Сибирский математический журнал
Май—июнь, 2015. Том 56, № 3

УДК 512.554

$(-1,1)$–СУПЕРАЛГЕБРЫ ВЕКТОРНОГО ТИПА. ЙОРДАНОВЫ СУПЕРАЛГЕБРЫ ВЕКТОРНОГО ТИПА И ИХ УНИВЕРСАЛЬНЫЕ ОБЕРТЫВАЮЩИЕ

В. Н. Желябин

Аннотация. Устанавливается связь между областями целостности, проективными конечнопорожденными модулями над ними, дифференцированиями области целостности и $(-1,1)$-супералгебрами векторного типа. Изучаются свойства универсальных ассоциативных обертывающих простых йордановых супералгебр векторного типа.

DOI 10.17377/smzh.2015.56.301

Ключевые слова: йорданова супералгебра, $(-1,1)$-супералгебра, скрученная супералгебра векторного типа, дифференциально простая алгебра, проективный модуль, универсальные обертывающие.

75-летию Ю. Л. Ершова посвящается

Примеры бесконечномерных простых йордановых супералгебр можно получить, используя процесс удвоения Кантора, из ассоциативной суперкоммутативной супералгебры, на которой задана йорданова скобка (см. [1–3]). Если йорданова скобка задана на ассоциативно-коммутативной алгебре, то четная часть полученной йордановой супералгебры ассоциативна, а нечетная часть является однопорожденным модулем над четной частью. Аналогичным образом получаются простые $(-1,1)$-супералгебры из дифференциально простых относительно одного дифференцирования, ассоциативных коммутативных алгебр. В [4] описаны простые $(-1,1)$-супералгебры характеристики $\neq 2,3$. Оказалось, что четная часть A такой супералгебры является ассоциативно-коммутативной алгеброй, а нечетная часть M — конечнопорожденным ассоциативным и коммутативным A-модулем. Умножение в M задается с помощью фиксированных конечных множеств дифференцирований и элементов алгебры A. При некоторых ограничениях на алгебру A нечетная часть M является однопорожденным A-модулем, а исходная $(-1,1)$-супералгебра — скрученной супералгеброй векторного типа относительно одного дифференцирования. Полученные в [4] $(-1,1)$-супералгебры будем также называть $(-1,1)$-*супералгебрами векторного типа*. Следует отметить, что присоединенная йорданова супералгебра для простой $(-1,1)$-супералгебры является унитальной простой специальной супералгеброй с ассоциативной четной частью.

В [5, 6] описаны унитальные простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной четной частью A, нечетная часть M которых является ассоциативным A-модулем. В этом случае если супералгебра не является супералгеброй

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта Российского научного фонда (проект № 14–21–00065).

© 2015 Желябин В. Н.

невырожденной билинейной суперформы, то ее четная часть A — дифференциально простая алгебра, а нечетная часть M — конечнопорожденный проективный A-модуль ранга 1. Здесь так же, как и для $(-1,1)$-супералгебр, умножение в M задается с помощью фиксированных конечных множеств дифференцирований и элементов алгебры A. И. П. Шестаковым в [6] построен новый пример унитальной простой йордановой супералгебры векторного типа над полем действительных чисел, у которой нечетная часть не является однопорожденным модулем. Примеры новых унитальных простых йордановых супералгебр векторного типа над другими полями построены в [7, 8]. Данные примеры отвечают на вопрос Кантарини — Каца из [9]. Отметим, что в построенных примерах простых йордановых супералгебр нечетная часть является двупорожденным модулем над четной частью. В [10] приведены первичные йордановы супералгебры векторного типа над полем действительных чисел, у которых нечетная часть как модуль порождается более чем двумя элементами. В [11] найдены необходимые и достаточные условия в терминах алгебры Ли дифференцирований области целостности, позволяющие строить йордановы супералгебры векторного типа, четная часть которых является исходной областью целостности.

В данной работе изучаются аналогичные вопросы для $(-1,1)$-супералгебр. В частности, приводятся новые примеры простых и первичных $(-1,1)$-супералгебр векторного типа, у которых нечетная часть порождается как модуль двумя элементами в случае простых супералгебр и произвольным числом элементов в случае первичных супералгебр. Также описаны некоторые свойства универсальных обертывающих простых йордановых супералгебр векторного типа. В частности доказано, что четная часть универсальной обертывающей содержит два центральных ортогональных идемпотента, сумма которых равна единице.

§ 1. Йордановы и $(-1,1)$-супералгебры

Пусть $\mathbb{F}$ — поле характеристики, не равной 2. Тогда $\mathbb{Z}_2$-*градуированной алгеброй* или *супералгеброй* будем называть алгебру $A = A_0 \oplus A_1$, где компоненты A_0, A_1 умножаются по правилу

$$A_i A_j \subseteq A_{i+j (\mathrm{mod}\, 2)}.$$

Векторное подпространство A_0 — *четная часть* супералгебры A, A_1 — *нечетная*. Определим для однородных элементов $x \in A_0 \cup A_1$ функцию четности, полагая

$$|x| = i \quad \text{при } x \in A_i.$$

Пусть G — алгебра Грассмана над $\mathbb{F}$, т. е. ассоциативная алгебра, заданная образующими $1, e_1, e_2, \dots$ и определяющими соотношениями

$$e_i e_j = -e_j e_i.$$

Произведения $1, e_{i_1} \dots e_{i_k}$, где $i_1 < i_2 < \dots < i_k$, образуют базис алгебры G. Пусть G_0, G_1 — подпространства, порожденные соответственно произведениями четной и нечетной длины. Тогда $G = G_0 + G_1$ — супералгебра. Пусть $A = A_0 + A_1$ — произвольная супералгебра. Рассмотрим тензорное произведение $G \otimes A$ над полем $\mathbb{F}$. Тогда $G(A) = G_0 \otimes A_0 + G_1 \otimes A_1$ является подалгеброй в алгебре $G \otimes A$ и называется *грассмановой оболочкой* супералгебры А. Супералгебра А называется *йордановой супералгеброй* тогда и только тогда, когда ее грассманова оболочка $G(A)$ — йорданова алгебра, т. е. в $G(A)$ выполняются тождества

$$xy = yx, \quad (x^2y)x = x^2(yx).$$

Супералгебра A называется $(-1,1)$-*супералгеброй*, если ее грассманова оболочка является $(-1,1)$-алгеброй, т. е. выполняются тождества

$$(x,y,y) = 0, \quad (x,y,z) + (y,z,x) + (z,x,y) = 0,$$

где $(x,y,z) = (xy)z - x(yz)$ — ассоциатор элементов x, y, z.

После линеаризации тождеств получим, что в A для однородных элементов должны быть выполнены тождества

$$(x,y,z) + (-1)^{|y||z|}(x,z,y) = 0; \tag{1}$$

$$(x,y,z) + (-1)^{|x||y|+|x||z|}(y,z,x) + (-1)^{|x||z|+|y||z|}(z,x,y) = 0. \tag{2}$$

Пример 1. Пусть Γ — коммутативная ассоциативная супералгебра над $\mathbb{F}$, D — ненулевое четное дифференцирование Γ, т. е. $D(\Gamma_i) \subseteq \Gamma_i$ и $\gamma \in \Gamma_0$. Через $\Gamma\xi$ обозначим изоморфную копию пространства Γ. На прямой сумме векторных пространств $B(\Gamma, D, \gamma) = \Gamma + \Gamma\xi$ определим умножение, полагая

$$a \cdot b = ab, \quad a \cdot b\xi = (ab)\xi, \quad a\xi \cdot b = (-1)^{|b|}ab\xi,$$

$$a\xi \cdot b\xi = (-1)^{|b|}(\gamma ab + 2D(a)b + aD(b)),$$

где $a, b \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$ и ab — произведение в алгебре Γ. Определим на $B(\Gamma, D, \gamma)$ $\mathbb{Z}_2$-градуировку, полагая

$$B(\Gamma, D, \gamma)_0 = \Gamma_0 + \Gamma_1\xi, B(\Gamma, D, \gamma)_1 = \Gamma_1 + \Gamma_0\xi.$$

Тогда $B(\Gamma, D, \gamma)$ является $(-1,1)$-супералгеброй и называется *скрученной супералгеброй векторного типа* [4].

