G}_k^\varepsilon \rangle_\varepsilon + \langle u_j^\varepsilon, \mathfrak{G}_k^\varepsilon - u_k^\varepsilon \rangle_\varepsilon + \langle u_j^\varepsilon, u_k^\varepsilon \rangle_\varepsilon - \delta_{j,k}| \leq 4c_m M^{-1} + C_m \varepsilon^{2/3}. \end{aligned}$$

В итоге при малом ε и большом M столбцы $a^{\varepsilon m}, \dots, a^{\varepsilon m + \varkappa_m - 1}$ оказываются «почти ортонормированными» в K -мерном пространстве \mathbb{R}^K , что возможно только в случае $K \geq \varkappa_m$, т. е. действительно найдутся собственные числа

$$\lambda_{\mathfrak{N}^\varepsilon(m)}, \dots, \lambda_{\mathfrak{N}^\varepsilon(m + \varkappa_m - 1)} \quad (\mathfrak{N}^\varepsilon(j) = \mathfrak{N}^\varepsilon(m) + j - m \text{ при } j = m, \dots, m + \varkappa_m - 1)$$

задачи (4), удовлетворяющие неравенству (74) (может быть, с новой постоянной C_m , связанной с введенной величиной M). Отсюда сразу вытекает, что $\mathfrak{N}^\varepsilon(m) \geq m$ при достаточно малом ε , а значит, выполнено востребованное ранее соотношение (31). Вместе с тем, если оказалось, что $\mathfrak{N}^\varepsilon(m) > m$, то обнаружено собственное число $\lambda_{\mathfrak{N}^\varepsilon} \in (0, \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} + \varepsilon^{-4/3} \mu_m + C_m \varepsilon^{-2/3}]$, для которого

$$(u_{\mathfrak{N}^\varepsilon}^\varepsilon, u_{\mathfrak{N}^\varepsilon(j)}^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = 0, \quad j = 1, \dots, m + \varkappa_m - 1. \quad (75)$$

Применив результат п. 4, видим, что указанные формулами (50) и (51) пределы $\bar{\mu}_{\mathfrak{N}^\varepsilon}^0$ и $\bar{w}_{\mathfrak{N}^\varepsilon}^0 \in \mathcal{H}$ обладают абсурдным свойством: собственное число $\bar{\mu}_{\mathfrak{N}^\varepsilon}^0$ попадает на сегмент $[0, \mu_m]$, но соответствующая собственная функция $\bar{w}_{\mathfrak{N}^\varepsilon}^0$ ортогональна в $L_2(\mathbb{R}^{n-1})$ собственным функциям $w_1, \dots, w_{m + \varkappa_m - 1}$ в ситуации (64) (отметим, что упомянутая ортогональность унаследована от условий (75) ввиду сильной сходимости (51) и оценок (49), (54)). Итак, $\mathfrak{N}^\varepsilon(m) = m$, и доказано основное утверждение работы.

Теорема 5. Последовательности (5) и (24) собственных чисел исходной и предельной задач находятся в отношении

$$|\lambda_j^\varepsilon - \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} - \varepsilon^{-4/3} \mu_j| \leq c_j \varepsilon^{-2/3} \quad \text{при } \varepsilon \in (0, \varepsilon_j], \quad (76)$$

где c_j и ε_j — положительные величины, зависящие от номера $j \in \mathbb{N}$.

Попутно закончена проверка теоремы о сходимости. Поскольку неравенство указывает также и скорость сходимости, теорема 3 становится ненужной, однако схема доказательства теоремы 5 существенно опирается на полученный в п. 4 промежуточный результат.

