Сибирский математический журнал
Июль—август, 2013. Том 54, № 4

УДК 512.542

ОБ ИНДЕКСАХ ПОДГРУПП В СОЕДИНЕНИИ ИХ СОПРЯЖЕННЫХ ПАР

С. Ли, С. Чжан

Аннотация. Исследовано влияние индекса подгруппы H в $\langle H, H^g\rangle$ для $g \in G$ на строение группы G, где H или вторая максимальная подгруппа в G, или силовская подгруппа в G.

Ключевые слова: вторая максимальная подгруппа, силовская подгруппа, разрешимая группа, сверхразрешимая группа.

1. Введение

В статье все рассматриваемые группы конечны и символ G означает группу. Записи $H < G$ и $H \lhd\lhd G$ означают, что H — собственная и субнормальная подгруппа в G соответственно. Если $\mathscr{F}$ — класс групп, то будем говорить, что G — *внутренне $\mathscr{F}$-группа*, если $G \notin \mathscr{F}$, но все собственные подгруппы группы G принадлежат $\mathscr{F}$. Далее, если $G/N \in \mathscr{F}$ для всякой нетривиальной нормальной подгруппы N в G, то G называется *минимальной не $\mathscr{F}$-группой*. Пусть L — подгруппа группы G. Положим $\mathrm{cl}_G(L) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid$ существует цепочка $L = K_0 < K_1 < \dots < K_n = G\}$. Пусть r — простое число и $b > 1$ и k — натуральные числа. Если r, b и k таковы, что r делит $b^k - 1$, но r не делит $b^i - 1$ для всех i таких, что $1 \le i < k$, то r называется *примитивным простым делителем* $b^k - 1$ и говорят, что *показатель* $b(\mathrm{mod}\, r)$ *равен* k. Если $b^n - 1$ обладает примитивными простыми делителями, то обозначим символом b_n наибольший примитивный простой делитель $b^n - 1$. Остальные обозначения и термины в этой статье стандартны (см. [1]).

Пусть $H \le G$ и $g \in G$, тогда $H \le \langle H, H^g\rangle \le \langle H, g\rangle$. Ясно, что $H = \langle H, H^g\rangle$ для всех $g \in G$ тогда и только тогда, когда $H \trianglelefteq G$. В [2] подгруппа H названа абнормальной в группе G, если $\langle H, H^g\rangle = \langle H, g\rangle$ для всех $g \in G$. Знаменитая теорема Виландта показывает, что $H \lhd\lhd \langle H, H^g\rangle$ для всех $g \in G$ тогда и только тогда, когда $H \lhd\lhd G$. В [3] подгруппа H называется пронормальной в группе G, если H сопряжена с H^g в $\langle H, H^g\rangle$ для всех $g \in G$. Сказанное выше демонстрирует, что нормальности подгруппы H в G могут быть интерпретированы в терминах нормальностей H в $\langle H, H^g\rangle$: чем ближе $\langle H, H^g\rangle$ к $\langle H, g\rangle$, тем менее H нормальна; чем ближе $\langle H, H^g\rangle$ к H, тем более H нормальна. Размер $\langle H, H^g\rangle$ является мерой для всех нормальностей подгруппы H в G; размер $\langle H, H^g\rangle$ можно считать уровнем нормальности H в G. Это ведет нас к изучению свойств G в зависимости от размера H в $\langle H, H^g\rangle$. В данной статье мы исследуем свойства G в зависимости от индексов подгрупп H в $\langle H, H^g\rangle$ для $g \in G$, где H — вторая максимальная подгруппа в G или силовская подгруппа группы G.

Работа поддержана Национальным фондом естественных наук Китая (гранты N 11171243, 10871032) и Фондом естественных наук провинции Цзянсу (грант N BK2008156).

2. Предварительные результаты

В силу [4, теорема 7.3] минимальные несверхразрешимые группы образуют шесть классов. В настоящей работе фиксируем обозначение G_t для группы в t-х классах. Тогда G_t может быть описана с помощью порождающих и определяющих соотношений следующей леммой 2.1 (см. [4, теорема 7.3]).

Лемма 2.1. *Предположим, что группа G минимальная несверхразрешимая. Тогда $G \cong G_t$ и G_t — одна из следующих групп, где $1 \le t \le 6$.*

(I) *G_1 — внутренне абелева группа $|G_1| = pq^{\beta}$, где $p \nmid q-1$, $\beta \ge 2$.*

(II) *$G_2 = \langle a,\ c_1, c_2, \dots, c_p \rangle$, $|G_2| = p^{\alpha} r^{p}$ и $p^{\alpha-1} \| r-1$, где $\alpha \ge 2$, $a^{p^{\alpha}} = c_1^r = c_2^r = \dots = c_p^r = 1$; $c_i c_j = c_j c_i$; $c_i^a = c_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \dots, p-1$; $c_p^a = c_1^t$, где показатель $t (\bmod r)$ равен $p^{\alpha-1}$.*

(III) *$G_3 = \langle a, b, c_1, c_2 \rangle$ и $|G_3| = 8r^2$ и $4 \mid r-1$, $a^4 = c_1^r = c_2^r = 1$, $a^2 = b^2$, $ba = a^{-1}b$, $c_1c_2 = c_2c_1, c_1^a = c_2$, $c_2^a = c_1^{-1}$, $c_1^b = c_1^s$, $c_2^b = c_2^{-s}$, где показатель $s (\bmod r)$ равен 4.*

(IV) *$G_4 = \langle a,\ b,\ c_1, c_2, \dots, c_p \rangle$, $|G_4| = p^{\alpha+\beta} r^p$ и $p^{\max\{\alpha,\beta\}} \mid r-1$, где $\beta \ge 2$; $a^{p^{\alpha}} = b^{p^{\beta}} = c_1^r = c_2^r = \dots = c_p^r = 1$; $c_i c_j = c_j c_i$, $ab = b^{1+p^{\beta-1}}a$; $c_i^a = c_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ p-1$; $c_p^a = c_1^t$, $c_i^b = c_i^{u^{1+ip^{\beta-1}}}$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ p$; где t и показатели $u (\bmod r)$ равны $p^{\alpha-1}$ и p^{β} соответственно.*

(V) *$G_5 = \langle a, b, c, c_1, c_2, \dots, c_p \rangle$, $|G_5| = p^{\alpha+\beta+1} r^p$ и $p^{\max\{\alpha,\beta\}} \mid r-1$; $a^{p^{\alpha}} = b^{p^{\beta}} = c^p = c_1^r = c_2^r = \dots = c_p^r = 1$; $c_i c_j = c_j c_i$, $ba = abc$, $ca = ac$, $cb = bc$, $c_i^a = c_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ p-1$; $c_p^a = c_1^t$, $c_i^c = c_i^u$, $c_i^b = c_i^{vu^{p-i+1}}$, где t, v и показатели $u (\bmod r)$ равны $p^{\alpha-1}$, p^{β} и p соответственно.*

(VI) *$G_6 = \langle a, b, c_1, c_2, \dots, c_p \rangle$, $|G_6| = p^{\alpha} q r^p$ и $p^{\alpha} q \mid r-1$, $p \mid q-1$, $\alpha \ge 1$; $a^{p^{\alpha}} = b^q = c_1^r = c_2^r = \dots = c_p^r = 1$; $c_i c_j = c_j c_i$, $i,\ j = 1,\ 2,\ \dots,\ p$; $c_i^a = c_{i+1}$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ p-1$; $c_p^a = c_1^t$; $b^a = b^u$, $c_i^b = c_i^{v^{u^{i-1}}}$, $i = 1,\ 2,\ \dots,\ p$, где t и показатели $v (\bmod r)$ равны $p^{\alpha-1}$ и q соответственно, показатель $u (\bmod q)$ равен p.*

Лемма 2.2. *Пусть G — группа. Если G внутренне сверхразрешима и $\Phi(G) = 1$, то G — минимальная несверхразрешимая группа.*

