Сибирский математический журнал
Сентябрь—октябрь, 2013. Том 54, № 5

УДК 512.54

ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ГРУППЫ, НАСЫЩЕННЫЕ ПРЯМЫМИ ПРОИЗВЕДЕНИЯМИ ГРУПП СУДЗУКИ НА ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ АБЕЛЕВЫ 2–ГРУППЫ

А. А. Дуж, Д. В. Лыткина

Аннотация. Доказывается, что группы, насыщенные прямыми произведениями групп Судзуки на элементарные абелевы группы, локально конечны. Дается описание таких групп.

Ключевые слова: периодическая группа, насыщенность.

1. Введение

Пусть $\mathfrak{M}$ — непустое множество конечных групп. Группа G *насыщена* группами из $\mathfrak{M}$, если любая конечная подгруппа из G содержится в подгруппе группы G, изоморфной некоторой группе из $\mathfrak{M}$ [1]. Обзор результатов о строении групп, насыщенных теми или иными множествами групп, можно найти в [2]. В частности, К. А. Филиппов [3] показал, что периодическая группа, насыщенная простыми группами Судзуки, изоморфна простой группе Судзуки над некоторым локально конечным полем характеристики 2.

Настоящая работа посвящена обобщению этого результата.

2. Основной результат

Пусть $\mathfrak{M} = \{Sz(2^{2m+1}) \times V_n \mid m = 1, 2, \dots, n = 0, 1, \dots\}$, где V_n — элементарная абелева 2-группа порядка 2^n.

Теорема. *Пусть G — периодическая группа, содержащая инволюцию. Если каждая конечная подгруппа четного порядка из G содержится в подгруппе, изоморфной некоторому элементу из $\mathfrak{M}$, то $G \simeq P \times V$, где V — элементарная абелева 2-группа, а $P \simeq Sz(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2. В частности, G локально конечна.*

Следствие. *Если G — периодическая группа, насыщенная группами из $\mathfrak{M}$, то $G \simeq P \times V$, где V — элементарная абелева 2-группа, а $P \simeq Sz(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2. В частности, G локально конечна.*

Частный случай этого следствия опубликован в [4].

3. Используемые результаты

Предложение 1 [5]. *Пусть S — силовская 2-подгруппа группы $P = Sz(q)$, $q = 2^{2m+1}$, $m \geqslant 1$. Тогда*

(а) *S — двуступенно нильпотентная группа порядка q^2 и периода 4. Все инволюции из S лежат в $Z(S)$, $Z(S)$ — элементарная абелева подгруппа порядка q и $[S, S] = Z(S)$.*

(б) *$N_P(S) = SR$ — группа Фробениуса с ядром S и дополнением R, где R — циклическая группа порядка $q - 1$, действующая при сопряжении транзитивно на множествах инволюций групп $Z(S)$ и $S/Z(S)$.*

(в) *Если t — инволюция из S, то $C_P(t) = S$.*

(г) *$N_P(R) = R\langle u\rangle$, где u — инволюция, инвертирующая R при сопряжении, и $P = \langle S, u\rangle$.*

Предложение 2 [6]. *Группа $\langle a, b, c \mid 1 = a^2 = b^2 = c^2 = (ab)^4 = (ac)^4 = (bc)^4 = ((ab)^2c)^4 = ((bc)^2a)^4 = ((ca)^2b)^4 = (ab^c)^4 = (bc^a)^4 = (ca^b)^4\rangle$ является конечной 2-группой.*

Доказательство см. в [6, лемма 2.1].

Предложение 3 (теорема Шункова [7]). *Периодическая группа, содержащая инволюцию с конечным централизатором, локально конечна.*

Предложение 4 (теорема Санова [8]). *Группа периода 4 локально конечна.*

4. Доказательство теоремы

Пусть G — группа, удовлетворяющая условиям теоремы. Если F — конечная подгруппа четного порядка из G, то через $\mathfrak{M}(F)$ обозначим множество подгрупп группы G, которые содержат F и изоморфны элементам из $\mathfrak{M}$.

Лемма 1. *Если T — 2-подгруппа из G, то T — двуступенно нильпотентная группа периода 4 и все инволюции из T лежат в центре T.*

Доказательство. Из условия теоремы и предложения 1 вытекает, что T периода 4. По результату Санова (предложение 4) T локально конечна. Пусть $x, y, z \in T$. Тогда $\langle x, y, z\rangle$ — конечная 2-группа. Из условия теоремы и предложения 1 вытекает, что $[[x, y], z] = 1$, т. е. T двуступенно нильпотентна. Если t — инволюция из T и $x \in T$, то снова $\langle x, t\rangle$ конечна и $[x, y] = 1$ по предложению 1. Лемма доказана.