Пусть $B = B_0 + B_1$ — $(-1,1)$-супералгебра. Тогда векторное пространство B с новым умножением для однородных элементов

$$a \odot_s b = \frac{1}{2}(ab + (-1)^{|a||b|}ba)$$

будет йордановой супералгеброй, которую обозначим через $B^{(+)_s}$.

Одним из способов получения йордановых алгебр является конструкция Кантора [1]. Пусть $(\Gamma, \cdot)$ — произвольная ассоциативная коммутативная супералгебра с билинейной суперкососимметрической операцией $\{\,,\}$, которую будем называть *скобкой*. Построим по $(\Gamma, \cdot)$ новую супералгебру, которую будем называть *дублем Кантора*. Пусть $J(\Gamma) = \Gamma + \Gamma\xi$, где $\Gamma\xi$ — изоморфная копия Γ. Введем на $J(\Gamma)$ умножение $\bullet$ следующим образом:

$$a \bullet b = ab, \quad a \bullet b\xi = (ab)\xi, \quad a\xi \bullet b = (-1)^{|b|}(ab)\xi, \quad a\xi \bullet b\xi = (-1)^{|b|}\{a, b\},$$

где $a, b \in \Gamma_0 \cup \Gamma_1$, а ab — произведение элементов a и b в алгебре Γ. Полученную супералгебру обозначим через $J(\Gamma, \{\,,\})$. Скобка $\{\,,\}$ называется *йордановой*, если $J(\Gamma, \{\,,\})$ является йордановой супералгеброй. Четная часть супералгебры $J(\Gamma, \{\,,\})$ — пространство $\Gamma_0 + \Gamma_1\xi$, нечетная — $\Gamma_1 + \Gamma_0\xi$.

Пример 2. Пусть $(\Gamma, \cdot)$ — ассоциативная коммутативная супералгебра с ненулевым четным дифференцированием ∂. Определим скобку следующим образом:

$$\{a, b\} = \partial(a)b - a\partial(b).$$

Тогда $J(\Gamma, \{\,,\})$ — йорданова супералгебра (см. [2,12]), которая называется *йордановой супералгеброй векторного типа* и обозначается через $J(\Gamma, \partial)$. В этом случае скобка $\{\,,\}$ называется *йордановой скобкой векторного типа.* Заметим (см. [2,12]), что $B(\Gamma, D, \gamma)^{(+)s}$ будет йордановой супералгеброй векторного типа $J\big(\Gamma, \frac{1}{2}D\big)$. Действительно, пусть $a+b\xi, c+d\xi \in \Gamma_0+\Gamma_1\xi$, $a_1+b_1\xi, c_1+d_1\xi \in \Gamma_1+\Gamma_0\xi$. Тогда

$$(a+b\xi+a_1+b_1\xi)\odot_s(c+d\xi+c_1+d_1\xi) = (a+b\xi)\odot_s(c+d\xi)$$
$$+ (a+b\xi)\odot_s(c_1+d_1\xi) + (a_1+b_1\xi)\odot_s(c+d\xi) + (a_1+b_1\xi)\odot_s(c_1+d_1\xi).$$

Теперь получаем

$$(a+b\xi)\odot_s(c+d\xi) = \frac{1}{2}((a+b\xi)\cdot(c+d\xi) + (c+d\xi)\cdot(a+b\xi))$$
$$= ac + (ad)\xi + (bc)\xi - \frac{1}{2}(\gamma bd + 2D(b)d + bD(d)) - \frac{1}{2}(\gamma db + 2D(d)b + dD(b))$$
$$= ac + (ad)\xi + (bc)\xi - \frac{1}{2}(D(b)d - bD(d)) = (a+b\xi)\bullet(c+d\xi),$$

$$(a_1+b_1\xi)\odot_s(c_1+d_1\xi) = \frac{1}{2}((a_1+b_1\xi)\cdot(c_1+d_1\xi) - (c_1+d_1\xi)\cdot(a_1+b_1\xi))$$
$$= a_1c_1 + (a_1d_1)\xi - (b_1c_1)\xi + \frac{1}{2}(D(b_1)d_1 - b_1D(d_1)) = (a_1+b_1\xi)\bullet(c_1+d_1\xi).$$

Аналогично

$$(a+b\xi)\odot_s(c_1+d_1\xi) = (a+b\xi)\bullet(c_1+d_1\xi), \quad (a_1+b_1\xi)\odot_s(c+d\xi) = (a_1+b_1\xi)\bullet(c+d\xi).$$

Поэтому $B(\Gamma, D, \gamma)^{(+)s} = J\big(\Gamma, \frac{1}{2}D\big)$.

Напомним определение специальности йордановой супералгебры. Пусть $B = B_0 + B_1$ — ассоциативная супералгебра с операцией умножения $*$. Так же, как и в случае $(-1,1)$-супералгебр, определим на пространстве B суперсимметрическое произведение

$$a\odot_s b = \frac{1}{2}(a*b + (-1)^{|a||b|}b*a), \quad a, b \in B_0\cup B_1.$$

Тогда получим йорданову супералгебру $B^{(+)s}$.

Йорданова супералгебра $J = J_0 + J_1$ называется *специальной*, если она вложима (как $\mathbb{Z}_2$-градуированная алгебра) в супералгебру $B^{(+)_s}$ для подходящей ассоциативной $\mathbb{Z}_2$-градуированной алгебры B.

Тождество (1) означает, что любая $(-1,1)$-супералгебра правоальтернативная. Хорошо известно (см., например, [12]), что для любой правоальтернативной супералгебры B супералгебра $B^{(+)_s}$ является специальной йордановой супералгеброй.

Действительно, можно считать, что B — унитальная алгебра. Рассмотрим ассоциативную супералгебру

$$\operatorname{End} B = \operatorname{End}_0 B + \operatorname{End}_1 B, \quad \text{где } \operatorname{End}_i B = \{\phi\in\operatorname{End} B \mid \phi(B_j)\subseteq B_{j+i},\ j = 1, 0\}.$$

Если $a \in B_i$, то оператор правого умножения R_a на элемент a принадлежит $\operatorname{End}_i B$. Тогда отображение $R : B^{(+)_s} \to (\operatorname{End} B)^{(+)_s}$, сопоставляющее $a \mapsto R_a$, является вложением супералгебр.

Отсюда следует специальность йордановой супералгебры $J(\Gamma, \partial)$. В [2,13] приведено другое доказательство этого утверждения.

Описание простых $(-1,1)$-супералгебр дает

Теорема [4]. *Пусть $B = A + M$ — простая $(-1,1)$-супералгебра над полем характеристики не $2,3$, с четной частью A и нечетной частью M. Тогда A — ассоциативная коммутативная алгебра, M — ассоциативный коммутативный A-модуль. Кроме того, существуют такие элементы $x_1, \dots, x_n \in M$, что $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$, и произведение в M задается равенством*

$$ax_i \cdot bx_j = \gamma_{ij}ab + 2D_{ij}(a)b + aD_{ji}(b), \quad i,j = 1,\dots,n, \tag{3}$$

где $\gamma_{ij} \in A$ и дифференцирования D_{ij} алгебры A удовлетворяют условиям

$$\gamma_{ij}x_k - \gamma_{ik}x_j = (\gamma_{jk} - \gamma_{kj})x_i, \tag{4}$$

$$D_{ij} = D_{ji}, D_{ij}(a)x_k = D_{ik}(a)x_j \tag{5}$$

для любых $i,j,k = 1,\dots,n$, $a \in A$. Алгебра A дифференциально простая относительно множества дифференцирований $\Delta = \{D_{ij} \mid i,j = 1,\dots,n\}$ и потому унитальна. Модуль M является проективным A-модулем ранга 1.