Доказательство. Предположим, что $1 < N \trianglelefteq G$. Пусть H — минимальное дополнение к N в G. Тогда $G = HN$ и $N \cap H \le \Phi(H)$. Если $N \le H$, то $G = H$ и $N \le \Phi(G) = 1$ — противоречие. Поэтому $N \nleq H$, значит, H — собственная подгруппа в G. Следовательно, H сверхразрешима. Таким образом, группа $G/N = HN/N \cong H/H \cap N$ сверхразрешима. Стало быть, G — минимальная несверхразрешимая группа. $\square$

Лемма 2.3. *Пусть (G, M) — пара, где G — группа и M — подгруппа G. Если (G, M) удовлетворяет одному из следующих условий (1)–(3), то класс сопряженности и класс автоморфизмов для M в G равны.*

(1) *Пусть $G = A_n$ и $n > 6$. Если n — простое число, то $M = AGL_1(n) \cap A_n$; если $n = pm$ для простого p, то $M = (S_m \wr S_p) \cap A_n$ и $|G : M| = \frac{n!}{(m!)^p p!}$.*

(2) *G — спорадическая простая группа и M из табл. 1.*

(3) *G простая группа лиева типа над $GF(q)$, где $q = p^f$ и p простое, M определено в табл. 2.*

Доказательство. Так как $\mathrm{Aut}(A_n) \cong S_n$ при $n \ne 6$, согласно [5] легко видеть, что если (G, M) удовлетворяет условию (1), то лемма 2.3 верна. Если (G, M) удовлетворяет условию (2), то в силу [6] лемма 2.3 справедлива. В силу

Таблица 1.
$k_1 = 7 \cdot 13 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 31 \cdot 47$, $k_2 = 7^3 \cdot 11 \cdot 13^2 \cdot 31 \cdot 41 \cdot 47 \cdot 59 \cdot 71$

G	M	индекс	G	M	индекс
Co_3	M_{23}	$2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^2$	Co_1	Co_2	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
Co_2	McL	$2^{11} \cdot 23$	HN	A_{12}	$2^5 \cdot 3 \cdot 5^4 \cdot 19$
M_{11}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	$2^2 \cdot 3$	M_{12}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	$2^4 \cdot 3^2$
M_{22}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	$2^5 \cdot 3 \cdot 7$	M_{23}	$23:11$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$
M_{24}	$\mathrm{PSL}_2(7)$	$2^7 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 23$	J_1	$11:10$	$2^2 \cdot 3 \cdot 7 \cdot 19$
J_2	A_5	$2^5 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$	J_3	$\mathrm{PSL}_2(17)$	$2^3 \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 19$
J_4	$43:14$	$2^{20} \cdot 3^3 \cdot 5 \cdot 11^3 \cdot 23 \cdot 29 \cdot 31 \cdot 37$	Fi_{22}	M_{12}	$2^{11} \cdot 3^6 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 13$
Fi_{23}	$\mathrm{PSL}_2(23)$	$2^{15} \cdot 3^{12} \cdot 5^2 \cdot 7 \cdot 13 \cdot 17$	HS	M_{22}	$2^2 \cdot 5^2$
Fi'_{24}	$29:14$	$2^{20} \cdot 3^{16} \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 11 \times 13 \cdot 17 \cdot 23$	McL	M_{11}	$2^2 \cdot 3^4 \cdot 5^2 \cdot 7$
He	$3.S_7$	$2^6 \cdot 5 \cdot 7^2 \cdot 17$	O'N	J_1	$2^6 \cdot 3^3 \cdot 7^2 \cdot 31$
Th	S_5	$2^{15} \cdot 3^9 \cdot 5^2 \cdot 7^2 \cdot 13 \cdot 19 \cdot 31$	Ru	$\mathrm{PSL}_2(29)$	$2^{12} \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdot 13$
Suz	A_7	$2^{10} \cdot 3^5 \cdot 5 \cdot 11 \cdot 13$	Ly	$67:22$	$2^7 \cdot 3^7 \cdot 5^6 \cdot 7 \cdot 31 \cdot 37$
B	Fi_{23}	$3^7 \cdot 5^3 \cdot k_1$	M	$2.\mathrm{Fi}_{24}$	$2^{24} \cdot 3^3 \cdot 5^7 \cdot k_2$

теоремы из [7], если G — конечная исключительная группа лиева типа, G — конечная классическая группа из [8, табл. 3.5.A-F], получаем, что если (G, M) удовлетворяет условию (3), то лемма 2.3 справедлива. $\square$

Следующая лемма 2.4 доказана в [9] (см. также [4, теорема 5.1]).

Лемма 2.4. *Пусть G — группа. Если все максимальные подгруппы и все фактор-группы группы G разрешимы, но G неразрешима, то G изоморфна одной из простых групп $\mathrm{PSL}_2(p)$ $(p > 3,\ 5 \nmid p^2 - 1)$, $\mathrm{PSL}_2(2^2)$, $\mathrm{PSL}_2(2^q)$, $\mathrm{PSL}_2(3^q)$, $\mathrm{PSL}_3(3)$, $S_z(2^q)$, где q — нечетное простое число.*

Лемма 2.5. *Пусть G — группа. Тогда $|\langle M, M^g\rangle : M|$ — степень простого числа для любой максимальной подгруппы M в G и $g \in G$ тогда и только тогда, когда $G/\operatorname{Soc}(G) \cong \mathrm{PSL}_2(7)$ или G разрешима.*

Доказательство. Если $M \trianglelefteq G$, то $|G : M|$ — простое число; если $M \ntrianglelefteq G$, то существует $g \in G$ такое, что $\langle M, M^g\rangle = G$. Значит, условия, что $|\langle M, M^g\rangle : M|$ и $|G : M|$ — степени простого числа для любой максимальной подгруппы M в G и $g \in G$, эквивалентны. В силу [10, следствие 3] лемма 2.5 справедлива. $\square$

Лемма 2.6 [4, основная лемма]. *Пусть G — группа. Предположим, что в G имеется единственная минимальная нормальная подгруппа N и N — элементарная абелева группа порядка p^α. Если $\Phi(G) = 1$, то*

(1) $G = AN$, $A \cap N = 1$, где A — максимальная подгруппа группы G;

(2) если $O_{p'}(A) \neq 1$, то H сопряжена с A, когда $H < G$ и $HN = G$.

3. Индекс второй максимальной подгруппы L группы G в $\langle L, L^g\rangle$

В этом разделе рассматриваем свойства группы G в зависимости от индексов подгрупп L в $\langle L, L^g\rangle$, где L — вторая максимальная подгруппа в G и $g \in G \setminus N_G(L)$. Прежде всего отметим следующее