По предложению 1 любой элемент из $\mathfrak{M}(\langle t\rangle)$ содержит элементы порядка 4. В частности, в G есть элементы порядка 4.

Лемма 2. *Пусть s — элемент порядка 4 из G. Тогда $C = C_G(s^2)$ — 2-группа.*

Доказательство. Положим $t = s^2$. Пусть $x, y, z \in G$ такие, что $x^2 = y^2 = z^2 = t$. Пусть a, b, c — образы x, y, z в $C/\langle t\rangle$.

Покажем, что a, b, c удовлетворяют определяющим соотношениям из предложения 2. Очевидно, что $a^2 = b^2 = c^2 = 1$. Если $(ab)^4 \neq 1$, то по лемме 1 $A = \langle x, y\rangle$ содержит элемент нечетного порядка, централизующий t. Однако по условию в любой подгруппе из $\mathfrak{M}(A)$ нетривиальный элемент нечетного порядка не может централизовать $t = x^2$. Полученное противоречие показывает, что $(ab)^4 = (ac)^4 = (bc)^4 = 1$. Такие же рассуждения доказывают, что выполняются и остальные соотношения предложения 2. Таким образом, $\langle a, b, c\rangle$ — конечная 2-группа, а вместе с ней конечной 2-группой является и $\langle x, y, z\rangle$. По лемме 1 $[[x, y], z] = 1$. Пусть $A = \langle x \in G \mid x^2 = t\rangle$. По предыдущим рассуждениям коммутаторы порождающих элементов группы A лежат в центре A, поэтому A — двуступенно нильпотентная 2-группа. Очевидно, что $A \triangleleft C$. Если предположить, что C не является 2-группой, то пусть $1 \neq r$ — элемент нечетного порядка из C, а x — один из порождающих элементов A. Тогда $R = \langle r, x\rangle$ — конечная подгруппа четного порядка, которая не может содержаться ни в каком элементе из $\mathfrak{M}(R)$. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если s — элемент порядка 4 из G, то s^2 содержится в единственной силовской 2-подгруппе S группы G и $S = C_G(s^2)$.*

Доказательство. Если S — силовская 2-подгруппа из G, содержащая s^2, то $S \leq C_G(s^2)$ по лемме 1. С другой стороны, по лемме 2 $C_G(s^2)$ является 2-группой. Лемма доказана.

Лемма 4. *Пусть x и y — элементы порядка 4 из G, S и T — силовские 2-подгруппы из G, содержащие x^2 и y^2 соответственно. Тогда x^2 и y^2, а также S и T сопряжены в G.*

Доказательство. По лемме 3 достаточно доказать сопряженность x^2 и y^2. Пусть $L \in \mathfrak{M}(\langle x^2, y^2\rangle)$. Можно считать, что x^2 и y^2 лежат в одной силовской 2-подгруппе S_L из L. Пусть S — силовская 2-подгруппа G, содержащая S_L. По лемме 3 $x, y \in S$ и, следовательно, $\langle x, y\rangle$ — конечная 2-группа. Пусть $M \in \mathfrak{M}(\langle x, y\rangle)$. Тогда x^2, y^2 лежат в одной силовской 2-подгруппе из $[M, M] \simeq Sz(q)$ и по предложению 1 сопряжены в $[M, M]$. Лемма доказана.

До конца доказательства S будет означать некоторую фиксированную силовскую 2-подгруппу группы G, содержащую некоторый элемент x порядка 4.

Лемма 5. *Любые две инволюции из S, сопряженные в G, сопряжены в $N_G(S)$.*

Доказательство. Пусть $u = v^g$, где u, v — инволюции из S. Тогда $u \in S \cap S^g$ и по лемме 1 $\langle S, S^g\rangle \leq C_G(u)$. Пусть $s = x^2$. Тогда $\langle s, s^g\rangle$ — конечная подгруппа из $C_G(u)$ и поэтому существует элемент c из $C_G(u)$ такой, что $\langle s, s^{gc}\rangle$ — 2-группа. По лемме 3 $s^{gc} \in S$, что по той же лемме означает, что $S^{gc} = S$, т. е. $gc \in N_G(S)$. Тем самым $u = u^c = v^{gc}$, т. е. u и v сопряжены в $N_G(S)$. Лемма доказана.