6. Доступные обобщения и открытые вопросы. 1°. СПЕКТРАЛЬНЫЕ ЛАКУНЫ. Пусть ω — параллелепипед (13), а Π^ε — периодический слой (12). Известно (см., например, [11]), что спектр σ^ε задачи Дирихле для оператора Лапласа в Π^ε имеет чересполосную структуру

$$\sigma^\varepsilon = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \sigma_k^\varepsilon, \quad (77)$$

где σ_k^ε — замкнутые связанные сегменты на вещественной положительной полуоси \mathbb{R}_+ ,

$$\sigma_k^\varepsilon = \{ \lambda = \lambda_k^\varepsilon(\eta) : \eta = (\eta_1, \dots, \eta_{m-1}) \in \mathbb{L} \}, \quad (78)$$

η — двойственная переменная преобразования Гельфанда [12], $\mathbb{L} = \{ \eta : 0 \leq \eta_p < 2\pi/l_p, p = 1, \dots, n-1 \}$, а $\lambda_k^\varepsilon(\eta)$ — элементы последовательности

$$0 < \lambda_1^\varepsilon(\eta) \leq \lambda_2^\varepsilon(\eta) \leq \dots \leq \lambda_j^\varepsilon(\eta) \leq \dots \rightarrow +\infty \quad (79)$$

собственных чисел модельной задачи на ячейке периодичности (1)

$$\begin{aligned} -\Delta_x u^\varepsilon(\eta; x) &= \lambda(\eta) u^\varepsilon(\eta; x), \quad x \in \Omega^\varepsilon, \quad u^\varepsilon(\eta; x) = 0, \quad x \in \Sigma_\pm^\varepsilon, \\ u^\varepsilon|_{y_j=l_j} &= e^{i\eta_j} u^\varepsilon|_{y_j=0}, \quad \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_j} \Big|_{y_j=l_j} = e^{i\eta_j} \frac{\partial u^\varepsilon}{\partial y_j} \Big|_{y_j=0}, \quad j = 1, \dots, n-1. \end{aligned} \quad (80)$$

Вариационная формулировка задачи (80) сводится к интегральному тождеству

$$(\nabla_x u^\varepsilon, \nabla_x v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} = \lambda(\eta)(u^\varepsilon, v^\varepsilon)_{\Omega^\varepsilon} \quad \forall v^\varepsilon \in \mathcal{H}^\varepsilon(\eta), \quad (81)$$

где $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$ — подпространство функций из класса Соболева $H^1(\Omega^\varepsilon)$, обращающихся в нуль на основаниях Σ_\pm^ε и удовлетворяющих первому (устойчивому) условию квазипериодичности (8), назначенному на боковой поверхности Σ_0^ε ячейки (см. определение (11)).

Метод доказательства леммы 2 мало восприимчив к изменениям краевых условий на боковой поверхности Σ_0^ε , так как используется интегральное тождество (81) с пробной функцией $v^\varepsilon = \mathcal{E}_\delta^2 u_j^\varepsilon$, пропорциональной собственной функции u_j^ε около Σ_0^ε (см. определение (33)) и потому попадающей в $\mathcal{H}^\varepsilon(\eta)$. Единственное нововведение — комплекснозначные собственные функции, требующие вычисления вещественных частей скалярных произведений в промежуточной выкладке (ср. преобразование (28)), однако финальное соотношение (34) остается прежним. Таким образом, асимптотическая формула (76) сохраняется и для собственных чисел (79), причем в ней оба выделенных члена асимптотики не зависят от параметра η , а множитель c_m в мажоранте также можно взять общим для всех $\eta \in \mathbb{L}$. Отсюда сразу вытекает, что сегменты (78) ложатся вовнутрь множеств

$$\Xi_m^\varepsilon = [\pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} + \varepsilon^{-4/3} \mu_m - c_m \varepsilon^{-2/3}, \pi^2 \varepsilon^{-2} H_0^{-2} + \varepsilon^{-4/3} \mu_m + c_m \varepsilon^{-2/3}],$$

причем $\Xi_m^\varepsilon \cap \Xi_p^\varepsilon = \emptyset$ в случае $\mu_m \neq \mu_p$ при малом ε . Как и в [4], сделанное наблюдение показывает, что в спектре (77) открыты *лакуны* — интервалы на \mathbb{R}_+ , свободные от точек спектра, но имеющие оба конца в σ^ε . Количество раскрытых лагун неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow +0$. Отметим, что благодаря экспоненциальному затуханию собственных функций, выраженному оценкой (32), нетрудно при помощи максиминимального принципа [10, теорема 10.2.2] значительно улучшить оценку сверху для длины сегмента (78) — она (длина) не превосходит $C_m e^{-\delta \varepsilon^{-2/3}}$ с некоторыми положительными C_m и δ .