Отметим некоторые свойства четной и нечетной частей супералгебры B, удовлетворяющей условию теоремы, которая не изоморфна алгебре $B(\Gamma, D, \gamma)$, где Γ — ассоциативная коммутативная алгебра. В этом случае характеристика поля равна 0. Модуль M не имеет A-кручений. Как показано в [4], для $x, y \in M$ отображение $D_{x,y} : A \mapsto A$, заданное правилом $D_{x,y}(a) = \frac{1}{2}(a,x,y)$, является дифференцированием. Поскольку B — правоальтернативная супералгебра, $D_{x,y} = D_{y,x}$. Справедливы равенства

$$bD_{x,y}(a) = D_{bx,y}(a) = D_{x,by}(a), \quad D_{x,y}(a)D_{u,v}(a) = D_{u,y}(a)D_{x,v}(a)$$

для любых $a, b \in A$ и $x, y \in M$. Более того, $D_{ij} = D_{x_i,x_j}$ для $i,j = 1,\dots,n$. Из $D_{ij}(a)x_k = D_{ik}(a)x_j$ получаем, что $D_{ij}(a)x_k \cdot x_l = D_{ik}(a)x_j \cdot x_l$ и $x_l \cdot D_{ij}(a)x_k = x_l \cdot D_{ik}(a)x_j$ для любого $a \in A$. Тогда в силу (3) $\gamma_{ij} = x_i \cdot x_j$ и

$$\gamma_{kl}D_{ij} + 2D_{kl}D_{ij} = \gamma_{jl}D_{ik} + 2D_{jl}D_{ik},$$

$$\gamma_{lk}D_{ij} + D_{lk}D_{ij} = \gamma_{lj}D_{ik} + D_{lj}D_{ik}, \quad i,j,k,l = 1,\dots,n.$$

Пусть $M^* = \mathrm{Hom}_A(M, A)$. Для элемента a определим $\bar{a} \in (M \otimes_A M)^*$, полагая $\bar{a}(x \otimes y) = D_{x,y}(a)$. Аналогично [11] линейное отображение $^- : A \mapsto (M \otimes M)^*$, заданное правилом $^- : a \mapsto \bar{a}$, является дифференцированием алгебры A в A-модуль $(M \otimes_A M)^*$.

В дальнейшем все кольца рассматриваются как алгебры над полем характеристики нуль.

Пусть теперь A — ассоциативное коммутативное кольцо с единицей без делителей нуля (область целостности) и M — конечнопорожденный проективный A-модуль ранга $rk(M) = 1$. Пусть $^- : A \mapsto (M \otimes_A M)^*$ — ненулевое линейное отображение. Предположим, что

$$\overline{ab} = a\bar{b} + b\bar{a}$$

для любых $a, b \in A$. По определению отображения $^-$ получаем, что каждая пара элементов $x, y \in M$ задает дифференцирование $D_{x,y} : A \mapsto A$ по правилу $D_{x,y}(a) = \bar{a}(x \otimes y)$. Тогда (см. [11])

$$D_{x,y} = D_{y,x}, \quad D_{ax,y} = aD_{x,y}, \quad D_{x,y}(a)z = D_{z,y}(a)x \tag{6}$$

для $a \in A$ и $x, y, z \in M$.

Пусть $x_1, \dots, x_n$ — порождающие A-модуля M, т. е. $M = Ax_1 + \dots + Ax_n$. Положим $D_{ij} = D_{x_i,x_j}$, $i,j = 1,\dots,n$. Тогда $D_{ij} = D_{ji}$.

Предложение 1. *Для любого $a \in A$ имеют место равенства*

$$D_{ij}(a)D_{kl} = D_{kl}(a)D_{ij}, \quad D_{ij}(a)D_{kl} = D_{kj}(a)D_{il}.$$

Доказательство аналогично доказательству предложения 3 из [11].

Зафиксируем в кольце A элементы γ_{ij}, где $i, j = 1, \ldots, n$.

Предложение 2. *Предположим, что для любых $i, j, k, l = 1, \ldots, n$ выполняются равенства*

$$\gamma_{lk}D_{ij} + D_{lk}D_{ij} = \gamma_{lj}D_{ik} + D_{lj}D_{ik}, \tag{7}$$

$$\gamma_{kl}D_{ij} + 2D_{kl}D_{ij} = \gamma_{jl}D_{ik} + 2D_{jl}D_{ik}. \tag{8}$$

Тогда имеет место (4), *т. е. для любых $i, j, k = 1, \ldots, n$*

$$\gamma_{ij}x_k - \gamma_{ik}x_j = (\gamma_{jk} - \gamma_{kj})x_i.$$

Доказательство. Из (7) и (8) получаем

$$(\gamma_{kl} - 2\gamma_{lk})D_{ij} = (\gamma_{jl} - 2\gamma_{lj})D_{ik}.$$

Поэтому

$$D_{(\gamma_{kl}-2\gamma_{lk})x_j, x_i}(a) = D_{(\gamma_{jl}-2\gamma_{lj})x_k, x_i}(a)$$

для любого $a \in A$. Следовательно,

$$\bar{a}((\gamma_{kl} - 2\gamma_{lk})x_j \otimes x_i) = \bar{a}((\gamma_{jl} - 2\gamma_{lj})x_k \otimes x_i).$$

Тогда в силу условий на кольцо A и модуль M (см. [11])

$$(\gamma_{kl} - 2\gamma_{lk})x_j = (\gamma_{jl} - 2\gamma_{lj})x_k.$$

Из (8) и (6) получаем

$$\begin{aligned} 2D_{kl}D_{ij} = -\gamma_{kl}D_{ij} + \gamma_{jl}D_{ik} + 2D_{jl}D_{ik} = -\gamma_{kl}D_{ij} + \gamma_{jl}D_{ik} + 2D_{lj}D_{ki} \\ = -\gamma_{kl}D_{ij} + \gamma_{jl}D_{ik} - \gamma_{lj}D_{ki} + \gamma_{ij}D_{kl} + 2D_{ij}D_{kl}. \end{aligned}$$

Тогда

$$2[D_{kl}, D_{ij}] = 2(D_{kl}D_{ij} - D_{ij}D_{kl}) = -\gamma_{kl}D_{ij} + (\gamma_{jl} - \gamma_{lj})D_{ki} + \gamma_{ij}D_{kl}$$

для любых $i, j, k, l = 1, \ldots, n$. Следовательно,

$$2[D_{lk}, D_{ij}] = -\gamma_{lk}D_{ij} + (\gamma_{jk} - \gamma_{kj})D_{li} + \gamma_{ij}D_{lk}.$$

Отсюда

$$2[D_{kl}, D_{ij}] - 2[D_{lk}, D_{ij}] = (\gamma_{lk} - \gamma_{kl})D_{ij} + (\gamma_{jl} - \gamma_{lj})D_{ki} + (\gamma_{kj} - \gamma_{jk})D_{li} = 0.$$

Аналогично предыдущему

$$(\gamma_{lk} - \gamma_{kl})x_j + (\gamma_{jl} - \gamma_{lj})x_k + (\gamma_{kj} - \gamma_{jk})x_l = 0.$$

Ввиду доказанного выше получаем

$$-\gamma_{lk}x_j + \gamma_{lj}x_k + (\gamma_{kj} - \gamma_{jk})x_l = 0.$$

Следовательно,

$$\gamma_{lj}x_k - \gamma_{lk}x_j = (\gamma_{jk} - \gamma_{kj})x_l.$$

Предложение 3. *Предположим, что для любых $i, j, k, l = 1, \dots, n$ выполняются равенства*

$$\gamma_{lk} D_{ij} + D_{lk} D_{ij} = \gamma_{lj} D_{ik} + D_{lj} D_{ik}, \quad \gamma_{ij} x_k - \gamma_{ik} x_j = (\gamma_{jk} - \gamma_{kj}) x_i.$$

Тогда имеет место (8), *т. е. для любых $i, j, k = 1, \dots, n$*

$$\gamma_{kl} D_{ij} + 2 D_{kl} D_{ij} = \gamma_{jl} D_{ik} + 2 D_{jl} D_{ik}.$$

Доказательство. В силу (6), (7) получаем

$$\gamma_{lk} D_{ij} + D_{lk} D_{ij} = \gamma_{lj} D_{ik} + D_{lj} D_{ik}, \quad \gamma_{ji} D_{kl} + D_{ji} D_{kl} = \gamma_{jl} D_{ik} + D_{jl} D_{ik}.$$

Поэтому ввиду (6)

$$[D_{ij}, D_{kl}] = \gamma_{lk} D_{ij} - \gamma_{ji} D_{kl} + (\gamma_{jl} - \gamma_{lj}) D_{ik}.$$

Тогда при $j = l$

$$[D_{ij}, D_{kj}] = \gamma_{jk} D_{ij} - \gamma_{ji} D_{kj}.$$

По условию предложения

$$[D_{ij}, D_{kj}] = D_{\gamma_{jk} x_i, x_j} + D_{-\gamma_{ji} x_k, x_j} = D_{\gamma_{jk} x_i - \gamma_{ji} x_k, x_j} = -(\gamma_{ik} - \gamma_{ki}) D_{jj}.$$