Таблица 2

G	Тип M	индекс	простое r
$\mathrm{PSL}_2(2^f)$	$D_{2(2^f-1)}$	$2^{f-1}(2^f+1)(f \geq 3)$	$(2^f)_2$
$\mathrm{PSL}_2(q)$	$D_{q\pm 1}$ (q нечетно)	$\frac{1}{2}q(q\mp 1)((q\pm 1)_2 \leq (q\mp 1)_2)$	q_2
$\mathrm{PSL}_n(q)$	$\mathrm{GL}_m(q^r)(n=mr)$	$q^{n-1}\frac{q^n-1}{q-1}$	q_n
$\Omega_{2n+1}(q)$	$O_1(q) \perp O_{2n}^{\pm}(q)$	$\frac{1}{2}q^n(q^n\pm 1)$ (n нечетно,	q_{2n}
		$(q\pm 1)_2 \leq (q\mp 1)_2)$	
	$O_1(q) \perp O_{2n}^{+}(q)$	$\frac{1}{2}q^n(q^n+1)$ n четно	
$\mathrm{PSp}_{2n}(q)$	$\mathrm{Sp}_2(q) \wr S_n$	$q^{n(n-1)}\frac{\prod_{i=2}^{n}(q^{2i}-1)}{(q^2-1)^{n-1}n!}$	q_{2n}
$U_n(q)$	$GU_1(q) \perp GU_{n-1}(q)$	$q^{n-1}\frac{q^n+1}{q+1}$ (n нечетно)	q_{2n}
	$\mathrm{GU}_2(q) \wr S_t$	$q^{\frac{n(n-2)}{2}}\frac{\prod_{i=2}^{n}(q^i-(-1)^i)}{(q+1)^{n-1}(q-1)^t t!}$ $(n=2t)$	$q_{2(n-1)}$
$P\Omega_{2n}^{+}(q)$	$O_2^{\pm}(q) \wr S_n$	$q^{n(n-2)}\frac{\prod_{i=2}^{n}(q^{2i}-1)}{(q\pm 1)^n 2^{n-1} n!}$	$q_{2(n-1)}$
		$((q\pm 1)_2 > (q\mp 1)_2)$	
$P\Omega_{2n}^{-}(q)$	$O_2^{+}(q) \perp O_{2n-2}^{-}(q)$	$\frac{1}{2}q^{2(n-1)}(q^n+1)\frac{q^{n-1}-1}{q-1}$ (n четно)	$q_{2(n-1)}$
$P\Omega_{2n}^{-}(q)$	$O_2^{-}(q) \perp O_{2n-2}^{+}(q)$	$\frac{1}{2}q^{2(n-1)}(q^{n-1}+1)\frac{q^n+1}{q+1}$ (n нечетно)	q_{2n}
${}^2G_2(q)$	$2 \times L_2(q)$	$q^2(q^2-q+1)$	q_6
$G_2(q)$	$2.(L_2(q) \times L_2(q)).2$	$q^4(q^4+q^2+1)$	q_6
${}^3D_4(q)$	$2.(L_2(q) \times L_2(q^3)).2$	$q^8(q^8+q^4+1)$	q_{12}
$F_4(q)$	$2.P\Omega_9(q)$	$q^8\frac{1}{2}(q^4+1)$	q_8
${}^2E_6(q)$	$2^2.P\Omega_8^{+}(q) \times ((q+1)/d)^2).2^2.S_3$	$q^{34}\frac{(q^{12}-1)(q^9+1)(q^8-1)(q^5+1)}{6(q^4-1)^2(q+1)^2}$	q_{12}
$E_6(q)$	$2^2.P\Omega_8^{+}(q) \times ((q-1)/2)^2).2^2.S_3$	$q^{34}\frac{(q^{12}-1)(q^9-1)(q^8-1)(q^5-1)}{6(q^4-1)^2(q-1)^2}$	q_{12}
$E_7(q)$	$2.(L_2(q) \times P\Omega_{12}^{+}(q)).2$	$q^{32}\frac{(q^{18}-1)(q^{14}-1)(q^{12}-1)}{(q^6-1)(q^4-1)(q^2-1)}$	q_{18}
$E_8(q)$	$2.P\Omega_{16}^{+}(q)$	$q^{64}(q^{10}+1)\frac{(q^{30}-1)(q^{24}-1)(q^{18}-1)}{(q^8-1)(q^6-1)(q^4-1)}$	q_{30}

Предложение 3.1. *Пусть G — группа. Предположим, что G $\mathrm{PSL}_2(7)$-свободна, т. е. G не имеет части, изоморфной $\mathrm{PSL}_2(7)$. Если $|\langle L, L^g\rangle : L|$ — степень простого числа для любой второй максимальной подгруппы L группы G и $g \in G$, то G разрешима.*

Доказательство. Пусть предложение неверно и G — контрпример минимального порядка. Пусть M — максимальная подгруппа группы G и L — максимальная подгруппа в M. Если $L \ntrianglelefteq M$, то существует $m \in M$ такое, что $\langle L, L^m\rangle = M$. Значит, по условию получаем, что индекс всякой максимальной подгруппы L группы M в M — степень простого числа. По лемме 2.5 M разрешима. Пусть $N > 1$ — нормальная подгруппа в G. Легко видеть, что G/N удовлетворяет условию. Поскольку G минимальна, G/N разрешима. Значит, G — минимальная неразрешимая группа. По лемме 2.4 G изоморфна одной из групп $\mathrm{PSL}_2(p)$ $(p > 3,\ 5 \nmid p^2-1)$, $\mathrm{PSL}_2(2^2)$, $\mathrm{PSL}_2(2^q)$, $\mathrm{PSL}_2(3^q)$, $\mathrm{PSL}_3(3)$, $S_z(2^q)$, где q нечетное простое.

Заметим, что G — простая группа лиева типа. Если $G \cong \mathrm{PSL}_3(3)$, то пусть P — силовская 13-подгруппа в G. Иначе пусть p — характеристика G и P —

силовская p-подгруппа в G. Положим $M = N_G(P)$. Тогда M — максимальная подгруппа в G. Пусть D — дополнение P в M. Тогда $M = PD$. Пусть r — наибольший простой делитель $|D|$, D_1 — максимальная подгруппа D со свойствами $|D : D_1| = r$ и $L = PD_1$. Тогда подгруппа L максимальна в M и поэтому L — вторая максимальная подгруппа в G. Пусть $g \in G \setminus M$. Перебирая все максимальные подгруппы в G из [6] для $\mathrm{PSL}_3(3)$, из [11] для $S_z(2^q)$ и из теоремы Диксона для простых групп $\mathrm{PSL}_2(p)$, $\mathrm{PSL}_2(2^2)$, $\mathrm{PSL}_2(2^q)$, $\mathrm{PSL}_2(3^q)$, легко видеть, что если H со свойством $L \le H$ — максимальная подгруппа в G, то $H = N_G(P) = M$. Если $\langle L, L^g\rangle \le M$, то $\langle P, P^g\rangle \le M$. Так как силовская p-подгруппа в M единственна, имеем $P^g = P$, поэтому $g \in M$; противоречие. Значит, $\langle L, L^g\rangle \nleq M$. Проверяя все максимальные подгруппы в G, содержащие L, получаем, что $M < \langle L, L^g\rangle$. Таким образом, $\langle L, L^g\rangle = G$ и $|\langle L, L^g\rangle : L| = r|G : M|$. По предположению $|\langle L, L^g\rangle : L|$ — степень простого числа, значит, $|G : L| = r^{a+1}$ и $|G : M| = r^a$. Если $G \cong \mathrm{PSL}_2(q)$, то $r = \max \pi(q-1)$ и $|G : M| = q + 1$; если $G \cong S_z(2^q)$, то $r = \max \pi(2^q - 1)$ и $|G : M| = 2^{2q} + 1$; если $G \cong \mathrm{PSL}_3(3)$, то $r = 3$ и $|G : M| = 2^4 \cdot 3^2$, ясно, что $|G : M| \ne r^a$; противоречие.

Стало быть, контрпримера нет, и предложение верно. $\square$

Для удобства будем обозначать символом $\Im$ класс внутренне сверхразрешимых групп G таких, что $G = R \rtimes Q$, где R, Q — силовские подгруппы в G и $\Phi(R) = 1$, Q циклическая, $\Phi(G) \le \Phi(Q)$.

Предложение 3.2. *Пусть G — группа. Предположим, что $|\langle L, L^g\rangle : L|$ — простое число для любой второй максимальной подгруппы L в G и $g \in G \backslash N_G(L)$. Тогда G либо сверхразрешима, либо принадлежит $\Im$.*

Доказательство. Пусть M — максимальная подгруппа группы G и L — максимальная подгруппа M. Если $L \ntrianglelefteq M$, то существует $m \in M$ такое, что $\langle L, L^m\rangle = M$. Следовательно, $|M : L|$ — простое число для любой максимальной подгруппы L в M. По теореме Хупперта M сверхразрешима. Следовательно, каждая собственная подгруппа G сверхразрешима. Если G несверхразрешима, то G — внутренне сверхразрешимая группа и $G/\Phi(G)$ — минимальная несверхразрешимая группа. Значит, $G/\Phi(G)$ изоморфна группе G_i из леммы 2.1, где $i \in \{1, 2, \dots, 6\}$.