Лемма 6. *Если a — элемент порядка 4 из S и $a^2 \in S_1 \leq S$, то $N_G(S_1) \leq N_G(S)$.*

Доказательство. Пусть $n \in N_G(S_1)$. Тогда a^2 и a^{2n} принадлежат S. По лемме 5 существует $n_1 \in N_G(S)$, для которого $a^2 = a^{2nn_1}$. По лемме 3 $nn_1 \in S$ и $n \in Sn^{-1} \subseteq N_G(S)$. Лемма доказана.

Лемма 7. *Множество $S_0 = \{a^2 \mid a \in S\}$ является элементарной абелевой 2-группой.*

Доказательство. Очевидно, $1 \in S_0$. Пусть $1 \neq s_0 \in \langle S_0\rangle$. По лемме 1 s_0 — инволюция и $s_0 = a_1^2 \dots a_m^2$, где $a_1, \dots, a_m$ — элементы порядка 4 из S. Так как $A = \langle a_1, \dots, a_m\rangle$ — конечная 2-подгруппа, то $A \leq P \times V$, где $P \simeq \mathrm{Sz}(q)$ для некоторого числа q, а V — элементарная абелева группа. Очевидно, s_0 — инволюция из $P \cap S$, и $P \cap S$ — силовская 2-подгруппа из P. По предложению 1 найдется $a \in P \cap S$ такой, что $s_0 = a^2$. Лемма доказана.

До конца доказательства сохраним обозначение S_0. Так как $S_0 \leq Z(S)$, по лемме 3 $S = C_G(S_0)$ и, следовательно, $N = N_G(S)/S$ действует при сопряжении в $N_G(S)$ на множестве инволюций подгруппы S_0.

Лемма 8. (а) *N действует транзитивно и без неподвижных точек на множестве инволюций группы S_0.*

(б) *N — локально циклическая группа, и S_0 — счетная группа.*

(в) *$\Omega(S) = S_0 \times V$, где $V = C_S(N) = \{v \in S \mid v^n = v$ для всех $n \in N\}$ — элементарная абелева 2-группа. Кроме того, $V = C_S(n)$ для любого $1 \neq n \in N$.*

(г) *$S = [S,N] \times V$, где $[S,N] = \langle [s,n] = s^{-1}s^n \mid s \in S,\ n \in N\rangle$.*

Доказательство. (а) Пусть s_1, s_2 — инволюции из S_0. Тогда $s_1 = a_1^2, s_2 = a_2^2$, где $a_1, a_2 \in S$. Пусть $K \in \mathfrak{M}(\langle a_1, a_2\rangle)$. Тогда $K = P \times V$, где $P \simeq Sz(q)$ для некоторого q, а V — элементарная абелева 2-группа. Очевидно, что $s_1, s_2 \in S_1 = S \cap P$, и S_1 — силовская 2-подгруппа в P. По предложению 1 s_1 и s_2 сопряжены в $N_G(S_1)$, и по лемме 5 сопряжены в $N_G(S)$. Это доказывает транзитивность действия N на инволюциях S_0. Если $s_0^n = s_0$, где $1 \neq s_0 \in S_0$, то $n = 1$ по лемме 3. П. (а) доказан.

(б) Зафиксируем в S_0 инволюцию $s = a^2$, где $a \in S$. Пусть $n_1, n_2 \in N$, $a_1 = a^{n_1}, a_2 = a^{n_2}$ и K — элемент из $\mathfrak{M}(\langle a, a_1, a_2\rangle)$. Как и прежде, $s, s_1 = a_1^2, s_2 = a_2^2 \in K_0 = [K,K] \simeq Sz(q)$ для некоторого q, и по предложению 1 существуют циклическая подгруппа $\langle c\rangle$ порядка $q-1$ в $N_K(K_0 \cap S)$ и $c_1, c_2 \in \langle c\rangle$, для которых $s_1 = s^{c_1}$, $s_2 = s^{c_2}$. По лемме 6 $\langle c\rangle S/S \leq N$. По п. (а) $c_1S = n_1$, $c_2S = n_2$, т. е. $\langle n_1, n_2\rangle \leq \langle c\rangle S$. Таким образом, $\langle n_1, n_2\rangle$ — циклическая группа. Это доказывает, что N — локально циклическая группа. В частности, N счетна. Так как $|N| = |S_0| - 1$, то S_0 также счетна. П. (б) доказан.