В силу предложения 5 из [11]

$$(\gamma_{ij} - \gamma_{ji}) D_{lk} + D_{ij} D_{lk} = (\gamma_{lj} - \gamma_{jl}) D_{ik} + D_{lj} D_{ik}.$$

Так как $\gamma_{ji} D_{kl} + D_{ji} D_{kl} = \gamma_{jl} D_{ik} + D_{jl} D_{ik}$, складывая два последних равенства и поменяв индексы i с k, j с l, получим

$$\gamma_{kl} D_{ij} + 2 D_{kl} D_{ij} = \gamma_{jl} D_{ik} + 2 D_{jl} D_{ik}.$$

Аналогично доказывается

Предложение 4. *Предположим, что для любых $i, j, k, l = 1, \dots, n$ выполняются равенства*

$$\gamma_{kl} D_{ij} + 2 D_{kl} D_{ij} = \gamma_{jl} D_{ik} + 2 D_{jl} D_{ik}, \quad \gamma_{ij} x_k - \gamma_{ik} x_j = (\gamma_{jk} - \gamma_{kj}) x_i.$$

Тогда имеет место (7), *т. е. для любых $i, j, k = 1, \dots, n$*

$$\gamma_{lk} D_{ij} + D_{lk} D_{ij} = \gamma_{lj} D_{ik} + D_{lj} D_{ik}.$$

Предложение 5. *Предположим, что для любых $i, j, k, l = 1, \dots, n$ выполняются равенства*

$$[D_{ik}, D_{kj}] = -(\gamma_{ij} - \gamma_{ji}) D_{kk}, \tag{9}$$

$$2[D_{ik}, D_{kj}] = \gamma_{jk} D_{ik} - \gamma_{ik} D_{kj}. \tag{10}$$

Тогда имеют место равенства (7), (8).

Доказательство. Сначала докажем, что имеет место (4), т. е.

$$\gamma_{ij} x_k - \gamma_{ik} x_j = (\gamma_{jk} - \gamma_{kj}) x_i.$$

Для любого $a \in A$ из (9) и (10) получаем

$$-2(\gamma_{ij} - \gamma_{ji}) D_{kk}(a) = \gamma_{jk} D_{ik}(a) - \gamma_{ik} D_{kj}(a).$$

Тогда

$$-2(\gamma_{ij}-\gamma_{ji})\bar{a}(x_k\otimes x_k)=\gamma_{jk}\bar{a}(x_i\otimes x_k)-\gamma_{ik}(x_j\otimes x_k).$$

Поэтому

$$-2(\gamma_{ij}-\gamma_{ji})x_k=\gamma_{jk}x_i-\gamma_{ik}x_j.$$

В силу (9) и следствия из [11] имеем

$$(\gamma_{ij}-\gamma_{ji})x_k=(\gamma_{ik}-\gamma_{ki})x_j+(\gamma_{kj}-\gamma_{jk})x_i.$$

Следовательно, $(\gamma_{ij}-\gamma_{ji})x_k=\gamma_{ki}x_j-\gamma_{kj}x_i$.

Пусть $G(l.k.i,j)=D_{lk}D_{ij}-D_{lj}D_{ik}$. Тогда для любого $a\in A$ ввиду предложения 1 получаем

$$\begin{aligned}&D_{ii}(a)G(l.k.i,j)=D_{ii}(a)(D_{lk}D_{ij}-D_{lj}D_{ik})\\&=D_{il}(a)(D_{ik}D_{ij}-D_{ij}D_{ik})=-(\gamma_{kj}-\gamma_{jk})D_{il}(a)D_{ii}=-(\gamma_{kj}-\gamma_{jk})D_{ii}(a)D_{il}.\end{aligned}$$

Так как A — область целостности, по (4)

$$G(l.k.i,j)=-(\gamma_{kj}-\gamma_{jk})D_{il}=(\gamma_{jk}-\gamma_{kj})D_{il}=\gamma_{lj}D_{ik}-\gamma_{lk}D_{ij}.$$

Отсюда $\gamma_{lk}D_{ij}+D_{lk}D_{ij}=\gamma_{lj}D_{ik}+D_{lj}D_{ik}$. Аналогично доказывается, что имеет место (8).

Следствие. *Равенства* (7), (8) *и* (9), (10) *эквивалентны.*

Доказательство. В силу предложения 5 достаточно доказать, что из (7) и (8) следует (9), (10).

Пусть имеют место (7) и (8). Тогда по предложению 2

$$\gamma_{ij}x_k-\gamma_{ik}x_j=(\gamma_{jk}-\gamma_{kj})x_i.$$

Как показано в предложении 3, справедливо

$$[D_{ij},D_{kj}]=-(\gamma_{ik}-\gamma_{ki})D_{jj},$$

т. е. имеет место (9).

Ввиду предложения 2

$$2[D_{lk},D_{ij}]=-\gamma_{lk}D_{ij}+(\gamma_{jk}-\gamma_{kj})D_{li}+\gamma_{ij}D_{lk}.$$

Полагая $j=k$, $l=j$, получаем

$$2[D_{ik},D_{kj}]=\gamma_{jk}D_{ik}-\gamma_{ik}D_{kj},$$

т. е. имеет место (10).

Теорема 1. *Пусть A — область целостности. Пусть $M=Ax_1+\dots+Ax_n$ — конечнопорожденный проективный A-модуль ранга 1, отображение $^{-}:A\mapsto(M\otimes_A M)^*$ — ненулевое дифференцирование алгебры A в A-модуль $(M\otimes_A M)^*$ и $\Delta=\{D_{ij}\mid i,j=1,\dots,n\}$ — множество дифференцирований алгебры A, где $D_{ij}(a)=\bar{a}(x_i\otimes x_j)$. Зафиксируем в кольце A подмножество $\Upsilon=\{\gamma_{ij}\in A,i,j=1,\dots,n\}$. Рассмотрим векторное пространство $B(A,\Delta,\Upsilon)=A\oplus M$ и зададим на нем структуру Z_2-градуированной алгебры, полагая*

$$a\cdot b=ab,\quad a\cdot(bx_i)=(bx_i)\cdot a=(ab)x_i,\quad i=1,\dots,n,$$

$$ax_i\cdot bx_j=\gamma_{ij}ab+2D_{ij}(a)b+aD_{ij}(b),\quad i,j=1,\dots,n,$$

где $a,b\in A$ и ab — произведение элементов a,b в A. Предположим, что дифференцирования D_{ij} и элементы из Υ удовлетворяют равенствам (9), (10). Тогда пространство $B(A,\Delta,\Upsilon)$ — $(-1,1)$-супералгебра с четной частью A и нечетной M.

Доказательство. Покажем, что умножение в $B(A,\Delta,\Upsilon)$ задано корректно. Действительно, пусть $a_1x_1+\dots+a_nx_n=0$. Тогда

$$a_1D_{1k}+\dots+a_nD_{nk}=D_{a_1x_1+\dots+a_nx_n,x_k}=0$$

для любого фиксированного $k=1,\dots,n$. В силу предложения 5 имеет место (7), т. е.

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^n a_iD_{ik}\cdot bD_{kj}&=\sum_{i=1}^n a_iD_{ik}(b)D_{kj}+\sum_{i=1}^n a_ibD_{ik}\cdot D_{kj}\\&=\sum_{i=1}^n a_iD_{ik}(b)D_{kj}-\sum_{i=1}^n a_ib\gamma_{ik}D_{kj}+\sum_{i=1}^n a_ib\gamma_{ij}D_{kk}+\sum_{i=1}^n a_ibD_{ij}\cdot D_{kk}\\&=\sum_{i=1}^n a_ib\gamma_{ij}D_{kk}+\sum_{i=1}^n a_iD_{ij}(b)D_{kk}-\sum_{i=1}^n a_ib\gamma_{ik}D_{kj}.\end{aligned}$$

С другой стороны, по (8)

$$\begin{aligned}2bD_{kj}\sum_{i=1}^n a_iD_{ik}&=\sum_{i=1}^n 2bD_{kj}(a_i)D_{ik}+\sum_{i=1}^n 2a_ibD_{kj}\cdot D_{ik}\\&=\sum_{i=1}^n 2bD_{kj}(a_i)D_{ik}+\sum_{i=1}^n 2a_ibD_{jk}\cdot D_{ki}\\&=\sum_{i=1}^n 2bD_{kj}(a_i)D_{ik}+\sum_{i=1}^n a_ib\gamma_{ik}D_{kj}+\sum_{i=1}^n 2a_ibD_{ik}\cdot D_{kj}-\sum_{i=1}^n a_ib\gamma_{jk}D_{ki}\\&=\sum_{i=1}^n 2bD_{kj}(a_i)D_{ik}+\sum_{i=1}^n a_ib\gamma_{ik}D_{kj}.\end{aligned}$$