Докажем сначала, что найдутся $g \in G_i$ и вторая максимальная подгруппа L в G_i такие, что $|\langle L, L^g\rangle : L|$ не простое, где $i = 3, 4, 5, 6$. Будем использовать определяющие соотношения и порождающие групп G_i из леммы 2.1 в нижеследующих рассуждениях.

Случай 1: G есть группа G_3. Пусть $L = \langle b\rangle$. Ясно, что L максимальна в $\langle a, b\rangle \cong Q_8$, в то время как $\langle a, b\rangle$ максимальна в G_3. Поэтому L — вторая максимальная подгруппа в G_3. Заметим, что $c_1{c_2}^{-1} = b^{-1}b^{c_1} \in \langle L, L^{c_1}\rangle$ и $(c_1{c_2}^{-1})^b = c_1c_2 \in \langle L, L^{c_1}\rangle$. Следовательно, ${c_1}^2 = c_1{c_2}^{-1} \cdot (c_1{c_2}^{-1})^b \in \langle L, L^{c_1}\rangle$, так что $c_1 \in \langle L, L^{c_1}\rangle$. Заметим, что $c_2 = c_1 \cdot (c_1{c_2}^{-1})^{-1} \in \langle L, L^{c_1}\rangle$. Значит, $r^2 \mid |\langle L, L^{c_1}\rangle : L|$.

Случай 2: G есть группа G_4. Если $p \ne 2$, то пусть L — максимальная подгруппа группы, содержащая b. Подгруппа $\langle b, a\rangle$ максимальна в G_4, тем самым L — вторая максимальная подгруппа G. Поскольку $c_1{c_2}^{-1} = b^{-1}b^{c_1} \in \langle L, L^{c_1}\rangle$ и $(c_1{c_2}^{-1})^b = c_2{c_3}^{-1} \notin \langle c_1{c_2}^{-1}\rangle$, имеем $\langle c_1{c_2}^{-1}\rangle \ntrianglelefteq \langle L, L^{c_1}\rangle$ и потому $r^2 \mid |\langle L, L^{c_1}\rangle : L|$. Если $p = 2$, то пусть L — максимальная подгруппа группы $\langle b, a\rangle$, содержащая a. Так как показатель $u (\mathrm{mod}\, r)$ равен p^β, то ${c_1}^a = {c_1}^{u^{1+2^{\beta-1}}}$ и ${c_2}^a = {c_2}^{u^{1+2^\beta}} = {c_2}^u$. Пусть $h = {c_1}^{-u^{1+2^{\beta-1}}+1}{c_2}^{-u+1}$. Заметим, что $h = a^{-1}a^{c_1c_2} \in \langle L, L^{c_1c_2}\rangle$ и h^a

$= {c_1}^{u^{1+2^{\beta-1}}(-u^{1+2^{\beta-1}}+1)}{c_2}^{u(-u+1)} \in \langle L, L^{c_1c_2}\rangle$. Пусть $g = h^{-u^{1+2^{\beta-1}}}h^a$. Тогда $g = {c_2}^{u(u-1)(u^{2^{\beta-1}}-1)} \in \langle L, L^{c_1c_2}\rangle$. Если $g = 1$, то $r \mid u(u-1)(u^{2^{\beta-1}}-1)$. Отметим, что показатель $u(\operatorname{mod} r)$ равен p^β и $\beta \geq 2$. Следовательно, $2^\beta \mid 2^{\beta-1}$; противоречие. Отсюда $(r, u(u-1)(u^{2^{\beta-1}}-1)) = 1$ и потому $c_2 \in \langle L, L^{c_1c_2}\rangle$. Очевидно, что ${c_1}^{-u^{1+2^{\beta-1}}+1} = h{c_2}^{u-1} \in \langle L, L^{c_1c_2}\rangle$ и $(r, u^{1+2^{\beta-1}}-1) = 1$. Значит, $c_1 \in \langle L, L^{c_1c_2}\rangle$ и $r^2 \mid |\langle L, L^{c_1c_2}\rangle : L|$.

Случай 3: G есть группа G_5. Если $p \neq 2$, то пусть L — максимальная подгруппа группы $\langle a, b, c\rangle$, содержащая a. Очевидно, что L — вторая максимальная подгруппа в G_5. По аналогии со случаем 2 имеем $r^2 \mid |\langle L, L^{c_1}\rangle : L|$. Предположим, что $p = 2$. Пусть L — максимальная подгруппа группы $\langle a, b, c\rangle$, содержащая a и c. Так как ${c_1}^2 = c^{-1}c^{c_1} \in \langle L, L^{c_1}\rangle$, то $c_1 \in \langle L, L^{c_1}\rangle$ и $c_2 = {c_1}^a \in \langle L, L^{c_1}\rangle$. Поэтому $r^2 \mid |\langle L, L^{c_1}\rangle : L|$.

Случай 4: G есть группа G_6. Пусть $N = \langle c_1, c_2, \dots, c_p\rangle$. Очевидно, что N — единственная минимальная нормальная подгруппа G. Пусть M — максимальная подгруппа G. Если $N \leq M$, то M/N — максимальная подгруппа G/N. Так как порядок максимальной подгруппы в G/N равен p^α или $qp^{\alpha-1}$, то $|M| = r^p p^\alpha$ или $r^p qp^{\alpha-1}$. Если $N \nleq M$, то $G = NM$ и $N \cap M = 1$. Значит, $|M| = qp^\alpha$. Поэтому порядок максимальной подгруппы в G равен $r^p p^\alpha$, $r^p qp^{\alpha-1}$ или qp^α. Так как ${c_1}^{a^p} = {c_1}^t$, то $c_1 = {c_1}^{a^{p^\alpha}} = {c_1}^{t^\alpha}$. Поскольку показатель $t(\operatorname{mod} r)$ равен $p^{\alpha-1}$, имеем $p^{\alpha-1} \mid \alpha$ и потому либо $\alpha = 1$, либо $p = 2$ и $\alpha = 2$.

Если $p = 2$ и $\alpha = 2$, то пусть $L = \langle a\rangle$. Очевидно, что L — вторая максимальная подгруппа в G. Заметим, что $c_1{c_2}^{-1} = a^{-1}a^{c_1} \in \langle L, L^{c_1}\rangle$ и $(c_1{c_2}^{-1})^a = c_1c_2 \in \langle L, L^{c_1}\rangle$. Следовательно, ${c_1}^2 = c_1{c_2}^{-1} \cdot (c_1{c_2}^{-1})^a \in \langle L, L^{c_1}\rangle$, и потому $c_1 \in \langle L, L^{c_1}\rangle$. Кроме того, $c_2 = c_1 \cdot (c_1{c_2}^{-1})^{-1} \in \langle L, L^{c_1}\rangle$. Значит, $r^2 \mid |\langle L, L^{c_1}\rangle : L|$.

Если $p = 2$ и $\alpha = 1$, то пусть $L = \langle b\rangle$ и $K_0 = \langle b, b^{c_1c_2}\rangle$. Очевидно, что L — вторая максимальная подгруппа в G. Положим $h_0 = {c_1}^{-v+1}{c_2}^{-v^u+1} = b^{-1}b^{c_1c_2} \in K_0$. Предположим, что ${h_0}^b = {h_0}^n \in \langle h_0\rangle$, где n целое. Тогда $r \mid (v-1)(v-n)$ и $r \mid (v^u-n)(v^u-1)$. Так как показатель $v(\operatorname{mod} r)$ равен q, если $r \mid v^u-1$, то $q \mid u$, что противоречит тому, что показатель $u(\operatorname{mod} q)$ равен p. Значит, $r \nmid v^u-1$. Следовательно, $r \mid v-n$ и $r \mid v^u-n$. Поэтому $r \mid v^{u-1}-1$. Как и выше, имеем $q \mid u-1$; снова противоречие. Тем самым $\langle h_0\rangle \ntrianglelefteq K_0$ и $r^2 \mid |K_0|$, т. е. $r^2 \mid |K_0 : L|$.