2°. **ДРУГИЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ.** Как уже пояснялось, замена на боковой поверхности Σ_0^ε условия Дирихле, например, условием Неймана не приводит к каким-либо изменениям в результате и способе его проверки. Незначительная модификация нужна и в том случае, если на одном основании, скажем Σ_-^ε , сохранено условие Дирихле, а на другом — назначено условие Неймана. В этом случае нужны подстановки

$$\sin\left(\pi \frac{z + \varepsilon H_-(y)}{\varepsilon H(y)}\right) \mapsto \sin\left(\frac{\pi}{2} \frac{z + \varepsilon H_-(y)}{\varepsilon H(y)}\right), \quad \frac{\pi^2}{\varepsilon^2 H_0^2} \mapsto \frac{\pi^2}{4\varepsilon^2 H_0^2}$$

в асимптотических анзацах (16) и (15), (19), а все последующие действия повторяются практически без изменений.

Если на обоих основаниях Σ_\pm^ε поставлено условие Неймана, то коренным образом меняется структура асимптотики: простейший результат состоит в том, что члены λ_j^ε последовательности (5) сходятся при $\varepsilon \rightarrow +0$ к собственным числам M_j следующей предельной задачи в области ω :

$$(H \nabla_y w, \nabla_y v)_\omega = M(Hw, v)_\omega \quad \forall v \in H_0^1(\omega)$$

(на боковой поверхности Σ_0^ε сохранили условие Дирихле, перешедшее на границу $\partial\omega$). Иными словами, справедливо асимптотическое представление $\lambda_j^\varepsilon =$

$M_j + O(\varepsilon^{1/2})$ (см., например, книгу [13, §7.1], где требуются лишь косметические поправки, вызванные недостаточной гладкостью функции H). Вместе с тем в частном случае $H_+ = H_-$, т. е. при наличии симметрии области Ω^ε , в спектре рассматриваемой спектральной краевой задачи удается обнаружить серии собственных чисел с устойчивыми асимптотиками вида (76). В самом деле, действуя по схеме [14], сузим задачу на подпространство функций, нечетных относительно переменной z , и тем самым поставим ее на верхней половине $\Omega_+^\varepsilon = \{x \in \Omega^\varepsilon : z > 0\}$ области (1), но назначим искусственные условия Дирихле на поверхности $\{x \in \Omega^\varepsilon : z = 0\}$. В итоге приходим к ситуации, обсуждавшейся в предыдущем абзаце.



Рис. 2. Двумерные фигуры, изображающие тонкие многогранники.

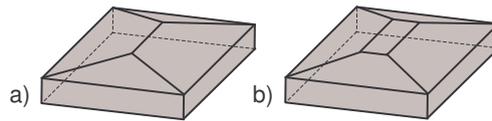


Рис. 3. Многогранники, у которых максимум толщины приходится на одномерное и двумерное подмногообразия.

3°. ВАРИАЦИИ ФОРМЫ. Если у функции H имеется локальный максимум в точке $y^1 \in \omega$ (см. рис. 2,а) и $H(y^1) < H(y^0)$, то появляется новая серия собственных чисел с устойчивыми асимптотиками

$$\lambda_{N^\varepsilon(j)}^\varepsilon = \pi^2 \varepsilon^{-2} H(y^1)^{-2} + \varepsilon^{-4/3} \mu_j^1 + \dots, \tag{82}$$

где μ_j^1 — собственные числа еще одной предельной задачи (22) с новым коэффициентом $a^1(\eta)$. Подчеркнем, что номер $N^\varepsilon(j)$ в левой части (82) неограниченно возрастает при $\varepsilon \rightarrow +0$, так как в последовательности (5) собственному числу $\lambda_{N^\varepsilon(j)}^\varepsilon$ предшествует все больше и больше собственных чисел с асимптотиками (15), (19).