Следовательно, $\sum\limits_{i=1}^n a_ib\gamma_{ik}D_{kj}=-\sum\limits_{i=1}^n 2bD_{kj}(a_i)D_{ik}=-\sum\limits_{i=1}^n 2bD_{ij}(a_i)D_{kk}$. Поэтому

$$\sum_{i=1}^n a_iD_{ik}\cdot bD_{kj}=\sum_{i=1}^n a_ib\gamma_{ij}D_{kk}+\sum_{i=1}^n a_iD_{ij}(b)D_{kk}+2bD_{ij}(a_i)D_{kk}=0.$$

Так как A — область целостности, имеем

$$\sum_{i=1}^n a_ib\gamma_{ij}+a_iD_{ij}(b)+2bD_{ij}(a_i)=0.$$

Отсюда

$$(a_1x_1+\dots+a_nx_n)\cdot bx_j=0.$$

Следовательно, умножение в $B(A,\Delta,\Upsilon)$ задано корректно.

Непосредственной проверкой получаем, что $B(A,\Delta,\Upsilon)$ — $(-1,1)$-супералгебра.

Рассмотрим йорданову супералгебру $B(A,\Delta,\Upsilon)^{(+)_s}$. Тогда умножение нечетных элементов $B(A,\Delta,\Upsilon)^{(+)_s}$ задается равенством

$$ax_i\cdot bx_j=\frac{(\gamma_{ij}-\gamma_{ji})}{2}ab+\frac{1}{2}D_{ij}(a)b-\frac{1}{2}aD_{ij}(b),\quad i,j=1,\dots,n.$$

Пусть $\gamma'_{ij}\in A$ такие, что $\gamma'_{ij}=-\gamma'_{ji}$, $[D_{ik},D_{jk}]=-\gamma'_{ij}D_{kk}$ и $\Delta=\{D_{ij}\mid i,j=1,\dots,n\}$. Тогда, как показано в [11], векторное пространство $J(A,\Delta)=A\oplus M$ с заданным на нем умножением

$$a\cdot b=ab,\ a\cdot(bx_i)=(bx_i)\cdot a=(ab)x_i,\quad i=1,\dots,n,$$

$$ax_i\cdot bx_j=\gamma'_{ij}ab+D_{ij}(a)b-aD_{ij}(b),\quad i,j=1,\dots,n,$$

где $a,b\in A$ и ab — произведение элементов a,b в A, является йордановой супералгеброй с четной частью A и нечетной M. Пусть $\alpha\in A$ и $D_{11}(\alpha)\neq 0$, Γ — алгебра частных относительно множества $\{D_{11}(\alpha),\dots,D_{11}(\alpha)^n,\dots\}$. Тогда $\Gamma=A[D_{11}(\alpha)^{-1}]$ — A-алгебра, порожденная $D_{11}(\alpha)^{-1}$. По теореме 2 из [11] $J(A,\Delta)$ — подсупералгебра в $J(\Gamma,D_{11})$, $D_{ij}=\alpha_i\alpha_jD_{11}$, $x_i=\alpha_i\xi$, $\gamma'_{ij}=\alpha_iD_{11}(\alpha_j)$ $-\alpha_jD_{11}(\alpha_i)\in A$, где $\alpha_1=D_{11}(\alpha)^{-1}D_{11}(\alpha),\dots,\alpha_n=D_{11}(\alpha)^{-1}D_{n1}(\alpha)$. Существует такой $\gamma\in\Gamma$, что $\gamma\alpha_i\alpha_j\in A$.

Рассмотрим $(-1,1)$-супералгебру $B(\Gamma,2D_{11},2\gamma)$. Тогда для $a,b\in A$ в супералгебре $B(\Gamma,2D_{11},2\gamma)$ получаем

$$ax_i\cdot bx_j=2(\gamma\alpha_i\alpha_j+2D_{11}(\alpha_i)\alpha_j+\alpha_iD_{11}(\alpha_j))ab+4\alpha_i\alpha_jD_{11}(a)b+2a\alpha_i\alpha_jD_{11}(b).$$

Поэтому $J(A,\Delta)$ — подсупералгебра в $B(\Gamma,2D_{11},2\gamma)^{(+)_s}$.

§ 2. Примеры $(-1,1)$-супералгебр $B(A,\Delta,\Upsilon)$

Пусть R — поле действительных чисел и n — натуральное число. Рассмотрим алгебру полиномов $R[x_0,\dots,x_n]$ от переменных $x_0,x_1,\dots,x_n$ и многочлен

$$S^n(x_0,\dots,x_n)=x_0^2+\dots+x_n^2-1.$$

Пусть

$$\Gamma_n=R[x_0,\dots,x_n]/\big(x_0^2+\dots+x_n^2-1\big)$$

— фактор-алгебра алгебры $R[x_0,\dots,x_n]$ по идеалу

$$\big(x_0^2+\dots+x_n^2-1\big)=S^n(x_0,\dots,x_n)R[x_0,\dots,x_n].$$

Отождествим образы элементов $x_0,x_1,\dots,x_n$ при каноническом гомоморфизме $R[x_0,\dots,x_n]\mapsto\Gamma_n$ с элементами $x_0,x_1,\dots,x_n$. Тогда

$$\Gamma_n=R[x_1,\dots,x_n]+x_0R[x_1,\dots,x_n],$$

где $R[x_1,\dots,x_n]$ — кольцо полиномов от переменных $x_1,\dots,x_n$. Алгебра Γ_n не содержит делителей нуля.

Пусть A_n — подалгебра в Γ_n, порожденная элементами $1,x_1^2,\dots,x_n^2$, x_ix_j, $i,j=0,\dots,n$, $i\neq j$. В алгебре Γ_n рассмотрим векторное подпространство $M_n=A_nx_0+\dots+A_nx_n$. Тогда $\Gamma_n=A_n+M_n$ — Z_2-градуированная алгебра. Как известно, M_n — проективный A_n-модуль ранга 1. В силу [14] A_n-модуль M_n не может быть порожден меньшим, чем $n+1$, числом элементов.

Пусть D — четное дифференцирование алгебры Γ_n, т. е. $D(A_n)\subseteq A_n$, $D(M_n)\subseteq M_n$. Предположим, что D не равно нулю на A_n. Тогда $D_{ij}=x_ix_jD$

— ненулевые дифференцирования алгебры A_n, $i,j=0,\dots,n$. Пусть $\gamma\in A$ и $\gamma_{ij}=2(\gamma x_ix_j+2D(x_i)x_j+D(x_j)x_i)$. Поскольку D — четное дифференцирование, то $\gamma_{ij}\in A_n$.

Теперь рассмотрим $(-1,1)$-супералгебру $B(\Gamma_n,2D,2\gamma)$. В этой супералгебре рассмотрим подпространство

$$B(A_n,\Delta_n,\Upsilon_n)=A_n+M_n\xi,$$

где $\Delta_n=\{2D_{ij}\mid i,j=0,\dots,n\}$, $\Upsilon_n=\{\gamma_{ij}\mid i,j=0,\dots,n\}$. Тогда для $a,b\in A_n$ в супералгебре $B(\Gamma_n,2D,2\gamma)$

$$\begin{aligned}(ax_i)\xi\cdot(bx_j)\xi&=2\gamma(ax_i)(bx_j)+4D(ax_i)bx_j+2D(bx_j)ax_i\\&=2\gamma(ax_i)(bx_j)+4D(x_i)abx_j+4x_ix_jD(a)b+2D(x_j)abx_i+2x_ix_jD(b)a\\&=\gamma_{ij}ab+4D_{ij}(a)b+2D_{ij}(b)a\in A.\end{aligned}$$

Поэтому $B(A_n,\Delta_n,\Upsilon_n)$ — подсупералгебра $(-1,1)$-супералгебры $B(\Gamma_n,2D,2\gamma)$.