Если $p \neq 2$, то пусть $L = \langle a\rangle$. По аналогии со случаем 2 $r^2 \mid |\langle L, L^{c_1}\rangle : L|$.

Из проведенного выше рассуждения видно, что если $G/\Phi(G) \cong G_i$, где $i = 3, 4, 5, 6$, то существуют $g\Phi(G) \in G/\Phi(G)$ и вторая максимальная подгруппа $L/\Phi(G)$ такие, что $r^2 \mid |\langle L/\Phi(G), (L/\Phi(G))^{g\Phi(G)}\rangle : L/\Phi(G)|$. Ясно, что L — вторая максимальная подгруппа в G и $r^2 \mid |\langle L, L^g\rangle : L|$, что противоречит предположению. Значит, либо $G/\Phi(G) \cong G_1$, либо $G/\Phi(G) \cong G_2$. Следовательно, силовская q-подгруппа в $G/\Phi(G)$ циклическая. Пусть $|G| = r^m q^n$, где $m \geq 2$ и $n \geq 1$. Пусть R — нормальная силовская r-подгруппа в G и Q — силовская q-подгруппа в G. Тогда по [4, теорема 7.5] $R/\Phi(R)$ — минимальная нормальная подгруппа в $G/\Phi(R)$. Очевидно, что $r^2 \mid |R/\Phi(R)|$. Поэтому $Q\Phi(R)$ — максимальная подгруппа G. Если $Q\Phi(R) \trianglelefteq G$, то $G/\Phi(R)$ нильпотентна и G тоже нильпотентна; противоречие. Значит, $Q\Phi(R) \ntrianglelefteq G$ и существует $g \in G$ такое, что $G = \langle Q\Phi(R), (Q\Phi(R))^g\rangle = \langle Q, Q^g\rangle$. Если $\Phi(R) \neq 1$, то пусть L — максимальная подгруппа группы $Q\Phi(R)$, содержащая Q. Очевидно, что L — вторая максимальная подгруппа в G, $G = \langle L, L^g\rangle$. Значит, $r^2 \mid |\langle L, L^g\rangle : L|$, что противоречит предположению. Стало быть, $\Phi(R) = 1$, и потому Q — максимальная подгруппа в G. Если $\Phi(G) \not\leq \Phi(Q)$, то пусть L — максимальная подгруппа в Q такая, что $Q = L\Phi(G)$. Как и выше, найдется $g \in G$ такое, что $G = \langle L, L^g \rangle$. Следовательно, $|\langle L, L^g \rangle : L| = r^m q$ не простое; противоречие. Значит, $\Phi(G) \leq \Phi(Q)$. Тем самым группа $Q/\Phi(G)$ циклическая. Следовательно, группа $Q/\Phi(Q)$ циклическая. Согласно [12, 5.2.7] $Q/\Phi(Q)$ — циклическая группа простого порядка, так что Q циклическая, откуда $G \in \Im$. Доказательство закончено. □

Теорема 3.3. *Пусть G — группа. Предположим, что $|\langle L, L^g \rangle : L|$ не содержит квадратов для любой второй максимальной подгруппы L в G и $g \in G \setminus N_G(L)$. Тогда либо G сверхразрешима, либо $G \in \Im$.*

Доказательство. Пусть существует подгруппа $N \trianglelefteq G$ такая, что $N \leq L$. Тогда $\overline{G} = G/N$, $\overline{M} = M/N$ — максимальная подгруппа группы $\overline{G}$ и $\overline{L} = L/N$ — максимальная подгруппа группы $\overline{M}$. Пусть $m \in \overline{M} \setminus N_{\overline{M}}(\overline{L})$, тогда очевидно, что $\langle \overline{L}, \overline{L}^m \rangle = \overline{M}$. Из условия следует, что $|\overline{M} : \overline{L}| = |M : L|$ не содержит квадратов и $|\overline{G} : \overline{M}| = |G : M|$.

Если в G есть две минимальные нормальные подгруппы N_1 и N_2, то G/N_i удовлетворяют условию теоремы 3.3. Значит, G/N_i либо сверхразрешима, либо принадлежит $\Im$, где $i = 1, 2$. Заметим, что $G \cong G/(N_1 \cap N_2)$ изоморфна подгруппе группы $G/N_1 \times G/N_2$. Пусть $G = H \times K$, где H и K изоморфны подгруппам в G/N_1 и G/N_2 соответственно. Если G несверхразрешимая, то $H \in \Im$ или $K \in \Im$. Без ограничения общности можем предполагать, что $H \in \Im$. Предположим, что $K \neq 1$. Тогда G имеет максимальную подгруппу M, содержащую H. Пусть L — максимальная подгруппа в M. Если $L \triangleleft M$, то $|M : L|$ — простое число. Предположим, что L — не нормальная максимальная подгруппа группы M. Для всякого $g \in M \setminus N_M(L)$ имеем $M = \langle L, L^g \rangle$. Значит, $|M : L|$ не содержит квадратов. Так как M разрешима, $|M : L|$ — степень простого числа. Стало быть, $|M : L|$ — простое число. По теореме Хупперта M сверхразрешима. Следовательно, H сверхразрешима; противоречие. Значит, $K = 1$, и результат верен. Поэтому можем предполагать, что G имеет единственную минимальную нормальную подгруппу N.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G и L — максимальная подгруппа M. Тогда M/L_M — примитивная группа подстановок степени, не содержащей квадратов, и $|M/L_M : K/L_M|$ не содержат квадратов для любой максимальной подгруппы K/L_M группы M/L_M. Предположим, что M/L_M неразрешимая. В силу [13] легко получить, что группа $\mathrm{Soc}(M/L_M)$ изоморфна одной из простых групп A_5, A_6, A_7 и $\mathrm{PSL}_2(p)$, где $p = 4t + 1$ и t нечетно и не содержит квадратов.

Так как N — неабелева минимальная нормальная подгруппа группы G, можем предполагать, что $N = N_1 \times N_2 \times \dots \times N_t$, где N_i — попарно изоморфные неабелевы простые группы, $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Выберем максимальную подгруппу M_1 группы N_1, взятую из леммы 2.3. Очевидно, что $\{N_1^x, N_2^x, \dots, N_t^x\} = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$ для любого $x \in G$. Следовательно, существует элемент $x_i \in G$ такой, что $M_1^{x_i} \leq N_i$ для всякого $i \in \{1, 2, \dots, t\}$. Пусть $K = M_1^{x_1} \times M_1^{x_2} \times \dots \times M_1^{x_t}$. Если $x \in G$, то $K^x \leq G$ и $K^x = M_1^{x_1 x} \times M_1^{x_2 x} \times \dots \times M_1^{x_t x}$. Так как $\{N_1^{x_1 x}, N_2^{x_2 x}, \dots, N_t^{x_t x}\} = \{N_1, N_2, \dots, N_t\}$, для каждого i существует единственное j такое, что $M_1^{x_i x} \leq N_j$, поэтому $M_1^{x_i x x_j^{-1}} \leq N_1$ и $N_1^{x_i x x_j^{-1}} = N_1$. В силу леммы 2.3 получаем, что класс сопряженности и класс автоморфизма M_1 в N_1 равны. Стало быть, существует $y_i \in N_1$ такое, что $M_1^{x_i x x_j^{-1}} = M_1^{y_i}$. Пусть $n_j = y_i^{x_j}$. Тогда $n_j \in N_j$ и $M_1^{x_i x} = M_1^{x_j n_j}$. Предположим, что $n = n_1 n_2 \dots n_t$. Тогда $K^x = M_1^{x_1 n} \times M_1^{x_2 n} \times \dots \times M_1^{x_t n} = K^n$. Значит, $x \in N_G(K)N$ и $G = N_G(K)N$. Пусть M — максимальная подгруппа группы G, содержащая $N_G(K)$. Тогда $G = NM$, $M_G = 1$, $\mathrm{Soc}(G) = N$ и $M \cap N_1 = M_1$. Если $N_G(K) < M$, то пусть H и L — максимальные подгруппы групп G и H соответственно, содержащие $N_M(K)$, и пусть $\mathrm{cl}_G(L) = 2$. Если $N_G(K) = M$, то обозначим символом r минимальный простой делитель порядка K и $K_r \in \mathrm{Syl}_r(K)$; тогда $M = N_M(K_r)K$. Пусть H и L — максимальные подгруппы групп G и H соответственно, содержащие $N_M(K_r)$, и пусть $\mathrm{cl}_G(L) = 2$. Тогда $G = \langle L^G \rangle$ и $L_G = 1$. В силу [14, теорема A] существует элемент $g \in G$ такой, что $\langle L^g, L \rangle = G$.