(в) Если $\Omega(S) = S_0$, то (в) справедливо. Пусть $S_0 \neq \Omega(S)$, $1 \neq n \in N$, $1 \neq s_0 \in S_0$, $s \in \Omega(S) \setminus S_0$. Подгруппа $A = \langle s_0, s, n\rangle$ конечна, а значит, содержится в $K \in \mathfrak{M}(A)$. При этом $s_0 \in K_1 = [K,K] \cap S$. Далее $\Omega(S)$ — элементарная абелева подгруппа из центра S, тем самым $s = av$, где $a \in K_1$, а $v \in C_{\Omega(S)}(n)$. Таким образом, в любом смежном классе $\Omega(S)$ по S_0 содержится элемент из $C_{\Omega(S)}(n)$. Это рассуждение показывает, что $\Omega(S) = S_0 \cdot C_{\Omega(S)}(n)$. Ясно, что $C_{\Omega(S)}(n)$ не содержит элементов порядка 4, поэтому $C_S(n) = C_{\Omega(S)}(n)$. Кроме того, $S_0 \cap C_S(n) = 1$, тогда $\Omega(S) = S_0 \times C_S(n)$. Так как N коммутативна, $C_S(n)$ инвариантна относительно N. Легко понять, что $C_S(n) = C_S(N)$. П. (в) доказан.

(г) Пусть $1 \neq s_0 \in S_0$, $s \in S$, $K \in \mathfrak{M}(\langle s_0, S\rangle)$, $K_2 = K \cap S$. По лемме 3 K_2 — силовская 2-подгруппа в K и $K_2 = [K_2, n] \times C_{K_2}(n)$ для любого $1 \neq n \in N_K(K_2)$. Поскольку $[K_2, n] \leq [S,N]$ и $C_{K_2}(n) \leq C_S(N) = V$, то $s \in [S,N]V$. Это рассуждение показывает, что $S = [S,N]V$.

Покажем, что $[S,N] \cap V = 1$. Предположим противное. Пусть

$$v = [s_1, n_1] \cdots [s_m, n_m],$$

где $1 \neq v \in V$, $s_1, \ldots, s_m \in S$, $n_1, \ldots, n_m \in N$. Так как $C_G(S) \leq S$, по п. (а) $N_G(S)$ — локально конечная группа. В частности, конечна подгруппа $F = \langle s_0, s_1, \ldots, s_m\rangle$, где $1 \neq s_0 \in S_0$ и для каждого $i = 1, \ldots, m$ элемент $g_i \in N_G(S)$ выбран так, что $s_i^{g_i} = s_i^{n_i}$. Если $K \in \mathfrak{M}(F)$, то, как и прежде, $K_2 = K \cap S$ — силовская 2-подгруппа из K, $g_1, \ldots, g_n \in N_K(K_2)$ и $[s_i, g_i] = [s_i, n_i] \in [K_2, N_K(K_2)] \leq S_0$. Поэтому $v \in S_0$, что противоречит п. (в). П. (г) доказан.

Сохраним обозначения из формулировки леммы 8 до конца доказательства.

Лемма 9. *Пусть $K \in \mathfrak{M}(\langle t \rangle)$, где t — инволюция из S_0. Тогда $O_2(K) = V \cap K$.*

Доказательство. По условию $K = L \times O_2(K)$, где $L \simeq Sz(q)$ для некоторого q. По лемме 3 $K_2 = K \cap S$ — силовская 2-подгруппа в K, и по лемме 6 $N_K(K_2) \leq N_G(S)$. Пусть n — нетривиальный элемент нечетного порядка из $N_L(K_2)$. По предложению 1 n действует тривиально на $O_2(K)$ и без неподвижных точек на $S_0 \cap K$. С другой стороны, $\bar{n} = nS$ — нетривиальный элемент из N, и по лемме 8(в) $C_{\Omega(S)}(\bar{n}) = C_{\Omega(S)}(n) = V$. Так как $O_2(K) = C_{K_2}(n) \leq C_{\Omega(S)}(n) = V$, то $O_2(K) \leq V$. Пусть $v \in V \cap K$. Тогда $v \in C_K(n) = V \times R$, где R — группа нечетного порядка. Поэтому $v \in V$. Лемма доказана.

Лемма 10. $V \trianglelefteq G$.