Заметим, что йорданова супералгебра $B(A_n,\Delta_n,\Upsilon_n)^{(+)_s}$ совпадает с супералгеброй $J(A_n,\Delta'_n)$, где $\Delta'_n=\{D_{ij}\mid i,j=0,\dots,n\}$, построенной в [10]. Поскольку $J(A_n,\Delta'_n)$ — первичная супералгебра (см. [10]), $B(A_n,\Delta_n,\Upsilon_n)$ — первичная $(-1,1)$-супералгебра. Супералгебра $B(A_n,\Delta_n,\Upsilon_n)$ неизоморфна супералгебре $B(A,\partial,\gamma)$.

Пусть $n=1$ и $D=x_1\frac{\partial}{\partial x_0}-x_0\frac{\partial}{\partial x_1}$, где $\frac{\partial}{\partial x_i}$ — частная производная по переменной x_i. Как доказано в [7], супералгебра $J(A_1,\Delta'_1)$ простая. Поэтому $B(A_1,\Delta_1,\Upsilon_1)$ — простая $(-1,1)$-супералгебра.

Пусть F — поле характеристики 0. Рассмотрим координатное кольцо Λ алгебраического многообразия, заданного многочленом $f(x,y)=x^2+y^4-1$, т. е. $\Lambda=F[x,y]/f(x,y)F[x,y]$ — фактор-алгебра по идеалу, порожденному полиномом $f(x,y)$. Отождествим образы элементов x и y при каноническом гомоморфизме $F[x,y]\mapsto\Lambda$ с элементами x и y. Рассмотрим в Λ подалгебру A, порожденную элементами $1,y^2,xy$, и A-модуль $M=Ax+Ay$. Тогда $\Lambda=A+M$ — Z_2-градуированная алгебра. Отображение $D=2y^3\frac{\partial}{\partial x}-x\frac{\partial}{\partial y}$ — четное дифференцирование алгебры Λ. Как показано в [8], M — проективный A-модуль ранга 1 и не порождается одним элементом. Положим

$$\Delta=\{2D_{11},2D_{12},2D_{22}\},\quad \text{где } D_{11}=x^2D,\ D_{12}=xyD,\ D_{22}=y^2D.$$

Аналогично предыдущему построим $(-1,1)$-супералгебру $B(A,\Delta,\Upsilon)$. Тогда йорданова супералгебра $B(A,\Delta,\Upsilon)^{(+)_s}$ совпадает с супералгеброй $J(A,\Delta')$, где $\Delta'=\{D_{ij}\mid i,j=1,2\}$, построенной в [8]. Поскольку $J(A,\Delta')$ — простая супералгебра (см. [8]), $B(A,\Delta,\Upsilon)$ — простая супералгебра.

Вопрос. Существует ли простая $(-1,1)$-супералгебра $B(A,\Delta,\Upsilon)$, у которой нечетная часть как модуль над четной частью порождается больше чем двумя элементами?

§ 3. Некоторые свойства универсальных обертывающих простых йордановых супералгебр $J(A,\Delta)$

В этом параграфе изучим некоторые свойства универсальных обертывающих простых йордановых супералгебр $J(A,\Delta)$, где $\Delta=\{D_{ij}\mid i,j=1,\dots,n\}$ — множество дифференцирований алгебры A.

Пусть $\alpha \in A$ такой, что $D_{11}(\alpha) \neq 0$, в алгебре $A[D_{11}(\alpha)^{-1}]$ рассмотрим элементы $\alpha_i = D_{11}(\alpha)^{-1}D_{i1}(\alpha)$, $i = 1, \ldots, n$, и A-алгебру Γ, порожденную $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$.

Пусть $\operatorname{End}\Gamma$ — алгебра линейных преобразований векторного пространства Γ и $M_{1,1}(\operatorname{End}\Gamma)$ — ассоциативная супералгебра с четной частью

$$\left\{ \begin{pmatrix} \psi_1 & 0 \\ 0 & \psi_2 \end{pmatrix} \mid \psi_1, \psi_2 \in \operatorname{End}\Gamma \right\}$$

и нечетной частью

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \psi_1 \\ \psi_2 & 0 \end{pmatrix} \mid \psi_1, \psi_2 \in \operatorname{End}\Gamma \right\}.$$

Как известно (см. [11]), отображение $\phi : J(A, \Delta) \mapsto M_{1,1}(\operatorname{End}\Gamma)$, заданное на четных элементах

$$\phi : a \mapsto \begin{pmatrix} R_a & 0 \\ 0 & R_a \end{pmatrix},$$

а на нечетных элементах

$$\phi : \sum_i b_i x_i \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 4\sum\limits_i R_{b_i} D_{i1} + 2\sum\limits_i R_{D_{i1}(b_i)} + 2\sum\limits_i R_{b_i\gamma_{i1}} \\ -\sum\limits_i R_{b_i\alpha_i} & 0 \end{pmatrix},$$

является ассоциативной специализацией супералгебры $J(A, \Delta)$ в супералгебру $M_{1,1}(\operatorname{End}\Gamma)$. Как показано в § 1, $J(A, \Delta)$ является подсупералгеброй в $B^{(+)_s}$ для некоторой $(-1,1)$-супералгебры B. Этот факт дает еще одно доказательство специальности $J(A, \Delta)$.

Пусть $J(\Gamma, D)$ — простая йорданова супералгебра векторного типа и $W = \Gamma[t]$ — векторное пространство полиномов от переменной t с коэффициентами из Γ. Определим на W структуру дифференциальной алгебры, полагая $t \cdot a = at + D(a)$. Тогда отображение $m : J(\Gamma, D) \mapsto M_{1,1}(W)$, заданное правилом

$$m : a \mapsto \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}, \quad a \in \Gamma, \quad m : \xi \mapsto \begin{pmatrix} 0 & 2t \\ -1 & 0 \end{pmatrix},$$

является ассоциативной специализацией супералгебры $J(\Gamma, D)$. Как показано в [15], супералгебра $M_{1,1}(W)$ является ассоциативной обертывающей супералгебры $J(\Gamma, D)$.

Пусть $J = J(A, \Delta) = A + M$, $M = Ax_1 + \cdots + Ax_n$ и U — универсальная обертывающая йордановой супералгебры J. Можно считать, что J — подсупералгебра в $U^{(+)_s}$. Умножение в алгебре U будем обозначать через $(*)$.

Предложение 6. *Пусть йорданова супералгебра J проста и $\Delta = \{D_{ij} \mid i, j = 1, \ldots, n\}$. Тогда*

$$A = \sum_{ij} D_{ij}(A) + \sum_{ij}\sum_{kl} D_{ij}(A) D_{kl}(A).$$

Доказательство. Если $n = 1$, то все доказано в силу леммы 3.1 из [15].

Пусть $n > 1$. Тогда $D_{ij}D_{lk} \neq 0$ в силу предложения 9 из [6]. Поэтому $\sum\limits_{ijkl} AD_{ij}D_{lk}(A)$ — ненулевой идеал в A, инвариантный относительно Δ. Следовательно,

$$A = \sum_{ijkl} AD_{ij}D_{lk}(A) \subseteq \sum_{ijkl} D_{ij}(AD_{lk}(A)) + \sum_{ijkl} D_{ij}(A) D_{lk}(A).$$

Предложение 7. *Для любых $a, b \in A$ коммутатор $[a, b] = a * b - b * a$ лежит в центре U.*

Доказательство. Поскольку в супералгебре J ассоциатор $(a, x, b) = 0$ для любого $x \in J$ и $4(a, x, b) = [x, [a, b]]$, где $[x, [a, b]]$ — коммутатор в U, то $[x, [a, b]] = 0$. Так как алгебра U порождается J, то $[a, b]$ лежит в центре U.

Идея доказательства следующего предложения аналогична доказательству леммы 3.3 из [15].

Предложение 8. *Пусть J — простая йорданова супералгебра. Тогда для любых $a, b \in A$ коммутатор $[a, b]$ равен 0 в алгебре U.*

Доказательство. В J имеет место $D_{ij}(a) = (a, x_i, x_j)$ для любого $a \in A$. Так как

$$(a, x_i, x_j) + (x_i, x_j, a) - (x_j, a, x_i) = 0, \quad (x_i, x_j, a) = (a, x_i, x_j),$$

то $2D_{ij}(a) = (x_j, a, x_i) = \frac{1}{4}[x_i \circ x_j, a]$, где $x_i \circ x_j = x_i * x_j + x_j * x_i$.