Пусть $|G : H| = n$. Поскольку $H_G = 1$, группа G — примитивная группа степени n. Из того, что $|\langle L^g, L \rangle : L| = |G : L| = |G : H||H : L|$, получаем, что число n не содержит квадратов. Так как цоколь группы G равен N, по теореме О'Нана — Скотта (см. [15, теорема 4.1A]) легко видеть, что $t = 1$. Поэтому $N = N_1$ и G изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Aut}(N)$.

Случай 1 : $N = A_n$. Шоуррп $M = S_{n-1} \cap G$ — максимальная подгруппа G, и индекс всякой максимальной подгруппы в M не содержит квадратов. В силу [13] легко получить, что если группа $\mathrm{Soc}(M)$ неразрешима, то она изоморфна одной из простых групп A_5, A_6, A_7. Так как $\mathrm{Soc}(M) = A_{n-1}$, имеем $n \in \{5, 6, 7, 8\}$.

Если $N = A_5$, то $G \cong A_5$ или $G \cong S_5$. Пусть $P_1 = \langle (12345) \rangle$ и $P_2 = \langle (123)(45) \rangle$. Тогда $N_{A_5}(P_1) = P_1 : 2$ и $N_{S_5}(P_2) = 2 \times S_3 = P_2 : 2$ — максимальные подгруппы групп A_5 и S_5 соответственно и, следовательно, $P_1^{(123)} \nleq N_{A_5}(P_1)$, $P_2^{(12345)} \nleq N_{S_5}(P_2)$. Из вида максимальных подгрупп в A_5 и S_5 легко видеть, что $A_5 = \langle P_1, P_1^{(123)} \rangle$ и $S_5 = \langle P_2, P_2^{(12345)} \rangle$. Значит, имеются 2-максимальная подгруппа K в G и $g \in G$ такие, что $\langle K^g, K \rangle = G$ и $4 \mid |\langle K^g, K \rangle : K|$; противоречие.

Предположим, что $N = A_6$ и G изоморфна подгруппе группы $\mathrm{Aut}(N)$. Если $G \notin \{A_6, S_6\}$ [6], то легко получить противоречие. Значит, $G \cong A_6$ или $G \cong S_6$. В силу [6] в S_6 и A_6 имеются 2-максимальные подгруппы $3^2 : D_4$ и $3^2 : 2$. Пусть $P_1 = 3^2 : D_4$ и $P_2 = 3^2 : 2$. Тогда $\langle P_2^{(12345)}, P_2 \rangle = S_6$ и $\langle P_1^{(12345)}, P_1 \rangle = A_6$, поэтому существуют 2-максимальная подгруппа K в G и $g \in G$ такие, что $4 \mid |\langle (K^g, K \rangle : K|$; противоречие.

Если $N = A_7$, то $G \cong A_7$ или $G \cong S_7$. Ввиду [6] в A_7 и $\mathrm{PSL}_2(7)$ имеются максимальные подгруппы $\mathrm{PSL}_2(7)$ и K соответственно, где $K \cong 7 : 3$. Пусть $g \in \mathrm{PSL}_2(7) \setminus K$. Легко видеть, что $\mathrm{PSL}_2(7) = \langle K, K^g \rangle$. Таким образом, $4 \mid |\langle K, K^g \rangle : K|$, что невозможно. Поэтому $G \cong S_7$. В силу [6] S_7 имеет вторую максимальную подгруппу K такую, что $K \cong 7 : 3$. Из приведенного выше рассуждения приходим к противоречию.

Если $N = A_8$, то $G \cong A_8$ или $G \cong S_8$. В G имеется 2-максимальная подгруппа L, изоморфная $S_6 \cap G$. Пусть g — элемент G порядка 15. Тогда $\langle L, L^g \rangle = G$ и $8 \mid |\langle L, L^g \rangle : L|$, что невозможно.

Случай 2 : N — спорадическая простая группа. Предположим, что $G = N$ и M, L и d определены в соответствующей строке табл. 3. В силу [6] и http://brauer.maths.qmul.ac.uk/Atlas/v3 M и L — максимальные подгруппы групп G и M соответственно. Если $G = He$, возьмем $x \in G$ такое, что $|g| = 7$; тогда $L^g \neq L$. Из вида максимальных подгрупп группы He легко получить, что $He = \langle L, L^g \rangle$. Таким образом, $d \mid |\langle L, L^g \rangle : L|$; противоречие. Предположим, что $G \neq He$. Пусть $x \in M \setminus L$. Тогда $M = \langle L^x, L \rangle$. Из [6] получаем, что

$d \mid |\langle L, L^g\rangle : L|$; противоречие.

Предположим, что $G \neq N$. Тогда $G \cong \mathrm{Aut}(N)$. Имеем $|\,\mathrm{Out}(N)| = 2$. Пусть M — максимальная подгруппа группы N из леммы 2.3(1). Тогда N — максимальная подгруппа группы G и M — 2-максимальная подгруппа в G. Пусть $g \in N \setminus M$. Тогда $N = \langle M, M^g\rangle$. Значит, $|\langle M, M^g\rangle : M|$ имеет делитель-квадрат; противоречие.

Таблица 3

G	M	L	d	G	M	L	d
Co_3	M_{23}	M_{22}	2^2	Co_1	Co_2	McL	2^{11}
Co_2	McL	M_{22}	3^4	HN	A_{12}	A_{11}	2^2
M_{11}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	$11:5$	2^2	M_{12}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	$11:5$	2^2
M_{22}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	$11:5$	2^2	M_{23}	M_{22}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	2^5
M_{24}	M_{23}	M_{11}	2^3	J_1	$\mathrm{PSL}_2(11)$	$11:5$	2^2
J_2	$U_3(3)$	$\mathrm{PSL}_2(7)$	2^2	J_3	$\mathrm{PSL}_2(19)$	$19:9$	2^2
J_4	$U_3(3)$	$\mathrm{PSL}_2(7)$	2^2	Fi_{22}	M_{12}	M_{11}	2^2
Fi_{23}	$S_8(2)$	$\mathrm{PSL}_2(17)$	2^{12}	HS	M_{22}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	2^5
Fi'_{24}	Fi_{23}	$\mathrm{PSL}_2(23)$	2^{15}	McL	M_{22}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	2^5
He	$S_4(4):2$	$S_4(4)$	7^3	$O'N$	M_{11}	$\mathrm{PSL}_2(11)$	2^2
Th	$\mathrm{PSL}_3(3)$	$13:3$	2^4	Ru	A_8	A_7	2^3
Suz	$U_5(2)$	$\mathrm{PSL}_2(11)$	2^8	Ly	$G_2(5)$	$U_3(3):2$	5^6
B	Th	$\mathrm{PSL}_3(3)$	2^{11}	M	$\mathrm{PSL}_2(71)$	$71:35$	2^3

Случай 3 : N простая группа лиева типа над $GF(q)$, где $q = p^f$ — степень простого числа p.