Может случиться, что $H(y) = H(y^1)$ при $y \in \omega^1$, где ω^1 — подмногообразие в области $\omega \subset \mathbb{R}^{n-1}$ с положительной размерностью (ср. рис. 3,а,б). Автор не знает, как выглядят асимптотические структуры в такой ситуации.

Еще один открытый вопрос связан с наличием нескольких глобальных максимумов у функции H (см. рис. 2,б). Тогда возникает набор предельных дифференциальных уравнений (20) в \mathbb{R}^{n-1} , а в асимптотическом анзаце (15), (19) фигурируют точки μ_m объединения их спектров. В результате не исключен случай $\mu_1 = \mu_2 = \dots = \mu_{\kappa_1-1} < \mu_{\kappa_n}$ с $\kappa_1 > 1$, но первое собственное число λ_1^ε задачи (3) заведомо простое, и совершенно непонятно, как происходит «расщепление» идентичных анзацев (15), (19) для $\lambda_1^\varepsilon, \dots, \lambda_{\kappa_1-1}^\varepsilon$.

Отметим, наконец, что если точка y^0 глобального максимума функции H попала на границу $\partial\omega$, то опять-таки нужны лишь очевидные изменения в асимптотическом анализе, а предельная задача ставится либо в полупространстве, либо в многогранном угле.

ЛИТЕРАТУРА

1. Камоцкий И. В., Назаров С. А. О собственных функциях, локализованных около кромки тонкой области // Проблемы математического анализа. Новосибирск: Науч. кн., 1999. Вып. 19. С. 105–148.
2. Nazarov S. A. Localization effects for eigenfunctions near to the edge of a thin domain // Math. Bohem. 2002. V. 127, N 2. P. 283–292.
3. Cardone G., Durante T., Nazarov S. A. The localization effect for eigenfunctions of the mixed boundary value problem in a thin cylinder with distorted ends // SIAM J. Math. Anal. 2010. V. 42, N 6. P. 2581–2609.
4. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of narrow periodic waveguides // Russ. J. Math. Phys. 2008. V. 15, N 2. P. 238–242.
5. Friedlander L., Solomyak M. On the spectrum of the Dirichlet Laplacian in a narrow strip // Israel J. Math. 2009. V. 170. P. 337–354.
6. Borisov D., Freitas P. Singular asymptotic expansions for Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions on thin planar domains // Ann. Inst. Henri Poincaré. Anal. Non Linéaire. 2009. V. 26, N 2. P. 547–560.
7. Borisov D., Freitas P. Asymptotics of Dirichlet eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian on thin domains in \mathbb{R}^d // J. Funct. Anal. 2010. V. 258, N 3. P. 893–912.
8. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972.
9. Вишик М. И., Люстерник Л. А. Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром // Успехи мат. наук. 1957. Т. 12, № 5. С. 3–122.
10. Бирман М. Ш., Соломяк М. З. Спектральная теория самосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. Л.: Изд-во Ленингр. ун-та, 1980.
11. Кучмент П. А. Теория Флоке для дифференциальных уравнений в частных производных // Успехи мат. наук. 1982. Т. 37, № 4. С. 3–52.
12. Гельфанд И. М. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами // Докл. АН СССР. 1950. Т. 73. С. 1117–1120.
13. Назаров С. А. Асимптотическая теория тонких пластин и стержней. Понижение размерности и интегральные оценки. Новосибирск: Науч. кн., 2002.
14. Evans D. V., Levitin M., Vassiliev D. Existence theorems for trapped modes // J. Fluid Mech. 1994. V. 261. P. 21–31.

Статья поступила 25 февраля 2012 г.

Назаров Сергей Александрович
Институт проблем машиноведения РАН,
В.О. Большой пр., 61, Санкт-Петербург 199178;
Санкт-Петербургский гос. университет,
математико-механический факультет,
Университетский пр., 28, Старый Петергоф, Санкт-Петербург 198504
srgnazarov@yahoo.co.uk