Пусть векторное пространство S линейно порождается $[[x_i \circ x_j, a], b]$, где $a, b \in A$. В силу предложения 7 S линейно порождается $[[x_i \circ x_j, a], a]$. Ясно, что $S \subseteq [A, A]$, тем самым S лежит в центре U. Для любого $c \in A$

$$\begin{aligned} 2[[x_i \circ x_j, a], a] * c &= [[x_i \circ x_j, a], a] \circ c = [[x_i \circ x_j, a], a \circ c] - [[x_i \circ x_j, a], c] \circ a \\ &= [[x_i \circ x_j, a], a \circ c] - [[x_i \circ x_j, c], a] \circ a = [[x_i \circ x_j, a], a \circ c] - [[x_i \circ x_j, c], a^2] \in S. \end{aligned}$$

Поэтому $S * A \in S$.

Покажем, что $S * D_{ij}(a) = 0$ для любого $a \in A$. Пусть $s \in S$. Тогда

$$2s * [x_i \circ x_j, a] = s \circ [x_i \circ x_j, a] = [x_i \circ x_j, s \circ a] - [x_i \circ x_j, s] \circ a = 0.$$

Следовательно, $S * D_{ij}(a) = 0$ для любого $a \in A$.

Так как J проста, по предложению 6

$$S = S * 1 \subseteq S * \sum_{ij} D_{ij}(A) + S * \Big(\sum_{ij} \sum_{kl} D_{ij}(A) \circ D_{kl}(A)\Big) = 0.$$

Поэтому $[D_{ij}(A), A] = 0$. Тогда по предложению 6

$$\begin{aligned} [A, A] &\subseteq \sum_{ij} [D_{ij}(A), A] + \sum_{ij} \sum_{kl} [D_{ij}(A) D_{kl}(A), A] = \sum_{ij} \sum_{kl} [D_{ij}(A) \circ D_{kl}(A), A] \\ &\subseteq \sum_{ij} [D_{ij}(A), A] \circ D_{kl}(A) + \sum_{ij} \sum_{kl} D_{ij}(A) \circ [D_{kl}(A), A] = 0. \end{aligned}$$

В силу предложения 7 из [6] выполнено

Предложение 9. *Пусть J — простая йорданова супералгебра. Тогда для любых $a, b \in A$ и $x, y \in M$ в алгебре U справедливо $[a, x] * [b, y] = 0$.*

Предложение 10. *Пусть J — простая йорданова супералгебра. Тогда четная часть U_0 супералгебры U линейно порождается элементами вида*

$$a * x_1^{k_1} * \dots * x_n^{k_n}, \quad a * x_1^{l_1} * \dots * x_n^{l_n} * [b, x_i],$$

где $a, b \in A$, $k_1 + \dots + k_n = 2p$, $l_1 + \dots + l_n = 2q - 1$, а нечетная часть U_1 —

$$a * x_1^{k_1} * \dots * x_n^{k_n}, \quad a * x_1^{l_1} * \dots * x_n^{l_n} * [b, x_i],$$

где $a, b \in A$, $k_1 + \cdots + k_n = 2p - 1$, $l_1 + \cdots + l_n = 2q$.

Доказательство. Для $u = x_{i_1} * \cdots * x_{i_m}$, где $i_1 \leq \cdots \leq i_m$, через V обозначим множество элементов, состоящих из произведения (возможно, пустого) $x_{i_{j_1}}, x_{i_{j_2}}, \dots, x_{i_{j_r}}$, входящих в u, причем $i_{j_1} \leq i_{j_2} \leq \cdots \leq i_{j_r}$.

Пусть $u = x_{i_1} * \cdots * x_{i_{2k}}$, где $i_1 \leq \cdots \leq i_{2k}$. Покажем, что $u * a = \sum\limits_{v \in V} a_v * v$ для элемента $a \in A$, где все $a_v \in A$. В силу предложения 8

$$x_i * x_j * a = a * x_i * x_j + [x_i * x_j, a] = a * x_i * x_j + \frac{1}{2}[x_i \circ x_j + [x_i, x_j], a]$$
$$= a * x_i * x_j + \frac{1}{2}[x_i \circ x_j, a].$$

Так как $[x_i \circ x_j, a] = 8D_{ij}(a) \in A$, при $k = 1$ все доказано. Поскольку

$$u * a = x_{i_1} * \cdots * x_{2(k-1)} * a * x_{2k-1} * x_{i_{2k}} + x_{i_1} * \cdots * x_{2(k-1)} * [x_{2k-1} * x_{i_{2k}}, a]$$

и $[x_{2k-1} * x_{i_{2k}}, a] \in A$, несложной индукцией получаем искомый результат.

Пусть $u = x_{i_1} * \cdots * x_{i_{2k+1}}$, где $i_1 \leq \cdots \leq i_{2k+1}$. Тогда

$$u * a = \sum_{v \in V} a_v * v + x_{i_1} * \cdots * x_{i_{2k}} * [x_{i_{2k+1}}, a].$$

Так как

$$u * a = x_{i_1} * \cdots * x_{i_{2k}} * a * x_{i_{2k+1}} + x_{i_1} * \cdots * x_{i_{2k}} * [x_{i_{2k+1}}, a],$$

по доказанному выше получаем искомый результат.

Пусть $u = x_{i_1} * \cdots * x_{i_k}$, где $i_1 \leq \cdots \leq i_k$. Покажем, что $u * x_r = \sum\limits_i a * u_i + \sum\limits_i b_i * w_i * [c_i, x_{r_i}]$, где каждый u_i имеет вид $x_{j_1} * \cdots * x_{j_l}$, $j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq \max(i_k, x_r)$, каждый w_j имеет вид $x_{j_1} * \cdots * x_{j_l}$, $j_1 \leq \cdots \leq j_l \leq r_j \leq i_k$, $a_i, b_i, c_i \in A$ и $\{j_1, \dots, j_l, r_i\} \subseteq \{i_1, \dots, i_k, r\}$.

Если $i_k \leq r$, то все доказано. Поэтому можно считать, что $i_k > r$. В этом случае

$$u * x_r = x_{i_1} * \cdots * x_{i_{k-1}} * x_r * x_{i_k} + x_{i_1} * \cdots * x_{i_{k-1}} * [x_{i_k}, x_r].$$

Заметим, что $[x_{i_k}, x_r] = 2\gamma_{i_k r} \in A$. Если $k = 1$, то все доказано.

Пусть $k > 1$. Если $i_{k-1} \leq r$, то все доказано. Пусть $r < i_{k-1}$. Тогда по предположению индукции можно считать, что

$$x_{i_1} * \cdots * x_{i_{k-1}} * x_r = \sum_i a * u_i + \sum_i b_i * w_i * [c_i, x_{r_i}]$$

и все u_i, w_i имеют указанный вид. Поэтому

$$u * x_r = \sum_i a_i * u_i * x_{i_k} + \sum_i b_i * w_i * [c_i, x_{r_i}] * x_{i_k},$$

где $u_i * x_{i_k}$ имеет указанный выше вид. Поскольку

$$[c_i, x_{r_i}] * x_{i_k} = -x_{r_i} * [c_i, x_{i_k}] + [c_i, x_{r_i} * x_{i_k}]$$
$$= -x_{r_i} * [c_i, x_{i_k}] + \frac{1}{2}[c_i, x_{r_i} \circ x_{i_k} + [x_{r_i}, x_{i_k}]] = -x_{r_i} * [c_i, x_{i_k}] + \frac{1}{2}[c_i, x_{r_i} \circ x_{i_k}]$$

и $[c_i, x_{r_i} \circ x_{i_k}] \in A$, то $w_i * [c_i, x_{r_i}] * x_{i_k}$ имеет указанный вид.

Отсюда следуют все утверждения данного предложения.

Предложение 11. *Пусть йорданова супералгебра J проста. Тогда в алгебре U существуют ортогональные идемпотенты e_1, e_2 такие, что $e_1 + e_2 = 1$, $[e_i, U_0] = 0$, $i = 1, 2$, $M \subseteq e_1 * U_1 * e_2 + e_2 * U_1 * e_1$, $[A, M] \subseteq e_1 * [A, M] * e_2$. Пусть*

$$V = \operatorname{span}\{a_i * x_1^{k_{1i}} * \dots * x_n^{k_{ni}} \mid k_{1i} + \dots + k_{ni} = 2r_i\}.$$

Тогда $U_0 = V * e_1 + V * e_2$, $U_1 = U_0 * x_1 + \dots + U_0 * x_n + U_0 * [d_1, x_1] + \dots + U_0 * [d_n, x_n]$, $d_1, \dots, d_n \in A$.