В силу [6] имеем табл. 4, где g — элемент группы N, $\mathrm{Out}(N)$ означает группу внешних автоморфизмов группы N, M и L — максимальные подгруппы групп N и M соответственно.

Таблица 4

N	$\mathrm{Out}(N)$	G	Тип M	Тип L	$\lvert g\rvert$	$\lvert\langle L^g, L\rangle : L\rvert$
$\mathrm{PSL}_2(8)$	3	N	D_{18}	C_9	7	$2^3 \cdot 7$
$\mathrm{PSL}_3(4)$	D_{12}	N	$3^2 : Q_8$	$3^2 : 4$	7	$2^4 \cdot 5 \cdot 7$
$\mathrm{PSL}_6(2)$	2	N	$2^8 : (A_8 \times S_3)$	$2^8 : (A_8 \times C_3)$	31	$2 \cdot 3^2 \cdot 7 \cdot 31$
$U_6(2)$	S_3	N	$3^{1+4} : (Q_8 \times Q_8) : S_3$	$3^{1+4} : (Q_8 \times Q_8) : C_3$	11	$2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
$U_6(2)$		$N{:}S_3$	$3^{1+4} : (Q_8{\times}Q_8){:}S_3{:}S_3$	$3^{1+4}{:}(Q_8 \times Q_8){:}S_3{:}C_3$	11	$2^9 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 11$
$\Omega_7(2)$	1	N	$S_3 \times S_6$	$3 \times S_6$	7	$2^5 \cdot 3 \cdot 7$
$P\Omega_8^+(2)$	S_3	N	$(3 \times U_4(2)) : 2$	$3 \times U_4(2)$	7	$2^6 \cdot 5 \cdot 7$

Предположим, что $N \in \{U_6(2), D_4(2), \mathrm{PSL}_6(2), \mathrm{PSL}_2(8)\}$ и G не изоморфна ни одной из групп $\mathrm{Aut}(U_6(2))$, $\mathrm{Aut}(D_4(2))$. Если $N < G$, то в силу [6] N — максимальная подгруппа группы G и M — 2-максимальная подгруппа G. Для

$g \in N$ из табл. 4 имеем $M^g \neq M$. Значит, $N = \langle M^g, M \rangle$, и $|N : M|$ имеет делитель-квадрат; противоречие. Если $G = N$, то для максимальной подгруппы в M, 2-максимальной подгруппы L в G и $g \in N$ в табл. 4 имеем $L^g \neq L$. Перебирая все максимальные подгруппы группы G, содержащие L, получаем, что $G = \langle L^g, L \rangle$ и $|N : L|$ имеет делитель-квадрат; противоречие.

Если $G \leq \mathrm{Aut}(\mathrm{PSL}_3(4))$, то обозначим символом M максимальную подгруппу группы G, содержащую $N_G(N_3)$, где N_3 — силовская 3-подгруппа в N. Тогда в силу [6] M имеет максимальную подгруппу L, содержащую N_3 и $g \in G$, из табл. 4 такую, что $\langle L^g, L \rangle = G$ и $2^8 \mid |\langle L^g, L \rangle : L|$; противоречие.

Если $G = \mathrm{Aut}(U_6(2))$, то $3^{1+4} : (Q_8 \times Q_8) : S_3 : S_3$ и $3^{1+4} : (Q_8 \times Q_8) : S_3 : 3$ — максимальные подгруппы группы G и $3^{1+4} : (Q_8 \times Q_8) : S_3 : S_3$ соответственно. Пусть $g \in N$ удовлетворяет свойству $|g| = 11$ и $L = 3^{1+4} : (Q_8 \times Q_8) : S_3 : 3$. Тогда $\langle L^g, L \rangle = N.3$ и $|\langle L^g, L \rangle : L| = 2^9 \cdot 5 \cdot 7 \times 11$; противоречие.

Если $G = \mathrm{Aut}(D_4(2))$, то $N.3$ и $3^{1+4} : 2S_4$ — максимальные подгруппы групп G и $N.3$ соответственно. Пусть $g \in N$ таково, что $|g| = 7$ и $L = 3^{1+4} : 2S_4$. Тогда $\langle L^g, L \rangle = N.3$ и $|\langle L^g, L \rangle : L| = 2^8 \cdot 5^2 \cdot 7$; противоречие.

С этого момента предположим, что N не представлена в табл. 4. Тогда найдутся простое число r в табл. 2 и $G = N_G(N_r)N$, где N_r — силовская r-подгруппа группы N. Пусть M — максимальная подгруппа в G, содержащая $N_G(N_r)$. Тогда $G = N_M(N_r)N$. Если $N_M(N_r) \neq M$, то существует 2-максимальная подгруппа L группы G, содержащая $N_M(N_r)$ и такая, что $\mathrm{cl}_G(L) = 2$. В этом случае ясно, что $G = \langle L^G \rangle$, $L_G = 1$. В силу [14, теорема A] существует $g \in G$ такое, что $\langle L^g, L \rangle = G$. Таким образом, $|\langle L, L^g \rangle : L| = |LN : L| = |N : N \cap L|$. Так как $N \cap L$ — подгруппа в N, содержащая N_r, в силу [13] $|N : N \cap L|$ имеет делитель-квадрат; противоречие. Если $N_M(N_r) = M$, то можем положить $M = N_r D$ и $N_r \cap D = 1$. Имеем $G = DN$ и $G/N \cong D/D \cap N$. Так как $M \neq N_r$, то $D \neq 1$. Пусть D_1 — максимальная подгруппа D. Тогда $D_1 N_r$ — максимальная подгруппа M. Таким образом, в G имеется 2-максимальная подгруппа L, содержащая $D_1 N_r$ и такая, что $\mathrm{cl}_G(L) = 2$. Если G — простая группа, т. е. $G = N$, то $\langle L^G \rangle = G$, $L_G = 1$. В силу [14, теорема A] существует элемент $g \in G$ такой, что $\langle L^g, L \rangle = G$. Согласно [13] $|\langle L, L^g \rangle : L|$ имеет делитель-квадрат; противоречие. Предположим, что $G \neq N$. Можем считать, что $|D : D_1|$ — простое число и $D_1 N$ — максимальная нормальная подгруппа в G. Пусть K — максимальная подгруппа группы $D_1 N$, содержащая $D_1 N_r$ и такая, что $\mathrm{cl}_G(K) = 2$. Тогда K — 2-максимальная подгруппа в G и $D_1 N = KN$. Таким образом, $|D_1 N : K| = |KN : K| = |N : N \cap K|$. Так как $N \cap K$ — подгруппа группы N, содержащая N_r, согласно [13] $|D_1 N : K|$ имеет делитель-квадрат; противоречие.

Предположим, что G разрешима. Из приведенного выше рассуждения видно, что любая максимальная подгруппа группы G сверхразрешима. Если G несверхразрешима, то G — внутренне сверхразрешимая группа и $G/\Phi(G)$ — минимальная несверхразрешимая группа. Поэтому $G/\Phi(G)$ изоморфна G_i в лемме 2.1, где $i = 1, 2, \dots, 6$. Оставшаяся часть доказательства аналогична доказательству предложения 3.2 и здесь не приводится. $\square$

4. Индекс P в $\langle P, P^g \rangle$ для силовской подгруппы P группы G

Предложение 4.1. *Пусть G — группа. Если $|\langle P, P^g \rangle : P|$ — степень простого числа для любой силовской подгруппы P группы G и $g \in G$, то G разрешима.*

Доказательство. Пусть предложение неверно и G — контрпример минимального порядка. Пусть M — произвольная максимальная подгруппа в G и P_1 — силовская подгруппа группы M. Тогда существует силовская подгруппа P группы G такая, что $P_1 \leq P$. Так как $|\langle P, P^g\rangle : P|$ — степень простого числа, имеем $|\pi(\langle P, P^m\rangle)| \leq 2$. Ясно, что ${P_1}^m \leq P^m$. Следовательно, $\langle P_1, P_1^m\rangle \leq \langle P, P^m\rangle$, в частности, $\left|\pi(\langle P_1, P_1^m\rangle)\right| \leq 2$. Значит, $\left|\langle P_1, P_1^m\rangle : P_1\right|$ — степень простого числа, и M удовлетворяет предположению. По индукционному предположению M разрешима. Следовательно, все собственные подгруппы группы G разрешимы.