Доказательство. Покажем вначале, что $[V, V^g] = 1$ для любого $g \in G$. Действительно, если это неверно, то найдутся $v, w \in V$ и $g \in G$, для которых $[v, w^g] \neq 1$. По лемме 1 $\langle v, w^g \rangle$ не является 2-группой, поэтому $r^v = r^{-1}$ для некоторого элемента r нечетного порядка из $\langle v, w^g \rangle$. Пусть $K \in \mathfrak{M}(\langle r, v \rangle)$. По условию $K = L \times W$, где $L \simeq Sz(q)$ для некоторого q, W — элементарная абелева 2-группа. Очевидно, что $r \in L$, тем самым $v = xw$, где x — инволюция из L, $w \in W$. По предложению 1 существует $y \in L$, для которого $y^2 = x$, и по лемме 3 найдется $h \in G$ такой, что $x^h \in S_0$, $v^h \in C_G(x^h)$. По лемме 3 $v^h \in S$, по лемме 5 $v^h \in V \cap K^h$, а по лемме 9 $V \cap K^h = O_2(K^h)$. Отсюда $v^h \in O_2(K^h)$, но это невозможно, поскольку v^h инвертирует нетривиальный элемент нечетного порядка из K^h. Итак, $[V, V^h] = 1$ для любого $g \in G$. Таким образом, $U = \langle V^g \mid g \in G \rangle$ — элементарная абелева 2-группа, нормальная в G. Поскольку SU — 2-группа и S — силовская 2-подгруппа в G, то $U \leq S$. Если $U \neq V$, то найдутся $v \in V$ и $g \in G$ такие, что $v^g \notin V$. По лемме 5 можно считать, что $g \in N_G(S)$. По лемме 8(г) $v^g = v$; противоречие. Лемма доказана.

Лемма 11. *$G/V \simeq Sz(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2.*

Доказательство. Пусть $\overline{K}$ — конечная группа четного порядка из $\overline{G} = G/V$. Тогда $\overline{K} = KV/V$ для некоторой конечной подгруппы K из G. По условию K содержится в $M \in \mathfrak{M}(K)$, а $M = L \times O_2(M)$, где $L \simeq Sz(q)$ для некоторого числа q. По лемме 9 $O_2(M) \leq V$, поэтому $\overline{M} = MV/V = LV/V \simeq L$. Утверждение леммы следует из [9, теорема 1].

Лемма 12. *$G = L \times V$, где $L \simeq Sz(Q)$ для некоторого локально конечного поля Q характеристики 2.*

Доказательство. Группа G/V по лемме 11 обладает набором подгрупп $\overline{L}_i$, $i = 1, 2, \dots$, таких, что $\overline{L}_i \simeq Sz(q_i)$ для некоторого q_i, $\overline{L}_i \leq \overline{L}_{i+1}$ и $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} \overline{L}_i = G/V$. Как и в лемме 11, $\overline{L}_i = L_i V/V$, где $L_i \simeq Sz(q_i)$. Поскольку L_i централизует V и $L_i \cap V = 1$, то $L_i V = L_i \times V$, откуда $L_i \leq L_{i+1}$ для любого i. Это означает, что $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} L_i \simeq Sz(q)$. Лемма и теорема доказаны.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Шлепкин А. К.* Сопряженно бипримитивно конечные группы, содержащие конечные неразрешимые подгруппы // Сб. тез. 3-й междунар. конф. по алгебре. Красноярск, 1993. С. 363.

2. *Кузнецов А. А., Филиппов К. А.* Группы, насыщенные заданным множеством групп // Сиб. электрон. мат. изв. 2011. Т. 8. С. 230–246.

3. *Филиппов К. А.* Группы, насыщенные конечными неабелевыми группами и их расширениями: Дис. … канд. физ.-мат. наук. Красноярск, 2006.

4. *Duzh A. A.* Periodic groups saturated by direct products of the Suzuki′s group for elementary abelian 2-groups // Sib. electron. math. rep. 2013. V. 10. P. 408–413.

5. *Suzuki M.* A new type of simple groups of finite order // Proc. Nat. Acad. Sci. 1960. V. 46. P. 868–870.

6. *Лыткина Д. В., Мазуров В. Д.* О группах с заданными свойствами конечных подгрупп, порожденных парами 2-элементов // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 127–130.

7. *Шунков В. П.* О периодических группах с почти регулярной инволюцией // Алгебра и логика. 1972. Т. 11, № 4. С. 470–494.

8. *Санов И. Н.* Решение проблемы Бернсайда для показателя 4 // Уч. зап. ЛГУ. Сер. мат. 1940. № 10. С. 160–170.

9. *Лыткина Д. В.* О группах, насыщенных конечными простыми группами // Алгебра и логика. 2009. Т. 48, № 5. С. 628–653.

Статья поступила 6 июня 2013 г.

Дуж Анна Александровна
Красноярский гос. аграрный университет,
пр. Мира, 50, Красноярск 660049
anyaduzh@yandex.ru

Лыткина Дарья Викторовна
Сибирский гос. университет телекоммуникаций и информатики,
ул. Кирова, 86, Новосибирск 630102;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
daria.lytkin@gmail.com