Доказательство. Так как супералгебра J проста, алгебра A дифференциально проста относительно множества дифференцирований Δ. Поэтому $1 = \sum_{ijk} b_k D_{ij}(c_k)$. Следовательно, $1 = \sum_i D_{x_i, z_i}(a_i) = \sum_i (a_i, x_i, z_i)$, где $a_i \in A$, $z_i \in M$ для всех i. Тогда в алгебре U имеем $1 = \frac{1}{2} \sum_i [a_i, y_i] \circ x_i$, где $y_i \in M$ для всех i.

Рассмотрим $s = \frac{1}{2} \sum_i [[a_i, y_i], x_i]$. В силу предложения 12 из [6] $s^2 = 1$, $[[A, M], M] \circ M \subseteq [A, M]$, $[[A, M], M] \circ [A, M] = 0$, $[A, s] = 0$ и $[[A, M], M] = A \circ s$. Отсюда для $m \in M$ получаем

$$2s * m * s = (m \circ s) \circ s - m \circ s^2 = -2m.$$

Следовательно, $m \circ s = 0$.

Пусть $e_1 = \frac{1}{2}(1 + s)$, $e_2 = \frac{1}{2}(1 - s)$. Тогда $e_1 = \frac{1}{2} \sum_i [a_i, y_i] * x_i$, $e_2 = \frac{1}{2} \sum_i x_i * [a_i, y_i]$ и $[A, e_i] = 0$. Так как $s \circ m = 0$ для любого $m \in M$, то $e_i \circ m = m$. Поэтому

$$\begin{aligned}[x_i * x_j, e_1] &= \frac{1}{2}[x_i \circ x_j + [x_i, x_j], e_1] = \frac{1}{2}[x_i \circ x_j, e_1] \\ &= -\frac{1}{2}[x_j \circ e_1, x_i] - \frac{1}{2}[e_1 \circ x_i, x_j] = -\frac{1}{2}[x_j\, x_i] - \frac{1}{2}[x_i, x_j] = 0.\end{aligned}$$

Отсюда легко получить, что $[e_1, U_0] = 0$.

Рассмотрим $u = a * x_1^{k_1} * \dots * x_n^{k_n} * [b, x_i] \in U_0$. Будем считать, что $k_n > 0$. Тогда

$$u = a * x_1^{k_1} * \dots * x_n^{k_n - 1} * \left(\frac{1}{2} x_{k_n} \circ [b, x_i] - \frac{1}{2}[x_{k_n}, [b, x_i]]\right).$$

Так как $x_{k_n} \circ [b, x_i] \in A$ и $[x_{k_n}, [b, x_i]] \in A \circ s$, имеем

$$u = \sum_i a_i * x_{1i}^{k_{1i}} * \dots * x_{ni}^{k_{ni}} + \sum_i b_i * x_{1i}^{l_{1i}} * \dots * x_{ni}^{l_{ni}} * s,$$

где $k_{1i} + \dots + k_{ni} = 2r_i$, $l_{1i} + \dots + l_{ni} = 2l_i$. Следовательно, $U_0 = V * e_1 + V * e_2$. Ясно, что $M \subseteq e_1 * U_1 * e_2 + e_2 * U_1 * e_1$. В силу предложения 9 $[A, M] \subseteq e_1 * [A, M] * e_2$.

Пусть $f(x, y) = x^2 + y^4 - 1$ и $\Lambda = F[x, y]/f(x, y)F[x, y])$. Тогда $\Lambda = A + M$ — Z_2-градуированная алгебра. Рассмотрим множество дифференцирований

$$\Delta = \{D_{11}, D_{12}, D_{22}\},$$

где

$$D_{11} = x^2 D, \quad D_{12} = xyD, \quad D_{22} = y^2 D, \quad D = 2y^3 \frac{\partial}{\partial x} - x \frac{\partial}{\partial y}.$$

Тогда $J(A, \Delta)$ — простая йорданова супералгебра. Пусть U — универсальная ассоциативная обертывающая супералгебры $J(A, \Delta)$.

Пусть $W=\Lambda[t]$ — дифференциальная алгебра относительно дифференцирования D. Тогда W допускает Z_2-градуировку, $W_0=A[t]$, $W_1=M[t]$. В алгебре $M_2(W)$ рассмотрим Z_2-градуированную подалгебру E с градуировкой

$$E_0=\left\{\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & b\end{pmatrix} \mid a,b\in W_0\right\},\quad E_1=\left\{\begin{pmatrix} 0 & v\\ w & 0\end{pmatrix} \mid v,w\in W_1\right\}.$$

Тогда $m:J(A,\Delta)\mapsto E$, заданное правилом

$$m(a)=\begin{pmatrix} a & 0\\ 0 & a\end{pmatrix},\quad a\in A,$$

$$m(x)=\begin{pmatrix} 0 & 4xt+4y^3\\ -x & 0\end{pmatrix},\quad m(y)=y\mapsto\begin{pmatrix} 0 & 4yt-2x\\ -y & 0\end{pmatrix},$$

является ассоциативной специализацией супералгебры $J(A,\Delta)$. Следовательно, существует гомоморфизм супералгебр $u:U\mapsto E$ такой, что $(ui)(z)=m(z)$, где $z\in J(A,\Delta)$ и i — вложение $J(A,\Delta)$ в $U^{(+)_s}$. Нетрудно показать, что u — эпиморфизм и для идемпотентов e_1,e_2 из предложения 11

$$u(e_1)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\quad u(e_2)=\begin{pmatrix} 0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Вопрос. *Является ли u изоморфизмом?*

ЛИТЕРАТУРА

1. *Кантор И. Л.* Йордановы и лиевы супералгебры, определяемые алгеброй Пуассона // Алгебра и анализ. Вторая сибирская школа. Томск, 1989. С. 55–80.
2. *King D., McCrimmon K.* The Kantor construction of Jordan superalgebras // Commun. Algebra. 1992. V. 20, N 1. P. 109–126.
3. *King D., McCrimmon K.* The Kantor doubling process revisited // Commun. Algebra. 1995. V. 23, N 1. P. 357–372.
4. *Шестаков И. П.* Простые супералгебры типа $(-1,1)$ // Алгебра и логика. 1998. Т. 37, № 6. С. 721–739.
5. *Желябин В. Н.* Простые специальные йордановы супералгебры с ассоциативной ниль-полупростой четной частью // Алгебра и логика. 2002. Т. 41, № 3. С. 276–310.
6. *Желябин В. Н., Шестаков И. П.* Простые специальные супералгебры с ассоциативной четной частью // Сиб. мат. журн. 2004. Т. 45, № 5. С. 1046–1072.
7. *Желябин В. Н.* Дифференциальные алгебры и простые йордановы супералгебры // Мат. тр. 2009. Т. 12, № 2. С. 41–51.
8. *Желябин В. Н.* Новые примеры простых йордановых супералгебр над произвольным полем характеристики нуль // Алгебра и анализ. 2012. Т. 24, № 4. С. 84–96.
9. *Cantarini N., Kac V. G.* Classification of linearly compact simple Jordan and generalized Poisson superalgebras // J. Algebra. 2007. V. 313, N 2. P. 100–124.
10. *Желябин В. Н.* Примеры первичных йордановых супералгебр векторного типа и супералгебр типа Ченга — Каца // Сиб. мат. журн. 2013. Т. 54, № 1. С. 49–56.
11. *Желябин В. Н.* Йордановы супералгебры векторного типа и проективные модули // Сиб. мат. журн. 2012. Т. 53, № 3. С. 566–579.
12. *Шестаков И. П.* Супералгебры и контрпримеры // Сиб. мат. журн. 1991. Т. 32, № 6. С. 187–196.
13. *McCrimmon K.* Speciality and non-speciality of two Jordan superalgebras // J. Algebra. 1992. V. 149, N 2. P. 326–351.
14. *Swan R. G.* Vector bundles and projective modules // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 105. P. 264–277.

15. *Martinez C., Zelmanov E.* Specializations of Jordan superalgebras Dedicated to Robert V. Moody // Can. Math. Bull. 2002. V. 45, N 4. P. 653–671.

Статья поступила 16 сентября 2014 г.

Желябин Виктор Николаевич
Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
пр. Академика Коптюга, 4, Новосибирск 630090;
Новосибирский гос. университет,
ул. Пирогова, 2, Новосибирск 630090
vicnic@math.nsc.ru