Рассмотрим фактор-группы группы G. Предположим, что в G существует нетривиальная нормальная подгруппа N. Тогда N разрешима. Пусть Q_1/N — произвольная силовская подгруппа группы G/N. Тогда существует силовская подгруппа Q группы G такая, что $Q_1/N = QN/N$. Для всякого $gN \in G/N$ получаем, что

$$\begin{aligned}|\langle Q_1/N, (Q_1/N)^{gN}\rangle : Q_1/N| &= |\langle Q, Q^g\rangle N/N : QN/N| \\ &= |\langle Q, Q^g\rangle : Q|/|\langle Q, Q^g\rangle \cap N : Q \cap N|\end{aligned}$$

есть степень простого числа. Это показывает, что G/N удовлетворяет предположению. По индукционному предположению группа G/N разрешима, стало быть, G разрешима; противоречие. Значит, не существует ни одной нетривиальной нормальной подгруппы в G, следовательно, G — простая группа. Ввиду [16, лемма 2.1] найдутся $g \in G$ и $H \leq G$ такие, что $G = \langle H, H^g\rangle$, где H — силовская подгруппа группы G. Тогда из предположения следует, что группа G разрешима; снова противоречие. Значит, контрпримера нет. $\square$

Предложение 4.2. *Пусть G — группа. Если $|\langle P, P^g\rangle : P|$ — простое число для всякой силовской подгруппы P группы G и $g \in G \setminus N_G(P)$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Пусть предложение неверно и G — контрпример минимального порядка.

Пусть M — максимальная подгруппа группы G и P_1 — силовская p-подгруппа M, где $p \in \pi(M)$. Тогда существует силовская p-подгруппа P в G такая, что $P_1 \leq P$. Пусть $|P| = p^n$, где n — натуральное число. Пусть $m \in M \setminus N_M(P_1)$. Тогда $P_1 < \langle P_1, {P_1}^m\rangle \leq \langle P, P^m\rangle$. Если $m \in N_G(P)$, то $P = \langle P, P^m\rangle$ — p-подгруппа, следовательно, $\langle P_1, {P_1}^m\rangle$ тоже p-группа. Но $P_1 \leq \langle P_1, {P_1}^m\rangle$ и P_1 — силовская p-подгруппа группы M. Стало быть, $P_1 = \langle P_1, {P_1}^m\rangle$, поэтому $m \in N_M(P_1)$; противоречие. Значит, $m \in G \setminus N_G(P)$, и по условию $|\langle P, P^g\rangle : P| = r$ — простое число. Ясно, что $|\langle P, P^m\rangle| = p^n r$. Так как $\left|\langle P_1, {P_1}^m\rangle\right| \mid |\langle P, P^m\rangle|$ и $p \nmid \left|\langle P_1, {P_1}^m\rangle : P_1\right|$, получаем, что $\left|\langle P_1, P_1^m\rangle : P_1\right| = r$ — простое число. В силу минимальности G группа M сверхразрешима. Предположим, что $\Phi(G) \neq 1$. Легко показать, что $G/\Phi(G)$ удовлетворяет условиям, и по предположению индукции группа $G/\Phi(G)$ сверхразрешима. Так как формация всех сверхразрешимых групп насыщенна, G сверхразрешима; противоречие. Значит, $\Phi(G) = 1$, и по лемме 2.2 G минимальная несверхразрешимая, так что $G \cong G_i$ в лемме 2.1, где $1 \leq i \leq 6$.

Предположим, что $G \cong G_i$, где $i = 1, 2, 3, 4, 5$, и пусть Q — не нормальная силовская подгруппа группы G. Тогда Q максимальна в G и потому существует $g \in G$ такое, что $\langle Q, Q^g\rangle = G$. Следовательно, $|\langle Q, Q^g\rangle : Q| = |G : Q|$ не простое, что противоречит условию. Значит, $G \cong G_6$. Если $p = 2$ и $\alpha = 1$, то пусть

$Q = \langle b \rangle$ — силовская q-подгруппа группы G. Иначе пусть $Q = \langle a \rangle$ — силовская p-подгруппа в G. Из доказательства теоремы 3.3 имеем $r^2 \mid |\langle Q, Q^{g_0} \rangle : Q|$ для некоторого $g_0 \in G$; окончательное противоречие. Значит, контрпримера нет, и доказательство закончено. □

Теорема 4.3. *Пусть G — группа. Если $|\langle P, P^g \rangle : P|$ без квадратов для любой силовской подгруппы P в G и $g \in G \setminus N_G(P)$, то G сверхразрешима.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из доказательства предложения 4.2. □

Благодарность. Авторы очень благодарны рецензенту, который внимательно прочитал рукопись статьи и снабдил авторов множеством ценных предложений и полезных комментариев.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Huppert B.* Endliche Gruppen. I. Berlin; Heidelberg; New York: Springer-Verl., 1979.
2. *Doerk K., Hawkes T.* Finite soluble groups. Berlin; New York: Walter de Gruyter, 1992.
3. *Robinson D. J. S.* A course in the theory of groups. New York: Springer-Verl., 1982.
4. *Chen Zh.* Inner outer Σ-group and minimal non Σ-group. Chongqing: Southwest Normal Univ. Press, 1988.
5. *Liebeck M. W., Prager C. E., Saxl J.* A classification of the maximal subgroups of the finite alternating and symmetric groups // J. Algebra. 1987. V. 111. P. 365–383.
6. *Conway J. H., Curtis R. T., Norton S. P., Parker R. A., Wilson R. A.* ATLAS of finite groups. Oxford: Clarendon Press, 1985.
7. *Liebeck M. W., Saxl J., Seitz G. M.* Subgroups of maximal rank in groups of Lie type // Proc. London Math. Soc. 1992. V. 65, N 3. P. 297–325.
8. *Kleidman P. B., Liebeck M.* The subgroups structure of the finite classical groups. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1990. (London Math. Soc. Lect. Notes Ser.; V. 129).
9. *Thompson J. G.* Nonsolvable finite groups all of whose local subgroups are solvable. I // Bull. Amer. Math. Soc. 1968. V. 74, N 2. P. 383–437.
10. *Guralnick R. M.* Subgroups of prime power index in a simple group // J. Algebra. 1983. V. 81, N 2. P. 304–311.
11. *Suzuki M.* On a class of doubly transitive groups // Ann. Math. 1962. V. 75, N 2. P. 105–145.
12. *Kurzweil H., Stellmacher B.* The theory of finite groups: an introduction. New York: Springer-Verl., 2004.
13. *Li C., Seress A.* The primitive permutation groups of squarefree degree // Bull. London Math. Soc. 2003. V. 35. P. 635–644.
14. *Flavell P.* Generating finite groups with conjugates of a subgroup. II // J. Algebra. 2000. V. 232. P. 578–616.
15. *Dixon J. D., Mortimer B.* Permutation groups. Berlin: Spring-Verl., 1996.
16. *Aschbacher M., Guralnick R.* Solvable generation of groups and Sylow subgroups of the lower central series // J. Algebra. 1982. V. 77. P. 189–201.

Статья поступила 15 декабря 2011 г.

Xianhua Li (Ли Сянхуа),
School of Mathematics Science, Soochow University,
Suzhou 215006, P. R. China
xhli@suda.edu.cn

Xinjian Zhang (Чжан Синцзян)
School of Mathematical Science, Huaiyin Normal University,
Huaian, Jiangsu 223300, P. R. China